Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими граничными условиями, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 45–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:58:05

О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими граничными условиями

© 2008. М. М. МАЛАМУД

Светлой памяти Марка Григорьевича Крейна посвящается

§ 1. Введение

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(\cdot) \in L^1[0, 1], \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (1.2)$$

Здесь q — комплекснозначный потенциал, $a_{ik} \in \mathbb{C}$, а граничные формы U_1 и U_2 линейно независимы, т. е. матрица $A := (a_{ij})$ имеет ранг 2.

Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (1.1), выделяемую начальными условиями

$$c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0. \quad (1.3)$$

Собственные значения задачи (1.1)–(1.2) являются корнями характеристического определителя $\Delta(\lambda) = \det U(\lambda)$, где

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11}(\lambda) & u_{12}(\lambda) \\ u_{21}(\lambda) & u_{22}(\lambda) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} U_1(c(x, \lambda)) & U_1(s(x, \lambda)) \\ U_2(c(x, \lambda)) & U_2(s(x, \lambda)) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Раскрывая определитель $\Delta(\lambda)$, находим

$$\Delta(\lambda) = \mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34} + \mathcal{J}_{13}s(1, \lambda) + \mathcal{J}_{14}s'(1, \lambda) + \mathcal{J}_{32}c(1, \lambda) + \mathcal{J}_{42}c'(1, \lambda), \quad (1.5)$$

где $\mathcal{J}_{kp} = \det \begin{pmatrix} a_{1k} & a_{1p} \\ a_{2k} & a_{2p} \end{pmatrix}$ — определитель матрицы из элементов k -го и p -го столбцов матрицы A . При $q = 0$ определитель $\Delta_0(\lambda)$ задачи (1.1)–(1.2) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = (\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34}) + \mathcal{J}_{13} \sin \sqrt{\lambda} / \sqrt{\lambda} + (\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \mathcal{J}_{42} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}. \quad (1.6)$$

Определение 1. (i) Краевую задачу (1.1)–(1.2) будем называть *невыврожденной*, если $\Delta(\lambda) \neq \text{const}$, т. е. $|\mathcal{J}_{13}| + |\mathcal{J}_{14}| + |\mathcal{J}_{32}| + |\mathcal{J}_{42}| \neq 0$.

(ii) Краевые условия (1.2) называют *невыврожденными*, если $\Delta_0(\lambda) \neq \text{const}$, т. е. $|\mathcal{J}_{13}| + |\mathcal{J}_{42}| + |\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32}| \neq 0$.

Подчеркнем, что *невыврожденность* краевых условий (1.2) не зависит от q и влечет за собой *невыврожденность* краевой задачи (1.1)–(1.2) при любом $q \in L^1[0, 1]$. Обратное неверно.

Полнота системы собственных и присоединенных функций (СПФ) задачи (1.1)–(1.2) в случае регулярных (в смысле Биркгофа) краевых условий хорошо известна (см. [8]). Наиболее полный результат о полноте системы СПФ задачи (1.1)–(1.2) получен в [6, теорема 1.3.1].

Теорема 2 [6]. Пусть $q(\cdot) \in L^1[0, 1]$ и краевые условия (1.2) невырождены. Тогда система СПФ задачи (1.1)–(1.2) полна в $L^p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$.

Отметим, что класс невырожденных краевых условий шире класса регулярных условий (см. замечание 8).

При $q = 0$ невырожденность краевых условий (1.2) необходима для полноты системы СПФ. При $q \neq 0$ это уже не так даже в случае $q = \bar{q}$.

В работе изучаются невырожденные краевые задачи (1.1)–(1.2) в случае вырожденных краевых условий (1.2), т.е. в случае $\Delta_0(\lambda) = \text{const}$. В этом случае матрица коэффициентов A краевых условий (1.2) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha\alpha_1 & \alpha\alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & -\alpha\beta_1 & \alpha\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{12} = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (1.7)$$

Следующая теорема — основной результат работы.

Теорема 3. Пусть краевая задача (1.1)–(1.2) невырождена и $p \in [1, \infty)$. Если $q(\cdot) \in C^k[0, 1]$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$q^{(k)}(0) \neq (-1)^k q^{(k)}(1), \quad (1.8)$$

то система СПФ задачи (1.1)–(1.2) полна и минимальна в $L^p[0, 1]$.

