Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Горин, Непересекающиеся пути и ансамбль ортогональных многочленов Хана, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 23–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:12:24

Непересекающиеся пути и ансамбль ортогональных многочленов Хана*

© 2008. В. Е. Горин

Введение

В работе рассматривается известная комбинаторная модель детерминантных точечных процессов в размерности $1 + 1$ (одна пространственная и одна временная переменные). Модель зависит от трех натуральных параметров a, b, c и задается равномерным распределением на конечном множестве $\Omega(a, b, c)$ комбинаторных объектов, которое может быть описано несколькими эквивалентными способами: множество трехмерных диаграмм Юнга (иначе говоря, плоских разбиений) в коробке размера $a \times b \times c$; множество замощений ромбами шестиугольника со сторонами a, b, c, a, b, c ; некоторая модель димеров. См. работы Кона, Ларсена и Проппа [8], Йоханссона [11] и Йоханссона и Норденстама [12]. Соответствия между различными моделями приведены в приложении.

Следуя Йоханссону, используем еще одну интерпретацию, в которой $\Omega(a, b, c)$ отождествляется с некоторым ансамблем непересекающихся ломаных на плоской решетке. Последняя интерпретация и приводит к детерминантным точечным процессам (иначе говоря, случайным точечным конфигурациям), меняющимся со временем. Свойство детерминантности, играющее ключевую роль, означает, что динамические (т. е. пространственно-временные) корреляционные функции модели могут быть получены как миноры некоторой матрицы, называемой динамическим корреляционным ядром. Цель работы — вычисление асимптотики этого ядра в различных предельных режимах.

Если зафиксировать момент времени, то модель определяет случайную конфигурацию точек на одномерной решетке — ортогональный полиномиальный ансамбль Хана. А динамическая модель может быть описана как цепочка таких ансамблей с меняющимися параметрами, ее можно назвать динамическим ансамблем Хана. Динамическое корреляционное ядро есть так называемое расширенное ядро Хана, впервые полученное Йоханссоном в работах [11] и [12]. Основой для вычисления ядра служит теорема Эйнара–Меты [9].

Главный результат работы — вычисление асимптотики расширенного ядра Хана в «bulk limit regime». Ответом является трансляционно-инвариантное ядро $K(x, s; y, t)$ на $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, для которого получено простое интегральное представление

$$K(x, s; y, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} (1 + cw)^{t-s} w^{x-y-1} dw.$$

*Во время написания работы автору оказывали поддержку Фонд поддержки математики им. Леонарда Эйлера, Фонд поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса» и РФФИ, грант 07-01-91209.

Здесь интегрирование ведется по правой стороне единичной окружности при $s \geq t$ и по левой в противном случае, а параметры ϕ и c зависят от предельного режима (теорема 1).

Статическая версия ядра ($s = t$) есть хорошо известное дискретное синус-ядро на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ [3]. Полученное динамическое расширение синус-ядра входит в число построенных в [2]. Ядро $K(x, s; y, t)$ связано простым преобразованием (дуальность частиц и дырок на решетке) с ядром, впервые полученным Окуньковым и Решетихиным [19].

В статье Кениона [13] были исследованы локальные флуктуации в модели, схожей с нашей, в таких же предельных режимах, как и в данной работе. С использованием техники, существенно отличающейся от нашей, было показано, что предельное распределение является одной из так называемых эргодических гиббсовских мер μ_ν на бесконечном гексагональном графе. Последние были впервые классифицированы в диссертации Шеффилда [21], а в работе [14] были подсчитаны корреляционные ядра для мер μ_ν . В своей статье Кенион указывает, что, по-видимому, его результаты должны быть справедливы в общем случае, однако полное доказательство было приведено только в предположении, что так называемая «предельная форма» («limit shape») не имеет плоских граней. Но как раз в нашем случае предельная форма имеет плоские грани, и, видимо, результат данной работы не является непосредственным следствием результатов работы [13].

Для доказательства теоремы 1 мы не пользуемся приемами работ Кениона, Окунькова и Шеффилда, а, напротив, применяем новый метод.

В литературе имеются тонкие аналитические результаты об асимптотических свойствах дискретных ортогональных полиномиальных ансамблей (см. [1], [11]), но они относятся к статическим, а не динамическим ансамблям. Применить же известный подход — исследовать асимптотику с помощью подходящего интегрального представления ядра — в случае расширенного ядра Хана не получается.

Мы решаем задачу с помощью метода, предложенного в [5]. Хотя в [5] рассматриваются опять-таки лишь статические модели, оказалось, что метод можно адаптировать и к интересующей нас динамической модели. Для вычисления допредельного динамического ядра используются некоторые соотношения, связывающие многочлены Хана с различными параметрами (аналогичный подход применялся в [4]).

Работа построена следующим образом: в §1 определяется изучаемый случайный процесс и вычисляются его простейшие характеристики; в §2 доказывается детерминантность процесса, а его динамическое корреляционное ядро выражается через ортогональные многочлены Хана; в §3 формулируется и доказывается основная теорема; наконец, в §4 анализируются полученные результаты и показывается их связь с теоремами, доказанными в работах [8] и [19].

Автор благодарен А. М. Бородину за постановку задачи, советы и подсказку вида необходимых соотношений для ортогональных многочленов Хана. Автор благодарен также Г. И. Олышанскому за многочисленные обсуждения и неоценимую помощь в написании данной работы.

§1. Основные определения и простейшие свойства

1.1. Базовая модель. Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости (t, x) и два набора точек на ней, $\{X_i = (0, i - 1)\}$ и $\{Y_i = (T, S + i - 1)\}$, где индекс i меняется от 1 до некоторого фиксированного N , а T и S — некоторые фиксированные параметры ($T \geq S$). Мы будем изучать наборы из N непересекающихся путей, проходящих по узлам решетки, при этом i -й путь соединяет X_i и Y_i . Пути являются ломаными, у которых каждое звено есть отрезок с левым концом $(t, x) \in \mathbb{Z}^2$ и правым концом $(t + 1, x)$ или $(t + 1, x + 1)$. Иными словами, пути состоят из горизонтальных отрезков и отрезков, наклоненных под углом 45° , причем при движении вдоль пути t -координата возрастает, а x -координата не убывает. Координату t мы часто будем называть временем.

Введем вероятностное пространство всевозможных таких наборов путей и вероятностную меру на нем, считая все наборы равновероятными.

Рассмотрим теперь произвольный момент времени t и набор точек $Z_1, \dots, Z_N$ с координатами (t, z_i) соответственно (будем считать, что z_i упорядочены по возрастанию). Определена вероятность того, что наш набор путей проходит через точки Z_i . Эта вероятность естественным образом индуцирует на наборах из N различных натуральных чисел вероятностную меру $P_t(z_1, \dots, z_N)$. Далее, изучаемые наборы путей задают случайный процесс с дискретным временем $t = 1, \dots, T$, основным пространством, образованным наборами из N натуральных чисел, и одномерными распределениями P_t . Обозначим его через H_t . Нашей задачей будет изучение свойств этого процесса.

Описанный процесс является марковским, это видно из определения марковского процесса как процесса с независимыми прошлым и будущим при фиксированном настоящем.

Обратим внимание, что все пути (соответственно и все конфигурации процесса H_t) расположены внутри шестиугольника, две стороны которого параллельны оси t , две другие — оси x , а оставшиеся наклонены под углом 45° . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 1.

Рис. 1. Набор из шести непересекающихся путей

1.2. Простейшие численные характеристики. Начнем с явного подсчета величины $P_t(z_1, \dots, z_n)$

Предложение 1. *Количество наборов непересекающихся путей, соединяющих точки (t_1, a_i) и (t_2, b_i) , где i меняется от 1 до N , равно $\det_{i,j=1,\dots,N} \left[\binom{t_2 - t_1}{b_i - a_j} \right]$.*

Доказательство. Этот факт является достаточно известным. Прием, используемый для его доказательства, описан в [10]. $\square$

Из предложения 1 и определений сразу следует, что

$$P_t(z_1, \dots, z_N) = \frac{\det_{i,j=1,\dots,N} \left[\binom{t}{z_i+1-j} \right] \det_{i,j=1,\dots,N} \left[\binom{T-t}{S+i-1-z_j} \right]}{\det_{i,j=1,\dots,N} \left[\binom{T}{S+i-j} \right]}.$$

Воспользовавшись теоремой 26 из [16] для подсчета определителей и сделав небольшие упрощения, получаем (здесь и далее мы пользуемся стандартным обозначением $(a)_i = a(a+1) \cdots (a+i-1)$), что последнее выражение равно

$$\prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^2 \prod_{i=1}^N \frac{1}{z_i! (t - z_i + N - 1)! (S - z_i + N - 1)! (T - t - S + z_i)!} \\ \times \prod_{i=1}^N \frac{(t+1)_{i-1} (T-t+1)_{i-1} (S-i+N)! (T-S+i-1)! \left(\frac{t! (T-t)!}{T!} \right)^N}{(T+1)_{i-1} (i-1)!}.$$

После дальнейших преобразований вероятность можно записать в виде

$$\frac{1}{Z} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z'_i - z'_j)^2 \prod_{i=1}^N \left(\frac{(\alpha+1)_{z'_i} (\beta+1)_{M-z'_i}}{z'_i! (M-z'_i)!} \right),$$

где Z — нормировочная константа, зависящая от T , N , S и t , а координата z'_i связана с z_i простым сдвигом на величину, зависящую от остальных параметров. Все явные формулы, связывающие параметры в различных представлениях весовой функции, будут приведены в следующем параграфе.

Таким образом,

$$P_t(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{Z} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z'_i - z'_j)^2 \prod_{i=1}^N w_{\alpha, \beta, M}(z'_i),$$

где $w_{\alpha, \beta, M}(x) = \frac{(\alpha+1)_x (\beta+1)_{M-x}}{x! (M-x)!}$, $x = 0, \dots, M$, является весовой функцией для ортогональных многочленов Хана (определение и основные свойства многочленов Хана можно найти в [15]), параметры α , β , M зависят от T , N , S и t , а z'_i связана с z_i сдвигом начала координат. В дальнейшем мы будем обозначать весовую функцию в момент времени t через $w_t(x)$.

§2. Детерминантное представление. Корреляционное ядро

2.1. Одномерные распределения.

Предложение 2. Пусть на множестве целых чисел задан произвольный неотрицательный вес $w(x)$, и пусть $p_0, p_1, \dots$ — соответствующие ортогональные многочлены. Далее, пусть на N -элементных подмножествах множества целых чисел задана вероятностная мера

$$P_t(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{Z} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^2 \prod_{i=1}^N w(z_i).$$

Тогда вероятность того, что случайное подмножество содержит заданные

различные точки $x_1 < \dots < x_k$, равняется

$$\det_{i,j=1,\dots,k} [K(x_i, x_j)],$$

где ядро K вычисляется по формуле

$$K(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n(x)p_n(y)}{(p_n, p_n)}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [17]

Такое распределение вероятности на N -элементных подмножествах называется *ортогональным полиномиальным ансамблем*. Легко видеть, что одномерные распределения, возникающие в нашей задаче, имеют именно такой вид, как в последнем предложении.

Теперь явно опишем для рассматриваемого процесса H_t одномерные распределения и используемые ортогональные многочлены и весовые функции.

Итак, в нашей модели весовая функция записывается в виде

$$\begin{aligned} w_t(x) &= \frac{c}{z_i! (t-x+N-1)! (S-x+N-1)! (T-t-S+x)!} \\ &= \frac{(\alpha+1)_{x'} (\beta+1)_{M-x'}}{x'! (M-x')!} \end{aligned}$$

(здесь c — некоторая константа, не зависящая от x , а x' отличается от x некоторым сдвигом). Обратим внимание на то, что носитель весовой функции меняется со временем, а именно, при росте t на единицу носитель либо не меняется, либо к нему добавляется одна точка сверху, либо из него удаляется одна точка снизу, либо происходит одновременно и добавление, и удаление (см. рис. 1). Обозначим множество точек в носителе функции w_t через $\mathfrak{X}_t$.

Обозначим через $Q_k(x', \alpha, \beta, M)$ ортогональный многочлен Хана степени k с параметрами α, β, M . В соответствии с [15] такие многочлены определены при $x' = 0, \dots, M, k = 0, \dots, M$ и ортогональны относительно веса

$$\frac{(\alpha+1)_{x'} (\beta+1)_{M-x'}}{x'! (M-x')!}.$$

Многочлены Хана можно выразить через обобщенную гипергеометрическую функцию:

$$Q_k(x', \alpha, \beta, M) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -x', k + \alpha + \beta + 1 \\ -M, \alpha + 1 \end{matrix} \right) (1).$$

Обозначим через $H_k^t(x)$ многочлен Хана Q_k , отвечающий моменту времени t и сдвинутый так, чтобы его область определения совпадала с $\mathfrak{X}_t$.

В зависимости от соотношения между t и остальными параметрами возникают 4 случая, в которых α, β, M, x' по-разному выражаются через параметры

задачи:

$$(I) \quad t < S + 1, \quad t < T - S + 1 :$$

$$M = t + N - 1, \quad \alpha = -S - N, \quad \beta = S - T - N, \quad x' = x,$$

$$H_t^k(x) = Q_k(x', \alpha, \beta, M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x', k+\alpha+\beta+1 \\ -M, \alpha+1 \end{matrix}\right)(1) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x, k-2N-T+1 \\ -S-N+1, -t-N+1 \end{matrix}\right)(1),$$

$$0 \leq x \leq M = t + N - 1, \quad 0 \leq k \leq M = t + N - 1;$$

$$(II) \quad S - 1 < t < T - S + 1 :$$

$$M = S + N - 1, \quad \alpha = -t - N, \quad \beta = t - N - T, \quad x' = x,$$

$$H_t^k(x) = Q_k(x', \alpha, \beta, M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x', k+\alpha+\beta+1 \\ -M, \alpha+1 \end{matrix}\right)(1) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x, k-2N-T+1 \\ -S-N+1, -t-N+1 \end{matrix}\right)(1),$$

$$0 \leq x \leq M = s + N - 1, \quad \leq k \leq M = s + N - 1;$$

$$(III) \quad T - S - 1 < t < S + 1 :$$

$$M = t + N - S - 1, \quad \alpha = -T + t - N, \quad \beta = -t - N, \quad x' = T - t - s + x,$$

$$H_t^k(x) = Q_k(x', \alpha, \beta, M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x+t+s-T, k-2N-T+1 \\ -T+t-N+1, -T+S-N+1 \end{matrix}\right)(1),$$

$$-T + t + S \leq x' \leq t + N - 1, \quad 0 \leq k \leq T + N - S - 1;$$

$$(IV) \quad t > T - S - 1, \quad t > S - 1 :$$

$$M = T - t + N - 1, \quad \alpha = -T - N + S, \quad \beta = -S - N, \quad x' = T - t - s + x,$$

$$H_t^k(x) = Q_k(x', \alpha, \beta, M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x+t+s-T, k-2N-T+1 \\ -T+t-N+1, -T+S-N+1 \end{matrix}\right)(1),$$

$$-T + t + S \leq x' \leq S + N - 1, \quad 0 \leq k \leq T + N - t - 1.$$

Заметим, что в случаях (I) и (II) выражения многочленов H_k^t через гипергеометрическую функцию совпадают. Такая же ситуация и в случаях (III) и (IV).

Введем еще одно обозначение:

$$f_n^t(x) = \frac{H_n^t(x) \sqrt{w_t(x)}}{\sqrt{(H_n^t, H_n^t)}}.$$

Здесь (H_n^t, H_n^t) — квадрат нормы многочлена H_n^t относительно весовой функции $w_t(x)$. В соответствии с [15]

$$\begin{aligned} (H_n^t, H_n^t) &= (Q_k(x', \alpha, \beta, M), Q_k(x', \alpha, \beta, M)) \\ &= \frac{(-1)^k (k + \alpha + \beta + 1)_{N+1} (\beta + 1)_k k!}{(2k + \alpha + \beta + 1)(\alpha + 1)_k (-N)_k N!}. \end{aligned}$$

Функции $f_n^t(x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $l_2(\mathfrak{X}_t)$.