Следствие 4. Пусть краевая задача (1.1)–(1.2) невырождена и $q(\cdot) \in C[0, 1]$. Если $q(0) \neq q(1)$, то система СПФ задачи (1.1)–(1.2) полна и минимальна в $L^p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$.

§2. Вспомогательные утверждения

2.1. Операторы преобразования. Напомним, следуя [3], [6], некоторые факты, касающиеся операторов преобразования, которые существенны в дальнейшем.

Предложение 5 ([3], [6]). Решение $e(x, \lambda) = e(x, \mu^2)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $e(0, \mu) = 1$, $e'(0, \mu) = i\mu$, представимо в виде

$$e(x, \mu^2) = e^{i\mu x} + \int_{-x}^x K(x, t) e^{i\mu t} dt, \quad (2.1)$$

где $K(\cdot, \cdot) \in C(\Omega)$ и $\Omega = \{(x, t) : 0 \leq |t| \leq |x| \leq 1\}$. Более того, $K(\cdot, \cdot)$ является (единственным) решением интегрального уравнения

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(s) ds + \int_0^{\frac{x+t}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\alpha + \beta) K(\alpha + \beta, \alpha - \beta) d\beta. \quad (2.2)$$

При этом если $q(\cdot) \in C^n[0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $K(\cdot, \cdot) \in C^{n+1}(\Omega)$.

Из равенства (2.1) вытекают следующие представления для решений $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ при помощи «треугольных» операторов преобразования:

$$\begin{aligned} c(x, \mu^2) &= \cos \mu x + \int_0^x K(x, t; 0) \cos \mu t \, dt, \\ s(x, \mu^2) &= \frac{\sin \mu x}{\mu} + \int_0^x K(x, t; \infty) \frac{\sin \mu t}{\mu} \, dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $K(x, t, 0) := K(x, t) + K(x, -t)$ и $K(x, t; \infty) := K(x, t) - K(x, -t)$.

2.2. Основная лемма. Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы 3. Положим для краткости $q_I := \int_0^1 q(s) \, ds$ и

$$r(t) := K'_x(1, t; \infty) + K'_t(1, t; 0) = K'_x(1, t) + K'_t(1, t) - K'_x(1, -t) - K'_t(1, -t). \quad (2.4)$$

Лемма 6. Пусть $q(\cdot) \in C^k[0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $q^{(j)}(0) = (-1)^j q^{(j)}(1)$ при $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, то справедливо равенство

$$r^{(k)}(1) = 2^{-(k+1)}[q^{(k)}(1) - (-1)^k q^{(k)}(0)]. \quad (2.5)$$

Доказательство ведется индукцией по k и в общем случае довольно громоздко. Ограничимся случаями $k = 0$ и $k = 1$.

(i) Пусть сначала $k = 0$. Из уравнения (2.2) вытекают соотношения

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \, ds \quad \text{и} \quad K(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что

$$(K'_x + K'_t)|_{t=x} = 2^{-1}q(x) \quad \text{и} \quad K'_x(x, t)|_{t=-x} = K'_t(x, t)|_{t=-x}. \quad (2.7)$$

Дифференцируя уравнение (2.2) по x и t и подставляя в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^{\frac{1-t}{2}} q\left(\frac{1+t}{2} + \beta\right) K\left(\frac{1+t}{2} + \beta, \frac{1+t}{2} - \beta\right) d\beta + \frac{1}{2} \left[q\left(\frac{1+t}{2}\right) - q\left(\frac{1-t}{2}\right) \right] \\ &\quad - \int_0^{\frac{1+t}{2}} q\left(\frac{1-t}{2} + \beta\right) K\left(\frac{1-t}{2} + \beta, \frac{1-t}{2} - \beta\right) d\beta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Полагая здесь $t = 1$ и учитывая второе из равенств (2.6), приходим к равенству $r(1) = 2^{-1}[q(1) - q(0)]$, доказывающему (2.5) при $k = 0$.

(ii) Пусть теперь $k = 1$ и $q \in C^1[0, 1]$. Для доказательства равенства (2.5) (при $k = 1$) докажем более общее тождество

$$r'(1) = 4^{-1}[q'(1) + q'(0)] + 4^{-1}[q(0) - q(1)]q_I. \quad (2.9)$$

Дифференцируя уравнение (2.2) по x , полагая в полученном равенстве $t = -x$ и учитывая второе из соотношений (2.6), получаем

$$K'_x(x, t)|_{t=-x} = K'_t(x, t)|_{t=-x} = 4^{-1}q(0). \quad (2.10)$$

Далее, согласно предложению 5, $K(\cdot, \cdot) \in C^2(\Omega)$ и в силу (2.4) $r(\cdot) \in C^1[0, 1]$. Поэтому, дифференцируя (2.8), получаем

$$\begin{aligned} r'(t) = & \frac{1}{4} \left[q' \left(\frac{1+t}{2} \right) + q' \left(\frac{1-t}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} q(1) [K(1, t) + K(1, -t)] \\ & + \int_0^{\frac{1-t}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left[q \left(\frac{1+t}{2} + \beta \right) K \left(\frac{1+t}{2} + \beta, \frac{1+t}{2} - \beta \right) \right] d\beta \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1+t}{2}} q' \left(\frac{1-t}{2} + \beta \right) K \left(\frac{1-t}{2} + \beta, \frac{1-t}{2} - \beta \right) d\beta \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1+t}{2}} q \left(\frac{1-t}{2} + \beta \right) \left[(D_1 + D_2) K \left(\frac{1-t}{2} + \beta, \frac{1-t}{2} - \beta \right) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полагая в (2.11) $t = 1$ и учитывая (2.10) и оба соотношения (2.6), приходим к тождеству (2.9). $\square$

Замечание 7. Другой вывод равенства (2.5) можно получить из тождества (5.13) в [4, лемма 11], связывающего ядра двух операторов преобразования.

§3. Доказательство теоремы 3

(i) Обозначим через L_A оператор, порождаемый в $L^2[0, 1]$ задачей (1.1)–(1.2) с матрицей коэффициентов $A := (a_{ij})$, а через $\sigma(L_A)$ — его спектр. Хорошо известно, что спектр $\sigma(L_A)$ совпадает с совокупностью нулей определителя $\Delta(\cdot)$. При этом кратность p_n нуля λ_n (целой) функции $\Delta(\cdot)$ совпадает с размерностью корневого подпространства

$$W_n := \text{span}\{\text{Ker}(L_A - \lambda_n)^k : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \dim W_n = p_n$$

(см. [5], [7], [8]), а геометрическая кратность $m_n := m(\lambda_n) := \dim \text{Ker}(L_A - \lambda_n)$ числа λ_n определяется равенством $m_n = 2 - \text{rank } U(\lambda_n)$.

Рассмотрим решения $w_i(x, \lambda) := u_{i1}(\lambda)s(x, \lambda) - u_{i2}(\lambda)c(x, \lambda)$, $i \in \{1, 2\}$, уравнения (1.1). Ясно, что $U_i(w_i) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, а $U_1(w_2) = -U_2(w_1) = \Delta(\lambda)$. Поэтому если $m_n = 1$, то по крайней мере одна из двух систем

$$D_\lambda^k w_i(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.1)$$

образует цепочку (длины p_n) из собственной и присоединенных функций оператора L_A (при этом вторая система пропорциональна первой).

Если же $m_n = 2$, то $U(\lambda_n) = 0$ и $w_1(x, \lambda_n) = w_2(x, \lambda_n) = 0$. В этом случае найдутся числа $q_{ni} \in \{1, \dots, p_n - 1\}$, $i \in \{1, 2\}$, такие, что

$$D_\lambda^k w_i(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = 0, \quad k < q_{ni}, \quad \text{и} \quad D_\lambda^{q_{ni}} w_i(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n} \neq 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.2)$$

При этом $D_\lambda^{q_{ni}} w_i(x, \lambda_n)$, $i \in \{1, 2\}$, являются собственными (возможно, пропорциональными) функциями оператора L_A , а корневое подпространство по-прежнему порождено системой (3.1).