Теперь ядро K из предложения 2 можно для нашей задачи записать в виде

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^t(x) f_n^t(y).$$

2.2. Динамическая детерминантность. Будем называть *детерминантным* любой случайный процесс $X(t)$ со значениями в подмножествах некоторого

счетного множества, для которого существует функция $K(x, s; y, t)$, такая, что для любого набора различных пар $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)$

$$\text{Prob}\{x_1 \in X(t_1), x_2 \in X(t_2), \dots, x_n \in X(t_n)\} = \det_{i,j=1,\dots,n} [K(x_i, t_i; x_j, t_j)].$$

Функцию K будем называть *динамическим корреляционным ядром*, а сами вероятности — динамическими корреляционными функциями.

Для доказательства детерминантности процесса H_t нам понадобится общее абстрактное утверждение.

Предложение 3. Пусть для каждого момента времени t заданы ортонормированная система $\{f_n^t\}$ в $l_2(\{0, 1, \dots, L\})$ (она может образовывать базис не всего пространства, а лишь $l_2(L_t)$, где $L_t \subset \{0, 1, \dots, L\}$) и набор чисел $c_0^t, c_1^t, \dots$. Положим

$$v_{t,t+1}(x, y) = \sum_{n \geq 0} c_n^t f_n^t(x) f_n^{t+1}(y).$$

Кроме того, пусть имеется марковский процесс X_t с дискретным временем t , принимающий значения в N -элементных подмножествах множества $\{0, 1, \dots, L\}$, с одномерными распределениями

$$\left(\det_{i,j=1,\dots,N} [f_{i-1}^t(x_j)] \right)^2$$

и переходными вероятностями

$$\frac{\det[v_{t,t+1}(x_i, y_j)] \det[f_{i-1}^{t+1}(y_j)]}{\det[f_{i-1}^t(x_j)] \prod_{n=0}^{N-1} c_n^t}.$$

Тогда

$$p_n(x_1, k_1; \dots; x_n, k_n) := \text{Prob}\{x_1 \in X_{k_1}, \dots, x_n \in X_{k_n}\} = \det_{i,j=1,\dots,n} [K(x_i, k_i; x_j, k_j)],$$

где

$$\begin{aligned} K(x, k; y, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{c_i^{l,k}} f_i^k(x) f_i^l(y), & k \geq l, \\ K(x, k; y, l) &= - \sum_{i \geq N} c_i^{k,l} f_i^k(x) f_i^l(y), & k < l, \\ c_i^{k,k} &= 1, & c_i^{k,l} = c_i^k c_i^{k+1} \dots c_i^{l-1}. \end{aligned}$$

Это предложение является переформулировкой теоремы, доказанной Эйнарсом и Метой в [9]. Другая схожая его формулировка использовалась в [4].

Стоит обратить внимание на то, что динамическое корреляционное ядро не является канонически определенным объектом. Инвариантами процесса являются лишь корреляционные функции, которые не меняются при преобразованиях динамического корреляционного ядра вида

$$K^*(x, s; y, t) = K(x, s; y, t) \frac{F(x, s)}{F(y, t)},$$

где F — произвольная функция. Легко видеть, что в результате такого преобразования значения определителей не меняются.

Лемма 4. *Переходные вероятности процесса H_t за один временной шаг вычисляются по формуле*

$$P_{t,t+1}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) := \text{Prob}\{H_{t+1} = (y_1, \dots, y_N) \mid H_t = (x_1, \dots, x_N)\} \\ = \frac{\prod_{i < j} (y_j - y_i) \prod_{i: y_i = x_i + 1} (N + S - x_i - 1) \prod_{i: y_i = x_i} (x_i + T - t - S)}{(T - t)_N \cdot \prod_{i < j} (x_j - x_i)},$$

если каждая из разностей $y_i - x_i$ равна нулю или единице, и равны нулю в противном случае.

Справедливость последней формулы проверяется непосредственно по определению с использованием предложения 1 и формул для подсчета определителей, описанных в разд. 1.2.

Предложение 5. *Процесс H_t удовлетворяет условиям предложения 3 и, таким образом, является детерминантным.*

Здесь ортонормированной системой из формулировки предложения 3 является система функций f_n^t , определенных в разд. 2.1, а коэффициенты c_i^t вычисляются по формуле

$$c_i^t = \sqrt{\left(1 - \frac{i}{t + N}\right) \left(1 - \frac{i}{T + N - t - 1}\right)}.$$

Доказательство предложения 5. Нам понадобятся три леммы.

Лемма 6. *Для ортогональных многочленов Хана имеют место следующие два соотношения:*

$$xQ_k(x - 1; \alpha, \beta, M - 1) + (M - x)Q_k(x; \alpha, \beta, M - 1) = MQ_k(x; \alpha, \beta, M), \quad (*)$$

$$xQ_k(x - 1; \alpha + 1, \beta - 1, M) + (-x - \alpha - 1)Q_k(x; \alpha + 1, \beta - 1, M) \\ = -(\alpha + 1)Q_k(x; \alpha, \beta, M), \quad (**)$$

которые эквивалентны одному соотношению для функции ${}_3F_2$:

$$x \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, a, -x + 1 \\ b, c + 1 \end{matrix}\right)(1) - (c + x) \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, a, -x \\ b, c + 1 \end{matrix}\right)(1) = -c \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, a, -x \\ b, c \end{matrix}\right)(1).$$

Доказательство. Справедлива следующая формула (см. [15]):

$$Q_k(x, \alpha, \beta, M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, -x, k + \alpha + \beta + 1 \\ -M, \alpha + 1 \end{matrix}\right)(1) = \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i (k + \alpha + \beta + 1)_i}{(-M)_i (\alpha + 1)_i i!}.$$

Из нее вытекает, что

$$xQ_k(x - 1; \alpha, \beta, M - 1) + (M - x)Q_k(x; \alpha, \beta, M - 1) - MQ_k(x; \alpha, \beta, M) \\ = \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (k + \alpha + \beta + 1)_i}{(\alpha + 1)_i i!} \left[x \frac{(-x + 1)_i}{(-M + 1)_i} + (M - x) \frac{(-x)_i}{(-M + 1)_i} - M \frac{(-x)_i}{(-M)_i} \right] \\ = \sum_{i=0}^k \frac{(-k)_i (-x)_i (k + \alpha + \beta + 1)_i}{(-M + 1)_i (\alpha + 1)_i i!} [(x - k) + (M - x) - (M - k)] = 0.$$

Легко видеть, что второе соотношение эквивалентно уже доказанному. $\square$

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^M \frac{(2k + \alpha + \beta + 1)(\alpha + 1)_k (-M)_k M!}{(-1)^k (k + \alpha + \beta + 1)_{M+1} (\beta + 1)_k k!} Q_k(x, \alpha, \beta, M) Q_k(y, \alpha, \beta, M) = \delta_{x,y} \left/ \frac{(\alpha + 1)_x (\beta + 1)_{M-x}}{x! (M-x)!} \right.$$

Эта формула носит название «двойственное соотношение ортогональности». Ее можно найти в [15].

Лемма 8. *Имеет место равенство*

$$\sqrt{\frac{w_{t+1}(y)}{w_t(x)}} \sum_{k \geq 0} c_k^t f_k^t(x) f_k^{t+1}(y) = \frac{S + N - 1 - x}{\sqrt{(t+N)(T+N-t-1)}} \delta_{x+1}^y + \frac{T - t - S + x}{\sqrt{(t+N)(T+N-t-1)}} \delta_x^y.$$

Здесь c_i^t и $f_k^t(x)$ — это коэффициенты и функции, определенные после формулировки предложения 5, а $w_t(x)$ — весовая функция многочленов Хана.

Доказательство. Для доказательства достаточно вспомнить определение функций $f_k^t(x)$, подставить значения весовой функции и всех параметров, затем в случаях (I), (II) выразить $f_k^{t+1}(y)$ через $f_k^t(y)$ и $f_k^t(y-1)$ с помощью соотношения (*) и применить последнюю лемму. В случаях (III) и (IV) надо выразить $f_k^t(x)$ через $f_k^{t+1}(x)$ и $f_k^{(t+1)}(x+1)$, пользуясь соотношением (**), и снова применить двойственное соотношение ортогональности. $\square$

Вернемся к доказываемому предложению.