Допуская, что система СПФ (3.1) оператора L_A не полна в $L^2[0, 1]$, найдем ненулевой вектор $f \in L^2[0, 1]$, ортогональный этой системе. Тогда функции

$$w_i(\lambda; f) := \int_0^1 w_i(x, \lambda) f(x) dx = u_{i1}(\lambda)s(\lambda; f) - u_{i2}(\lambda)c(\lambda; f), \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.3)$$

являются целыми и в силу свойства (3.2) имеют в каждой точке $\lambda_n \in \sigma(L_A)$ нуль кратности $\geq p_n$. Поэтому функции

$$\tilde{w}_i(\cdot; f) := w_i(\cdot; f)/\Delta(\cdot), \quad i \in \{1, 2\},$$

также целые. Оценим их рост, оценив сначала определитель $\Delta(\cdot)$ снизу.

(ii) Пусть условия (1.2) вырождены, $\Delta_0(\lambda) = \text{const}$ и для определенности $\mathcal{J}_{12} = 1$. В силу (1.6) и (1.7) $\mathcal{J}_{42} = \mathcal{J}_{13} = \mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32} = 0$, $\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34} = (1 - \alpha^2)\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{14} = \alpha\mathcal{J}_{12} \neq 0$ и детерминант (1.5) принимает вид

$$\Delta(\lambda) = b_0 + \alpha[s'(1, \lambda) - c(1, \lambda)], \quad b_0 := 1 - \alpha^2. \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.4) интегральные представления (2.3) для решений $s(x, \lambda)$ и $c(x, \lambda)$ и интегрируя выражение для $c(1, \lambda)$ по частям, получаем с учетом равенства $K(1, 1; \infty) = K(1, 1; 0)$ и определения (2.4)

$$\begin{aligned} \Delta(\mu^2) = b_0 + \alpha \left[K(1, 1; \infty) \frac{\sin \mu}{\mu} + \int_0^1 K'_x(1, t, \infty) \frac{\sin \mu t}{\mu} dt \right. \\ \left. - \int_0^1 K(1, t; 0) \cos \mu t dt \right] = b_0 + \alpha \int_0^1 r(t) \frac{\sin \mu t}{\mu} dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представление (3.5), однако, не пригодно для оценки определителя $\Delta(\cdot)$ снизу. Но по условию $q(\cdot) \in C^k[0, 1]$, и в силу предложения 5 $K(\cdot, \cdot) \in C^{k+1}(\Omega)$. Согласно (2.4), $r(\cdot) \in C^k[0, 1]$. Можно считать, что $q^{(j)}(0) = (-1)^j q^{(j)}(1)$ при $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$; в противном случае k следует заменить наименьшим k_0 , для которого выполнено условие (1.8). В силу леммы 6 $r^{(j)}(1) = 0$ при $j \leq k-1$. Учитывая эти равенства, проинтегрируем в (3.5) k раз по частям, считая для определенности, что $k = 2m$. В результате придем к следующему представлению для характеристического определителя:

$$\Delta(\mu^2) = b_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b_{j+1}}{\mu^{2j+2}} + b_{m+1} \frac{\sin \mu}{\mu^{2m+1}} + (-1)^m \int_0^1 r^{(2m)}(t) \frac{\sin \mu t}{\mu^{2m+1}} dt, \quad (3.6)$$

где $b_{j+1} := (-1)^j \alpha r^{(2j)}(0)$, $j \in \{0, \dots, m-1\}$, и $b_{m+1} := \alpha r^{(2m-1)}(1)$.

(iii) Представление (3.6) уже пригодно для оценки определителя $\Delta(\cdot)$ снизу, поскольку

$$b_{m+1} = \alpha r^{(2m-1)}(1) = \alpha 2^{-2m} [q^{(2m-1)}(1) + q^{(2m-1)}(0)] \neq 0$$

(по лемме 6). Так как $|\sin \mu| > C(\rho) \exp(|\text{Im } \mu|)$ вне области $\bigcup_n D_\rho(n)$, где $D_\rho(n) = \{z : |z - n\pi| < \rho\}$ и $\rho < 1$, то при каждом $\varepsilon > 0$ внутри углов $\Omega_\varepsilon^\pm := \{\mu : \varepsilon \leq \pm \arg \mu \leq \pi - \varepsilon\}$ справедлива оценка

$$\left| b_{m+1} \sin \mu + b_0 \mu^{2m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{j+1} \mu^{2(m-j)-1} \right| \geq \frac{|b_{m+1}|}{2} \exp |\text{Im } \mu|, \quad \mu \in \Omega_\varepsilon^\pm.$$

Кроме того, в силу теоремы Лебега $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} e^{-|\text{Im } \mu|} \int_0^1 r^{(2m)}(t) \sin \mu t dt = 0$. Объединяя эти соотношения с (3.6), приходим к оценке

$$|\Delta(\mu^2)| \geq C |\mu|^{-2m-1} \exp |\text{Im } \mu|, \quad \mu \in \Omega_\varepsilon^\pm. \quad (3.7)$$

С другой стороны, согласно лемме 1.3.2 из [6], $w_i(\mu^2; f) = o(e^{|\operatorname{Im} \mu|})$, $|\mu| \rightarrow \infty$, $i \in \{1, 2\}$. Отсюда и из (3.7) вытекает желаемое соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|\mu|=r, \mu \in \Omega_\varepsilon^\pm} |w_i(\mu^2; f) \Delta^{-1}(\mu^2) \mu^{-2m-1}| = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (3.8)$$

означающее, что $|\tilde{w}_i(\mu, f)| \leq |\mu|^{2m}$ при $\mu \in \Omega_\varepsilon^\pm$. Так как $\tilde{w}_i(\mu, f)$ — функции экспоненциального типа, то из последней оценки на границе $\partial\Omega_\varepsilon^\pm$ областей $\Omega_\varepsilon^\pm$ и теоремы Фрагмена–Линделефа вытекает полиномиальная ограниченность функций $\tilde{w}_i$ в дополнительных углах $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon^\pm$. По теореме Лиувилля $\tilde{w}_i$ — полиномы степени $\leq 2m$, т. е. $\tilde{w}_i(\mu^2; f) = P_i(\mu)$, $\deg P_i \leq 2m$.

(iv) Следовательно, из определения функций $w_i(\mu; f)$ и $\tilde{w}_i(\mu; f)$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} u_{12}(\mu)c(\mu; f) - u_{11}(\mu)s(\mu; f) &= P_1(\mu)\Delta(\mu^2), \\ u_{22}(\mu)c(\mu; f) - u_{21}(\mu)s(\mu; f) &= P_2(\mu)\Delta(\mu^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Домножая первое из них на $u_{22}(\mu)$, а второе — на $u_{12}(\mu)$ и вычитая, получаем после сокращения на $\Delta(\mu^2)$ равенство

$$s(\mu; f) = P_2(\mu)u_{12}(\mu) - P_1(\mu)u_{22}(\mu). \quad (3.10)$$

Далее, в силу леммы Римана–Лебега из (2.3) вытекают соотношения

$$s(1, \mu) = \mu^{-1}[\sin \mu + \varepsilon_1(\mu)], \quad s'(1, \mu) = \cos \mu + \varepsilon_2(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

в которых $\varepsilon_i(\mu) = o(1)$ при $\mu = \bar{\mu} \rightarrow \infty$, $i \in \{1, 2\}$. Полагая

$$Q_1 := P_1 a_{22} - P_2 a_{12}, \quad Q_2 := P_1 a_{23} - P_2 a_{13}, \quad Q_3 := P_1 a_{24} - P_2 a_{14},$$

а также учитывая (3.11) и равенства

$$u_{12}(\mu) = a_{12} + a_{13}s(1, \mu) + a_{14}s'(1, \mu), \quad u_{22}(\mu) = a_{22} + a_{23}s(1, \mu) + a_{24}s'(1, \mu), \quad (3.12)$$

запишем (3.10) (при $\mu \in \mathbb{R}$) в виде

$$s(\mu; f) = Q_1(\mu) + Q_2(\mu)\mu^{-1}[\sin \mu + \varepsilon_1(\mu)] + Q_3(\mu)[\cos \mu + \varepsilon_2(\mu)]. \quad (3.13)$$

Покажем, что (3.13) влечет за собой равенства $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$. Пусть $d := \max\{\deg Q_j : 1 \leq j \leq 3\} > 0$. Разделив (3.13) на μ^d , положив затем $\mu_k = \pi(2k + 1/2)$ и устремив k к ∞ , получим $\deg Q_1 < d$. На втором шаге, разделив (3.13) на μ^d и устремив μ к ∞ по подпоследовательности $\mu_k = 2k\pi$, получим $\deg Q_3 < d$. И наконец, полагая сначала $\mu_k = \pi(2k + 1/2) \rightarrow \infty$, а затем $\mu_k = \pi(2k - 1/2)$, разделим обе части равенства (3.13) на $(\mu_k)^{d-1}$ и устремим k к ∞ . Получим $b_1 \pm b_2 = 0$, где b_1 и b_2 — коэффициенты при μ^{d-1} и μ^d в полиномах Q_1 и Q_2 соответственно. Значит, $b_1 = b_2 = 0$ и $\deg Q_3 < d$. Полученное противоречие показывает, что $d = 0$ и $Q_j = C_j = \text{const}$. Поэтому равенство (3.13) принимает вид