Тот факт, что одномерные распределения представляются в нужном для применения предложения 3 виде, следует из предложения 2, в котором полагаем k равным N (в этом случае само предложение 2 почти очевидно), и того, что

$$\begin{aligned} \left(\det_{i,j=1,\dots,N} [f_{i-1}^t(x_j)] \right)^2 &= \det_{i,j=1,\dots,N} [f_{i-1}^t(x_j)] \cdot \det_{i,j=1,\dots,N} [f_{j-1}^t(x_i)] \\ &= \det([f_{i-1}^t(x_j)] \cdot [f_{j-1}^t(x_i)]) = \det_{i,j=1,\dots,N} [K(x_j, x_i)] \end{aligned}$$

(здесь $K(x, y)$ — это ядро, определенное в предложении 2).

Остается показать, что переходные вероятности также имеют нужный вид, т. е.

$$P_{t,t+1}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) = \frac{\det[v_{t,t+1}(x_i, y_j)] \det[f_{i-1}^{t+1}(y_j)]}{\det[f_{i-1}^t(x_j)] \prod_{n=0}^{N-1} c_n^t}$$

(все матрицы, от которых берутся определители, имеют размер $N \times N$, и мы не будем в дальнейшем его явно указывать). Здесь

$$v_{t,t+1}(x, y) = \sum_{k \geq 0} c_k^t f_k^t(x) f_k^{t+1}(y).$$

По уже доказанному

$$v_{t,t+1}(x, y) = \sqrt{\frac{w_t(x)}{w_{t+1}(y)}} \left[\frac{S + N - 1 - x}{\sqrt{(t+N)(T+N-t-1)}} \delta_{x+1}^y + \frac{T - t - S + x}{\sqrt{(t+N)(T+N-t-1)}} \delta_x^y \right],$$

$$\det[f_{i-1}^{t+1}(y_j)] = \sqrt{P_{t+1}(y_1, \dots, y_N)}, \quad \det[f_{i-1}^t(x_j)] = \sqrt{P_t(x_1, \dots, x_N)}.$$

Подставляя выражения для весовой функции и вероятности N -элементного набора, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\det[v_{t,t+1}(x_i, y_j)] \det[f_{i-1}^{t+1}(y_j)]}{\det[f_{i-1}^t(x_j)] \prod_{i=0}^{N-1} c_i^t} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{w_{t+1}(y_i)}{w_t(x_i)}} \frac{(t+i)(T-t)(t+1)^N}{(t+1)(T-t+i-1)(T-t)^N} \det[v_{t,t+1}(x_i, y_j)]}{\prod_{i=0}^{N-1} c_i^t} \prod_{i < j} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \\ &= \frac{\det[(S + N - x - 1)\delta_{x_i+1}^{y_j} + (T - t - S + x)\delta_{x_i}^{y_j}]}{(T - t)_N} \prod_{i < j} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}. \quad (***) \end{aligned}$$

Будем считать, что x_i и y_i упорядочены в порядке возрастания.

Имеется два случая: либо каждая из разностей $y_i - x_i$ принимает значение 0 или 1, либо это не так.

В последнем случае матрица под знаком определителя в последней строке формулы (***) имеет нулевую строчку или столбец; следовательно, определитель равен нулю, но и переходная вероятность тоже нулевая.

В первом случае эта матрица под знаком определителя является блочно-диагональной, причем нули в ней расположены так, что каждый блок есть либо нижнетреугольная, либо верхнетреугольная матрица. Мы можем заключить, что определитель матрицы равен произведению ее диагональных элементов и значение выражения (***) совпадает с переходной вероятностью для процесса H_t , подсчитанной в лемме 4.

Таким образом, процесс подпадает под условия предложения 3, и мы можем заключить, что он детерминантен. $\square$

§3. Переход к пределу в корреляционных ядрах: операторный метод

3.1. Формулировка результата. Нас интересует предельное распределение (предельное корреляционное ядро) в следующем предельном режиме.

Зафиксируем числа $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$. Пусть вспомогательный параметр ρ стремится к ∞ и

$$S = \rho\tilde{S} + o(\rho), \quad T = \rho\tilde{T} + o(\rho), \quad N = \rho\tilde{N} + o(\rho), \quad t = \rho\tilde{t} + \hat{t},$$

$$s = \rho\tilde{t} + \hat{s}, \quad x = \rho\tilde{x} + \hat{x}, \quad y = \rho\tilde{x} + \hat{y}.$$

Такой предел можно интерпретировать следующим образом: мы фиксируем пропорции $\tilde{T}$, $\tilde{S}$, $\tilde{N}$ шестиугольника, внутри которого расположены пути, и точку $(\tilde{t}, \tilde{x})$ внутри него. Теперь мы начинаем раздувать шестиугольник с помощью гомотетии с коэффициентом ρ и центром в точке $(\tilde{t}, \tilde{x})$. Таким образом,

количество путей начинает возрастать, и мы изучаем получающуюся картинку вблизи точки $(\hat{t}, \hat{x})$.

Напомним формулу для корреляционного ядра, в которой мы хотим перейти к пределу:

$$K(x, s; y, t) = \begin{cases} -\sum_{i \geq N} \left(\prod_{j=s}^{t-1} c_i^j \right) f_i^s(x) f_i^t(y), & s < t, \\ \sum_{i=0}^{N-1} \left(\prod_{j=t}^{s-1} \frac{1}{c_i^j} \right) f_i^s(x) f_i^t(y), & s \geq t. \end{cases}$$

Здесь $f_i^s(x)$ и c_i^j — функции и коэффициенты, определенные в §2.

Теорема 1. Пусть в исходной модели все параметры S, T, N, t, s, x, y стремятся к бесконечности так, что

$$\begin{aligned} S &= \rho \tilde{S} + o(\rho), & T &= \rho \tilde{T} + o(\rho), & N &= \rho \tilde{N} + o(\rho), & t &= \rho \tilde{t} + \hat{t}, \\ s &= \rho \tilde{s} + \hat{s}, & x &= \rho \tilde{x} + \hat{x}, & y &= \rho \tilde{y} + \hat{y}, \end{aligned}$$

где вспомогательный параметр ρ стремится к ∞ . Тогда существует предельный точечный процесс на $\mathbb{Z}^2$. Он является детерминантным и имеет трансляционно-инвариантное корреляционное ядро

$$K(\hat{x}, \hat{s}; \hat{y}, \hat{t}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} (1 + cw)^{\hat{t}-\hat{s}} w^{\hat{x}-\hat{y}-1} dw.$$

Здесь интегрирование ведется по правой стороне единичной окружности при $\hat{s} \geq \hat{t}$ и по левой в противном случае. Параметр c имеет вид

$$c = \sqrt{\frac{\tilde{x}(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})}{(\tilde{T} - \tilde{t} - \tilde{S} + \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})}},$$

а угол ϕ вычисляется по формуле

$$\phi = \arccos \frac{-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}) + (-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x}) + \tilde{x}(\tilde{T} + \tilde{x} - \tilde{S} - \tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{x}(-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t})}}.$$

Если выражение под знаком арккосинуса больше 1, то полагаем $\phi = 0$, а если меньше -1 , то $\phi = \pi$.

Существование процесса, задаваемого предельными корреляционными функциями, легко следует из сходимости этих функций. Доказательство этого простого факта можно найти, например, в [2, лемма 4.1].

Доказательство сходимости корреляционных ядер проведем в два этапа.

3.2. Статический случай. Пусть сначала $\hat{s} - \hat{t} = 0$, т.е. мы изучаем лишь «статическое» распределение в некоторый фиксированный момент времени.

Воспользуемся методом, предложенным А. М. Бородиным и Г. И. Олшанским в статье [5].