$$s(\mu; f) = C_1 + C_2\mu^{-1}[\sin \mu + \varepsilon_1(\mu)] + C_3[\cos \mu + \varepsilon_2(\mu)]. \quad (3.14)$$

Полагая в (3.14) $\mu_k = \pi(2k + 1/2)$, получим при $k \rightarrow \infty$, что $C_1 = 0$. Далее, полагая в (3.14) $\mu_k = 2\pi k$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем $C_3 = 0$. И наконец, умножая (3.14) на μ и учитывая, что $s(\mu; f) = \mu^{-1}o(1)$, получаем при $\mu_k = \pi(2k + 1/2) \rightarrow \infty$, что $C_2 = 0$.

Таким образом, $s(\mu; f) = 0$. Отсюда, используя представление (2.3), легко заключить, что $f = 0$ и, значит, система СПФ $\{\phi_j\}_1^\infty$ оператора L_A полна в $L^2[0, 1]$.

(v) Сопряженный оператор L_A^* соответствует задаче (1.1)–(1.2) с потенциалом $\bar{q}$ и (некоторой) матрицей A_* вместо q и A соответственно. Так как $\bar{q}^{(k)}(0) \neq (-1)^k \bar{q}^{(k)}(1)$, то, согласно (iii), система СПФ $\{\psi_j\}_1^\infty$ оператора L_A^* полна в $L^2[0, 1]$. Но система $\{\psi_j\}_1^\infty$ после надлежащей нормировки биортогональна системе $\{\phi_j\}_1^\infty$. Значит, система $\{\phi_j\}_1^\infty$ минимальна в $L^2[0, 1]$.

Замечание 8. Краевые условия (1.2), регулярные в смысле Биркгофа [8], являются невырожденными. Обратное неверно. Так, например, условия $y'(0) + y(1) - y'(1) = y(0) + y(1) = 0$ и $y'(0) + y(1) = y(0) = 0$ невырождены, однако не регулярны по Биркгофу.

§ 4. Необходимые условия полноты

Пусть $q \in L^1[0, 1]$. Положим $\tilde{q}(x) := q(x) - q(1 - x)$.

Предложение 9. Пусть условия (1.2) вырождены, а краевая задача (1.1)–(1.2) — нет. Тогда условие $0 \in \text{supp } \tilde{q}$ необходимо для полноты в $L^p[0, 1]$ системы СПФ задачи (1.1)–(1.2). При его нарушении дефект системы СПФ бесконечен.

Доказательство. В данном случае матрица A граничных условий имеет вид (1.7). Так как $\mathcal{J}_{12} \neq 0$, то условия (1.2) эквивалентны следующим:

$$y(0) = \alpha y(1), \quad y'(0) = -\alpha y'(1), \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq \infty. \quad (4.1)$$

Допустим, что $0 \notin \text{supp } \tilde{q}$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\tilde{q}(x) = 0$ при п.в. $x \in (0, \varepsilon)$. Поэтому, полагая $z_i(x, \lambda) := w_i(1 - x, \lambda)$, $i \in \{1, 2\}$, и учитывая условия (4.1), придем к равенствам (при $i \in \{1, 2\}$)

$$D_\lambda^k z_i(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \alpha^{-1} D_\lambda^k w_i(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_n}, \quad x \in [0, \varepsilon], \quad k \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}, \quad (4.2)$$