Продолжим функции $f_i^t(x)$, принадлежащие пространству $l_2(\mathfrak{X}_t)$, до функций на $\mathbb{Z}$, доопределив их нулями. Теперь мы можем считать, что все рассматриваемые функции f_i^t принадлежат одному и тому же пространству $l_2(\mathbb{Z})$.

Имеем

$$K_t(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i^t(x) f_i^t(y).$$

Заметим, что $K_t(x, y)$ является матричным элементом для оператора проектирования на линейную оболочку первых N ортогональных функций f_i^t , $i = 0, \dots, N-1$, в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$.

Оказывается, что проще искать не предел матричных элементов, а предел всего оператора. Для этого обратим внимание на то, что функции $f_n^t(x)$, получаемые из ортогональных многочленов Хана, являются собственными векторами некоторого разностного оператора (он явно указан ниже). Оператор проектирования можно представить как спектральный проектор на интервал, содержащий первые N собственных значений этого разностного оператора. Теперь для нахождения предела спектральных проекторов перейдем к пределу в самих разностных операторах. Обратим внимание на то, что одновременно меняется и спектральный интервал, и разностный оператор. Для обоснования корректности предельного перехода воспользуемся несколькими теоремами из функционального анализа.

Возьмем за общую область существенной самосопряженности всех рассматриваемых разностных операторов множество $l_2^0(\mathbb{Z})$ финитных векторов из $l_2(\mathbb{Z})$, т.е. конечных линейных комбинаций базисных векторов. Как будет видно из дальнейшего, рассматриваемые разностные операторы сильно сходятся на этой области. По теореме VIII.25 из [20] из этого следует сходимости в сильном резольвентном смысле. А из этой последней, непрерывности спектра предельного оператора и теоремы VIII.24 из [20] можно заключить, что рассматриваемые спектральные проекторы, ассоциированные с разностными операторами, сильно сходятся на множестве финитных векторов к предельному спектральному проектору, ассоциированному с предельным разностным оператором.

Проведем теперь само вычисление.

Для многочленов Хана имеет место следующее разностное соотношение (см. [15]):

$$\begin{aligned} k(k + \alpha + \beta + 1)Q_k(x'; \alpha, \beta, M) &= (x' + \alpha + 1)(M - x)Q_k(x' - 1; \alpha, \beta, M) \\ &+ ((x' + \alpha + 1)(M - x) + x'(x' - \beta - M - 1))Q_k(x'; \alpha, \beta, M) \\ &+ x'(x' - \beta - M - 1)Q_k(x' + 1; \alpha, \beta, M). \end{aligned}$$

Перепишем это соотношение в терминах ортонормированных функций $f_k^t(x')$; подчеркнем, что здесь используется переменная x' , а не x (как было показано в разд. 2.1, в случаях (I), (II) $x = x'$, а в (III) и (IV) $x \neq x'$):

$$\begin{aligned} \frac{k(k + \alpha + \beta + 1)}{\rho^2} f_k^t(x') &= \frac{\sqrt{(x' + 1)(M - x')(\beta + M - x')(\alpha + x')}}{\rho^2} f_k^t(x' + 1) \\ &- \frac{(x' + \alpha + 1)(x' - M) + x'(x' - \beta - M - 1)}{\rho^2} f_k^t(x') \\ &+ \frac{\sqrt{x'(M - x' + 1)(\beta + M - x')(\alpha + x')}}{\rho^2} f_k^t(x' - 1). \end{aligned}$$

Мы поделили соотношения на ρ^2 для того, чтобы пределы, изучаемые в дальнейшем, существовали.

Пусть теперь H — разностный оператор, задаваемый правой частью последнего соотношения при тех x , при которых определены многочлены Хана, и, например, тождественный оператор при остальных x . Матрица оператора H имеет вид

$$H(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(x' + 1)(M - x')(\beta + M - x')(\alpha + x')}/\rho^2, & x, y \in \mathfrak{X}_t, y = x + 1, \\ ((x' + \alpha + 1)(x' - M) + x'(x' - \beta - M - 1))/\rho^2, & x, y \in \mathfrak{X}_t, y = x, \\ \sqrt{x'(M - x' + 1)(\beta + M - x')(\alpha + x')}/\rho^2, & x, y \in \mathfrak{X}_t, y = x - 1, \\ \delta_x^y & \text{для остальных } x, y. \end{cases}$$

Ясно, что H — самосопряженный оператор.

Нас интересует проектор на собственные векторы, отвечающие части спектра оператора при $k \in \{0, \dots, N - 1\}$, т. е. собственным значениям

$$k(k + \alpha + \beta + 1)/\rho^2, \quad k \in \{0, \dots, N - 1\}.$$

Заметим, что полный спектр оператора H состоит из отрицательных значений, получаемых по последней формуле при k , пробегающем все значения от 0 до M , и единицы, возникающей из-за формального продолжения оператора. В нашей модели α и β — достаточно большие по модулю отрицательные числа и функция $k(k + \alpha + \beta + 1)$ отрицательна и монотонна при допустимых значениях k . Следовательно, мы можем заменить проектор на собственные пространства, связанные с дискретным набором точек спектра, проектором, ассоциированным с содержащим их интервалом, т. е. искомый проектор P — спектральный проектор, отвечающий отрезку

$$[(N - 1)(N + \alpha + \beta)/\rho^2, 0].$$

Подставим значения α , β и прочих параметров и выразим оператор H и проектор P через ρ и параметры $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$:

$$S = \rho\tilde{S} + o(\rho), \quad T = \rho\tilde{T} + o(\rho), \quad N = \rho\tilde{N} + o(\rho), \quad t = \rho\tilde{t} + \hat{t}, \quad x = \rho\tilde{x} + \hat{x}.$$

Получим семейство операторов P_ρ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, где аргументом является $\hat{x}$. Необходимо найти

$$\hat{P} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_\rho.$$

Для применения теоремы VII.24 из [20] необходимо, чтобы семейство разностных операторов H_ρ , полученных подстановкой параметров предельного режима, сходилось к предельному $\hat{H}$ в смысле сильной операторной сходимости на множестве всех финитных векторов, а такая сходимость будет следовать из сходимости матричных элементов, так как в нашем случае все операторы H_ρ задаются трехдиагональными матрицами.

Переходя к пределу в матричных элементах, получаем, что $\hat{H}$ — симметрический оператор с трехдиагональной матрицей, у которой на главной диагонали стоит число

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(- \frac{(x' + \alpha + 1)(x' - M) + x'(x' - \beta - M - 1)}{\rho^2} \right) \\ &= -(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x}) - \tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t}), \end{aligned}$$

а над и под главной диагональю стоит число

$$\begin{aligned} B &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(x' + 1)(M - x')(\beta + M - x')(\alpha + x')}}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(x')(M - x' + 1)(\beta + M - x')(\alpha + x')}}{\rho^2} \\ &= \sqrt{(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})\tilde{x}(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t})}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что, хотя параметры α , β , M и x' выражались по-разному через основные характеристики модели (у нас было 4 случая), в этом месте различия исчезают и разностный оператор во всех случаях одинаков.

Предельный спектральный интервал также легко считается:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{(N - 1)(N + \alpha + \beta)}{\rho^2}, 0 \right] = [-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}), 0].$$

Обозначим через $I_{[a,b]}$ индикатор отрезка $[a, b]$.

Заметим, что справедливо тождество

$$\hat{P} = I_{[-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}), 0]}(\hat{H}) = I_{[\frac{-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}) - A}{2B}, -\frac{A}{2B}]} \left(\frac{\hat{H} - A}{2B} \right).$$

$(\hat{H} - A)/(2B)$ является оператором, в матрице которого над и под главной диагональю стоит $1/2$, а в остальных местах — нуль.

Для того чтобы явно вычислить $\hat{P}$, сделаем преобразование Фурье $l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow L_2(S^1)$, где S^1 — единичная окружность в $\mathbb{C}$.

Фурье-образ оператора $(\hat{H} - A)/(2B)$ есть оператор умножения на $(z + \bar{z})/2 = \operatorname{Re} z$. Заметим, что его спектр непрерывен и заполняет отрезок $[-1, 1]$. Отсюда можно заключить, что и спектр оператора $\hat{H}$ непрерывен (это условие нам необходимо для применения теоремы VII.24 из [20]).

Далее, при подстановке A и B координата левого конца спектрального отрезка превращается в

$$\frac{-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}) + (-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x}) + \tilde{X}(\tilde{T} + \tilde{x} - \tilde{S} - \tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{x}(-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t})}},$$

а координата правого конца — в

$$\frac{(-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x}) + \tilde{x}(\tilde{T} + \tilde{x} - \tilde{S} - \tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{x}(-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t})}}.$$

Заметим, что последнее выражение больше единицы. Следовательно, фурье-образ спектрального проектора $\hat{P}$ сводится к оператору умножения на индикатор правой дуги единичной окружности, заключенной между углами $-\phi$ и ϕ , где

$$\phi = \arccos \frac{-\tilde{N}(\tilde{N} + \tilde{T}) + (-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x}) + \tilde{x}(\tilde{T} + \tilde{x} - \tilde{S} - \tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{x}(-\tilde{x} + \tilde{S} + \tilde{N})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{x} + \tilde{T} - \tilde{S} - \tilde{t})}}.$$

Сделав обратное преобразование Фурье, находим матрицу оператора $\hat{P}$, совпадающую с искомым корреляционным ядром

$$K(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} w^{\hat{y}-\hat{x}-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} w^{\hat{x}-\hat{y}-1} dw$$

(интегрирование происходит по правой дуге единичной окружности).

Последний интеграл явно считается и совпадает с дискретным синус-ядром:

$$K(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\sin(\phi(x-y))}{\pi(x-y)}.$$

Заметим, что таким же методом мы могли бы найти предел ядра

$$\check{K}_t(x, y) = - \sum_{i \geq N} f_i^t(x) f_i^t(y).$$

Этот предел равняется

$$\check{K}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} w^{\hat{x}-\hat{y}-1} dw,$$

где интегрирование производится по левой дуге единичной окружности. В реализации в $L_2(S^1)$ мы получаем оператор умножения на индикатор левой дуги окружности.

3.3. Переход к динамическому ядру. Пусть теперь $s < t$. Имеем

$$K(x, s; y, t) = - \sum_{i \geq N} \left(\prod_{j=s}^{t-1} c_i^j \right) f_i^s(x) f_i^t(y).$$

Зафиксируем s и t , и пусть $\mathcal{Q}$ — оператор в $l_2(\mathbb{Z})$ с матрицей

$$\mathcal{Q}(x, y) = \begin{cases} K(x, s; y, t), & x \in \mathfrak{X}_s, y \in \mathfrak{X}_t, \\ 0 & \text{для остальных } x, y. \end{cases}$$

Этот оператор можно представить в виде

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_t U_{t-1} U_{t-2} \cdots U_s.$$

Здесь $\mathcal{P}_t$ — оператор, отвечающий рассмотренному в конце предыдущего раздела ядру $\check{K}_t(x, y)$, т.е. оператор с матрицей

$$\mathcal{P}_t(x, y) = \begin{cases} - \sum_{i \geq N} f_i^t(x) f_i^t(y), & x, y \in \mathfrak{X}_t, \\ 0 & \text{для остальных } x, y, \end{cases}$$

а U_h — оператор, отображающий каждую функцию $f_i^h(x)$ в $c_i^h f_i^{h+1}(x)$ (если в момент времени $h+1$ многочленов на 1 меньше, то функция, отвечающая многочлену старшей степени, переходит в нуль; это согласовано с тем, что соответствующий коэффициент c_i^h обращается в нуль). На ортогональном дополнении к линейной оболочке функций f_i^h положим U_h тождественно равным нулю.

В матричном виде этот оператор представляется так:

$$U_h(x, y) = \begin{cases} \sum_{i \geq 0} c_i^h f_i^h(x) f_i^{h+1}(y), & x \in \mathfrak{X}_h, y \in \mathfrak{X}_{h+1}, \\ 0 & \text{для остальных } x, y. \end{cases}$$

Выразив, как и в случае статического ядра, все параметры через характеристики предельного режима, получим семейство операторов, зависящее от параметра ρ . Теперь для нахождения предела $\mathcal{Q}_\rho$ при $\rho \rightarrow \infty$ перейдем к пределу отдельно в каждом из сомножителей и воспользуемся следующим соображением: все сомножители сильно сходятся на всюду плотном множестве финитных векторов, норма каждого из сомножителей не больше единицы (для операторов U_h это следует из того, что $0 \leq c_i^j \leq 1$); следовательно, эти сомножители сильно сходятся на всем пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. Операция умножения операторов непрерывна по совокупности переменных в сильной операторной топологии при условии равномерной ограниченности норм всех сомножителей. Это позволяет нам сделать заключение о сильной сходимости и для операторов $\mathcal{Q}_\rho$.

Заметим, что матрица U_h нами уже была фактически вычислена при доказательстве детерминантности процесса:

$$\begin{aligned} U_h(x, y) &= v_{h, h+1}(x, y) \\ &= \sqrt{\frac{w_h(x)}{w_{h+1}(y)}} \left[\frac{S + N - 1 - x}{\sqrt{(h + N)(T + N - h - 1)}} \delta_{x+1}^y + \frac{T - h - S + x}{\sqrt{(h + N)(T + N - h - 1)}} \delta_x^y \right] \\ &= \delta_{x+1}^y \sqrt{\frac{(S + N - x - 1)(x + 1)}{(h + N)(T + N - h - 1)}} + \delta_x^y \sqrt{\frac{(T - h - S + x)(h + N - x)}{(h + N)(T + N - h - 1)}} \\ &\quad (x \in \mathfrak{X}_h, y \in \mathfrak{X}_{h+1}). \end{aligned}$$

Подставим сюда параметры нашего предельного перехода

$$\begin{aligned} S &= \rho \tilde{S} + o(\rho), & T &= \rho \tilde{T} + o(\rho), & N &= \rho \tilde{N} + o(\rho), \\ t &= \rho \tilde{t} + \hat{t}, & t &= \rho \tilde{t} + \hat{s}, & x &= \rho \tilde{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

и получим оператор $U_{h, \rho}$. Учитывая, что $s \leq h < t$, устремляем ρ к бесконечности. Получаем оператор с матрицей

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}) = \delta_{\hat{x}+1}^{\hat{y}} \sqrt{\frac{(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})(\tilde{x})}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}} + \delta_{\hat{x}}^{\hat{y}} \sqrt{\frac{(\tilde{T} - \tilde{t} - \tilde{S} + \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}}.$$

Сделаем преобразование Фурье и перемножим все операторы, в произведение которых распался предельный оператор $\hat{\mathcal{Q}}$. Получим оператор умножения на произведение функции

$$\left(\sqrt{\frac{(\tilde{T} - \tilde{t} - \tilde{S} + \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}} + \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})\tilde{x}}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}} \right)^{\hat{t} - \hat{s}}$$

и индикатора левой дуги окружности, заключенной между углами ϕ и $2\pi - \phi$.

Сделав обратное преобразование Фурье, получаем искомое корреляционное ядро:

$$\begin{aligned}
 & K(\hat{x}, \hat{s}; \hat{y}, \hat{t}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} \left(\sqrt{\frac{(\tilde{T}-\tilde{t}-\tilde{S}+\tilde{x})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})}{(\tilde{t}+\tilde{N})(\tilde{T}+\tilde{N}-\tilde{t})}} + \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(\tilde{S}+\tilde{N}-\tilde{x})\tilde{x}}{(\tilde{t}+\tilde{N})(\tilde{T}+\tilde{N}-\tilde{t})}} \right)^{\hat{t}-\hat{s}} z^{\hat{y}-\hat{x}-1} dz \\
 &\stackrel{w=1/z}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} \left(\sqrt{\frac{(\tilde{T}-\tilde{t}-\tilde{S}+\tilde{x})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})}{(\tilde{t}+\tilde{N})(\tilde{T}+\tilde{N}-\tilde{t})}} + w \sqrt{\frac{(\tilde{S}+\tilde{N}-\tilde{x})\tilde{x}}{(\tilde{t}+\tilde{N})(\tilde{T}+\tilde{N}-\tilde{t})}} \right)^{\hat{t}-\hat{s}} w^{\hat{x}-\hat{y}-1} dw \\
 &= \left(\sqrt{\frac{(\tilde{T}\tilde{t}-\tilde{S}+\tilde{x})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})}{(\tilde{t}+\tilde{N})(\tilde{T}+\tilde{N}-\tilde{t})}} \right)^{\hat{t}-\hat{s}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{e^{-i\phi}}^{e^{i\phi}} (1+cw)w^{\hat{x}-\hat{y}-1} dw.
 \end{aligned}$$

Множитель перед интегралом можно опустить, так как он соответствует лишь сопряжению ядра, не меняющему корреляционных функций. В результате мы получили выражение из формулировки теоремы.