в которых λ_n — собственное значение задачи (1.1), (4.1), а p_n — его алгебраическая кратность. Пусть $f \in L^2[0, 1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ и $f(1 - x) = -\alpha f(x)$ при $x \in [0, \varepsilon]$. Тогда в силу (4.2) при $i \in \{1, 2\}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_\lambda^k w_i(x, \lambda_n) \overline{f(x)} dx &= \int_0^\varepsilon D_\lambda^k w_i(x, \lambda_n) \overline{f(x)} dx + \int_0^\varepsilon D_\lambda^k z_i(x, \lambda_n) \overline{f(1 - x)} dx \\ &= \int_0^\varepsilon D_\lambda^k w_i(x, \lambda_n) \overline{f(x)} dx + \int_0^\varepsilon \alpha^{-1} D_\lambda^k w_i(x, \lambda_n) (-\alpha) \overline{f(x)} dx = 0. \end{aligned}$$

Учитывая вид (3.1), (3.2) корневых векторов, видим, что система СПФ задачи (1.1), (4.1) не полна и условие $0 \in \text{supp } \tilde{q}$ необходимо для полноты. $\square$

Следствие 10. Пусть $\tilde{q}(\cdot)$ аналитична в окрестности точки 0. Тогда условие $0 \in \text{supp } \tilde{q}$ является критерием полноты в $L^p[0, 1]$, $p \in [1, \infty)$, системы СПФ задачи (1.1)–(1.2).

Доказательство. Пусть $0 \in \text{supp } \tilde{q}$. Тогда $\tilde{q}^{(k)}(0) = q^{(k)}(0) - (-1)^k q^{(k)}(1) \neq 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$ в силу аналитичности функции $\tilde{q}(\cdot)$. По теореме 2 это условие достаточно для полноты системы СПФ задачи. $\square$

Замечание 11. (i) Условие гладкости в теореме 3 можно ослабить до условия $q(\cdot) \in C^k([0, \varepsilon) \cup [1 - \varepsilon, 1])$.

(ii) Мне не известно, является ли условие $0 \in \text{supp } \tilde{q}$ достаточным для полноты системы СПФ даже в случае $q \in C^\infty[0, 1]$. Интересно отметить, что это так в случае задачи Редже (см. [10]).

(iii) В случае $\alpha \neq \pm 1$ условие $\tilde{q}(x) \equiv 0$ является критерием вольтерровости оператора L_A^{-1} (см. [1]). Если же $\tilde{q}(x) \equiv 0$ и $\alpha = \pm 1$, то $\sigma(L_A) = \mathbb{C}$.

Отметим в заключение работу [9], в которой изучены вопросы полноты и базисности системы СПФ для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка при различных классах невырожденных краевых условий.

Замечание 12. Теорема 2 гарантирует сохранение полноты при слабом возмущении, а теорема 3 — нет. Так, если $q(0) \neq q(1)$, то оператор $L_A(\varepsilon) = -D^2 + \varepsilon q$ с вырожденными условиями (1.2) является полным при каждом $\varepsilon \neq 0$, а невозмущенный (предельный при $\varepsilon \rightarrow 0$) оператор $L_A(0)$ — нет. Более того, $L_A^{-1}(0)$ вольтерров. Таким образом, теорема 3 дает естественный пример вольтеррова оператора класса $\mathfrak{S}_2$, слабые возмущения которого полны. Более того, $L_A^{-1}(0)$ является равномерным пределом полных операторов класса $\mathfrak{S}_2$.

В заключение я выражаю признательность Л. Л. Оридороге, при обсуждении с которым теоремы 2, принадлежащей В. А. Марченко, мы обратили внимание на отсутствие результатов о полноте системы СПФ задачи (1.1)–(1.2) с вырожденными условиями. Он же сообщил мне, что для задачи (1.1)–(1.2) с $q(x) = x$ и вырожденными условиями (1.2) имеет место полнота. Кроме того, я выражаю признательность М. С. Аграновичу и А. А. Шкаликову за полезные обсуждения, а также благодарность А. А. Шкаликову за информацию о работах [1], [10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. Н. Бияров, С. А. Джумабаев, *Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма–Лиувилля*, Матем. заметки, **56:1** (1994), 143–146.
- [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.
- [3] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [4] М. М. Маламуд, *Подобие операторов Вольтерра и смежные вопросы в теории дифференциальных уравнений дробных порядков*, Труды ММО, **55** (1994), 73–148.
- [5] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986.
- [6] В. А. Марченко, *Уравнения Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [7] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [8] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [9] А. А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Труды сем. Петровского, **9** (1983), 190–229.
- [10] A. A. Shkalikov, *Spectral analysis of the Regge problem*, Russ. J. Math. Phys., **8:3** (2001), 356–364.