В случае $s > t$ рассуждения аналогичны, приведем их в сокращенном виде. Рассматриваем оператор $\mathcal{G}$ с матрицей

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} K(x, s; y, t), & x \in \mathfrak{X}_s, y \in \mathfrak{X}_t, \\ 0 & \text{для остальных } x, y. \end{cases}$$

Его можно представить в виде

$$\mathcal{G} = V_{s-1} \cdots V_{t+1} V_t \mathcal{R}.$$

Здесь V_h есть оператор, заданный на первых N функциях f_i^h формулой $V_h(f_i^h) = f_i^{h+1}/c_i^h$. Как и раньше, мы затем продолжаем его на все пространство. Оператор $\mathcal{R}$ есть ортопроектор на первые N функций f_i^t .

Выражая операторы через параметры предельного режима, получаем семейства операторов $\mathcal{G}_\rho$, $V_{h,\rho}$ и $\mathcal{R}_\rho$.

Из определения чисел c_i^h мы снова можем заключить, что нормы операторов $V_{h,\rho}$ и $\mathcal{R}_\rho$ ограничены.

$\widehat{\mathcal{R}}$ — предел операторов $\mathcal{R}_\rho$ при $\rho \rightarrow \infty$ — нами уже подсчитан в предыдущем разделе. Он равен оператору ограничения на правую дугу окружности, заключенную между углами $-\phi$ и ϕ .

Теперь остается воспользоваться следующей леммой:

Лемма 9. Пусть имеется два семейства операторов A_ρ , B_ρ в гильбертовом пространстве. Пусть при $\rho \rightarrow \infty$ нормы всех операторов ограничены некоторой константой, $A_\rho \rightarrow A$ и $B_\rho A_\rho \rightarrow P$ в смысле сильной операторной сходимости, P — некоторый ортопроектор, E — его образ. Предполагается, что подпространство E является инвариантным относительно оператора A и ограничение последнего на это подпространство, A_E , обратимо на E . Тогда на подпространстве E операторы B_ρ сильно сходятся к A_E^{-1} .

Доказательство. Пусть x — произвольный вектор, лежащий в образе оператора P . Из условия следует, что найдется такой y , что $x = Ay$. Тогда

$$B_\rho A_\rho y \rightarrow y, \quad A_\rho y \rightarrow x, \\ B_\rho x = B_\rho(A_\rho y + (x - A_\rho y)) = B_\rho A_\rho y + B_\rho(x - A_\rho y) \rightarrow y + 0 = y. \quad \square$$

Применим доказанную лемму к $A_\rho = U_{h+1,\rho}$ и $B_\rho = V_{h,\rho}$. Произведение $B_\rho A_\rho$ совпадает с оператором, матрица которого задается ядром, рассмотренным в статическом случае, а потому сходится к проектору $\hat{\mathcal{R}}$, а операторы A_ρ , как было показано выше, сходятся к оператору $\hat{U}$, который в реализации в $L_2(S^1)$ является оператором умножения на функцию

$$\sqrt{\frac{(\tilde{T} - \tilde{t} - \tilde{S} + \tilde{x})(\tilde{t} + \tilde{N} - \tilde{x})}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}} + \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(\tilde{S} + \tilde{N} - \tilde{x})\tilde{x}}{(\tilde{t} + \tilde{N})(\tilde{T} + \tilde{N} - \tilde{t})}}.$$

Эта функция при ограничении на единичную окружность гарантированно отлична от нуля и обратима при $z \neq -1$, но при некоторых значениях параметров предельного режима обращается в нуль при $z = -1$. Однако предельный проектор $\hat{\mathcal{R}}$ является оператором умножения на индикатор некоторой дуги, не содержащей точки $z = -1$. Следовательно, при ограничении на образ проектора $\hat{\mathcal{R}}$ оператор $\hat{U}$ обратим, и мы можем воспользоваться леммой.

Получаем, что (в реализации в пространстве $L_2(S^1)$) предел операторов $\mathcal{G}_\rho$ умножает векторы из образа предельного проектора $\hat{\mathcal{R}}$ на некоторую функцию. Эта функция является обратной к той, на которую умножает оператор $\hat{U}$. С другой стороны, на векторах из ортогонального дополнения к образу проектора $\mathcal{R}_\rho \rightarrow 0$, а следовательно, так как нормы операторов $V_{h,\rho}$ ограничены, и $\mathcal{G}_\rho \rightarrow 0$.

Дальнейшие рассуждения дословно повторяют случай $s < t$. Теорема полностью доказана.

§4. Анализ полученных результатов

4.1. Замороженные области. Рассмотрим подробнее полученную одномерную корреляционную функцию, называемую также функцией плотности.

Уже было отмечено, что все точки, через которые могут проходить наборы непересекающихся путей, образуют шестиугольник, у которого одна пара сторон параллельна одной оси, вторая — другой, а третья пара наклонена под углом 45° .

В работе [8] рассматривались замощения шестиугольника ромбами, которые также могут быть интерпретированы в терминах непересекающихся путей. Было доказано существование «замороженных областей» (arctic region), в которых предельное замощение перестает быть случайным и состоит из ромбов одного типа (точную формулировку см. в теореме 1.1 в [8]). Ниже вкратце объясняется, что наши результаты согласованы с этой теоремой, и форму замороженной области можно определить с помощью нашего динамического корреляционного ядра как область значений параметров предельного режима, при которых локальные флуктуации исчезают и предельный точечный процесс становится тривиальным (либо с вероятностью 1 все точки решетки принадлежат случайной

конфигурации, либо, напротив, с вероятностью 1 ни одна точка не принадлежит случайной конфигурации).

Зафиксируем в нашей модели параметры шестиугольника $\tilde{N}$, $\tilde{T}$, $\tilde{S}$ и изучим зависимость функции плотности от точки $(\tilde{t}, \tilde{x})$.

Предложение 10. *Распределение конфигураций в нашей модели нетривиально только внутри эллипса, касающегося сторон шестиугольника, задаваемого параметрами $\tilde{N}$, $\tilde{T}$, $\tilde{S}$, а вне него функция плотности равна либо 1, либо 0.*

Доказательство. Подсчитаем $K(\hat{x}, \hat{t}; \hat{x}, \hat{t})$ — плотность распределения точек, через которые проходят пути. Имеем

$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\phi}^{\phi} \frac{dw}{w} = \frac{\phi}{\pi}.$$

При некоторых значениях параметров $\phi = 0$ или $\phi = \pi$; это и означает, что плотность равняется нулю или единице соответственно. В наших терминах это эквивалентно тому, что в определяющем угол ϕ соотношении $\phi = \arccos D$ параметр D по модулю не меньше единицы. Это можно записать в виде $D^2 \geq 1$. После раскрытия скобок и упрощений последнее неравенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \tilde{T}^2 \tilde{x}^2 + (\tilde{S} + \tilde{N})^2 \tilde{t}^2 + 2\tilde{x}\tilde{t}(\tilde{N}\tilde{T} - \tilde{S}\tilde{T} - 2\tilde{S}\tilde{N}) \\ + 2\tilde{t}(\tilde{S}\tilde{N}^2 - \tilde{N}\tilde{T}\tilde{S} - \tilde{N}^2\tilde{T} + \tilde{S}^2\tilde{N}) + 2\tilde{x}(\tilde{N}\tilde{T}\tilde{S} - \tilde{N}\tilde{T}^2) + \tilde{N}^2(\tilde{T} - \tilde{S})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство задает внутренность некоторого эллипса, и легко убедиться, что последний касается границ изучаемого шестиугольника, задаваемого параметрами $\tilde{N}$, $\tilde{T}$, $\tilde{S}$.

В работе [8] замороженная область оказывалась точно такой же — внешнестью эллипса, касающегося сторон шестиугольника. $\square$

4.2. Связь с моделью Окунькова–Решетихина. Установим связь полученного нами предельного динамического корреляционного ядра с ядром, полученным в работе [19]. Для изучаемого там точечного процесса ядро оказывалось равным

$$K_{\text{OR}}(x, s; y, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{z}}^z (1-w)^{t-s} w^{x-y+(s-t)/2-1} dw,$$

где z — некоторое комплексное число, по модулю меньшее 1, с положительной вещественной частью, зависящее от параметров модели, а интегрирование производится по правой дуге окружности при $t \geq s$ и по левой в противном случае.

Предложение 11. *Можно выбрать линейное преобразование решетки $\mathbb{Z}^2$ так, что процессы, задаваемые полученным нами корреляционным ядром и ядром из [19], связаны инволюцией частицы-дырки, т. е. случайные конфигурации, описываемые одним ядром, являются дополнительными к случайным конфигурациям, описываемым вторым.*

Доказательство. Заметим, что в изучаемой нами модели подбором пяти параметров можно добиться произвольных значений параметров ядра s , ϕ , $0 < s \leq 1$ и $0 \leq \phi \leq \pi$.

Перейдем к модели из [19]. В интеграле, выражающем корреляционное ядро, можно сделать замену переменных, сводящую контур интегрирования к дуге единичной окружности (сразу можно заметить, что возникающий внеинтегральный множитель можно опустить, так как он задает некоторое сопряжение ядра, которое не меняет корреляционных функций). Кроме того, сделаем линейное преобразование решетки

$$s' - t' = s - t, \quad x' - y' = x - y + (s - t)/2.$$

На самом деле именно при этом преобразовании решетка, рассматриваемая Окуньковым и Решетихиным, переходит в $\mathbb{Z}^2$. В результате ядро приходит к виду

$$K(x', s'; y', t') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\phi}^{\phi} (1 - cw)^{t' - s'} w^{x' - y' - 1} dw$$

(интеграл берется по единичной окружности, выбор дуги интегрирования осуществляется по тем же правилам, что и раньше, $0 < c \leq 1$). При $s \neq t$ сделаем в полученном интеграле замену переменных $z = -w$:

$$K = \frac{(-1) \cdot (-1)^{x-y}}{2\pi i} \oint_{-\phi}^{\phi} (1 + cz)^{t' - s'} z^{x' - y' - 1} dz.$$

Здесь интегрирование уже происходит по правой стороне окружности при $t < s$ и по левой в противном случае. Множитель $(-1)^{x-y}$ снова можно опустить. Это ядро отличается от ядра из нашей модели лишь знаком при $s \neq t$, а при $s = t$ — только дугой интегрирования. Для получения нужной нам дуги интегрирования остается вычесть интеграл из вычета подынтегральной функции в точке 0, т.е. из 1 при $x = y$ и из 0 при $x \neq y$. Таким образом, ядра двух полученных процессов связаны соотношением $K_1 = \delta_{x=y, s=t} - K_2$. Но именно так ядро преобразуется при инволюции частицы-дырки (например, это доказано в приложении А.3 в [3]).

Заметим, что если в рассматриваемой нами модели оказалось, что в интеграле $c > 1$, то можно сделать замену переменных $w = 1/z$; при этом константа c заменяется на $1/c$, но еще меняется показатель степени при z , а именно $x - y - 1$ заменяется на $x - y + (s - t) - 1$. Однако такое преобразование есть всего лишь еще одна линейная замена координат на решетке; следовательно, и в этом случае предложение доказано. $\square$

Полученный результат можно было предвидеть, исходя из родственности моделей, — в [19] рассматривался ансамбль трехмерных диаграмм Юнга без ограничений на размер, а в одной из интерпретаций нашей модели появляются трехмерные диаграммы Юнга, но с некоторыми ограничениями, — а также из гипотетической универсальности полученного ядра, заявленной в [19]. Одним из подтверждений универсальности являлось получение такого же ядра в [2] в «bulk scaling limit» цилиндрических разбиений. Наш результат можно рассматривать как еще одно подтверждение гипотезы универсальности.

§5. Приложение. Различные интерпретации рассмотренной модели

У изученной нами модели имеется множество различных комбинаторных интерпретаций. Покажем, как они получаются.

Рассмотрим набор путей, изучаемый на протяжении всей работы.

Рис. 2. Набор из 3 непересекающихся путей

Наклоняя под углом в 30° вверх звенья ломаных, идущие под углом 45° , и заменяя горизонтальные наклоненными на 30° вниз, мы получаем следующую картинку, которую можно интерпретировать как набор путей на поверхности трехмерной диаграммы Юнга:

Рис. 3. Непересекающиеся пути на трехмерной диаграмме Юнга

Последнее изображение можно рассматривать и как разбиение шестиугольника на ромбики трех разных типов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, P. D. Miller, *Discrete Orthogonal Polynomials: Asymptotics and Applications*, Annals of Math. Studies, vol. 164, Princeton University Press, 2007; <http://arxiv.org/abs/math/0310278>.
- [2] A. Borodin, *Periodic Schur process and cylindric partitions*, Duke Math. J., **140**:3 (2007), 391–468; <http://arxiv.org/abs/math/0601019>.
- [3] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, J. Amer. Math. Soc., **13**:3 (2000), 481–515; <http://arxiv.org/abs/math/9905032>.
- [4] A. Borodin, G. Olshanski, *Markov processes on partitions*, Probab. Theory Related Fields, **135**:1 (2006), 84–152; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0409075>.
- [5] A. Borodin, G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel-type random partitions*, J. Algebra, **313**:1 (2007), 40–60; <http://arxiv.org/abs/math/0610240>.
- [6] Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Физматлит, М., 1973.
- [7] H. Cohn, R. Kenyon, J. Propp, *A variational principle for domino tilings*, J. Amer. Math. Soc., **14**:2 (2001), 297–346; <http://arxiv.org/abs/math/0008220>.
- [8] H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition*, New York J. Math. (electronic), **4** (1998), 137–165; <http://arxiv.org/abs/math/9801059>.
- [9] B. Eynard, M. L. Mehta, *Matrices coupled in a chain. I. Eigenvalue correlations*, J. Phys. A: Math. Gen., **31**:19 (1998), 4449–4456.

- [10] I. Gessel, G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. Math., **58**:3 (1985), 300–321.
- [11] K. Johansson, *Non-intersecting, simple, symmetric random walks and the extended Hahn kernel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **55**:6 (2005), 2129–2145; <http://arxiv.org/abs/math.PR/0409013>.
- [12] K. Johansson, E. Nordenstam, *Eigenvalues of GUE minors*, Electron. J. Probab., **11** (2006), no. 50, 1342–1371; <http://arxiv.org/abs/math/0606760>.
- [13] R. Kenyon, *Height fluctuations in the honeycomb dimer model*; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0405052>.
- [14] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and Amoebae*, Ann. of Math., **163**:3 (2006), 1019–1056; <http://arxiv.org/abs/math-ph/0311005>.
- [15] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue*, <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/reports.html>.
- [16] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sémin. Lothar. Combin. (electronic), **42** (“The Andrews Festschrift”) (1999), Article B42q.
- [17] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd ed., Academic Press, Boston, MA, 1991.
- [18] A. Okounkov, *Symmetric functions and random partitions. Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives*, in: NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 74, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, 223–252; <http://arxiv.org/abs/math.CO/0309074>.
- [19] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation functions of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*, J. Amer. Math. Soc., **16**:3 (2003), 581–603; <http://arxiv.org/abs/math.CO/0107056>.
- [20] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. 1, Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [21] S. Sheffield, *Random Surfaces*, Asterisque, no. 304, 2005; <http://arxiv.org/abs/math/0304049>.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: vadicgor@rol.ru

Поступило в редакцию
12 марта 2007 г.