Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, В. В. Соколов, О $(2+1)$ -мерных системах гидродинамического типа, обладающих псевдопотенциалом с подвижными особенностями, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 53–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:56:57

УДК 517.95

О $(2+1)$ -мерных системах гидродинамического типа, обладающих псевдопотенциалом с подвижными особенностями*

© 2008. А. В. Одесский, В. В. Соколов

Введение

В работах [1]–[3] был предложен конструктивный подход к задаче классификации интегрируемых систем вида

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x + B(\mathbf{u})\mathbf{u}_y, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ — это N -компонентный вектор-столбец, а $A(\mathbf{u})$ и $B(\mathbf{u})$ — матрицы размера $N \times N$. В качестве определения интегрируемости было предложено существование достаточного числа гидродинамических редукций ([4], [1]). К сожалению, для произвольного N трудно выписать явно условия на A и B , вытекающие из этого определения. Тем не менее для $N = 2$ полный набор условий интегрируемости был найден в статье [2]. Для $N > 2$ даже проверка, является ли данное уравнение интегрируемым, — серьезная проблема, а всякая классификация, основанная непосредственно на этом определении, выглядит безнадёжной.

Следующие два наблюдения ([2], [3]) очень полезны для преодоления возникающих при $N > 2$ трудностей. Во-первых, в случае общего положения матрица $M = (1+tA)^{-1}(1+kB)$ для интегрируемых моделей должна диагонализироваться точечным преобразованием $\mathbf{u} \rightarrow \Phi(\mathbf{u})$ для почти всех значений параметров t и k . Если собственные значения матрицы M различны, это эквивалентно тому, что тензор Хантеса [12] этой матрицы тождественно равен нулю, что приводит к переопределенной системе уравнений в частных производных первого порядка относительно элементов матриц A и B . Для данной системы (1) нетрудно проверить, выполняются эти уравнения или нет. Простейшие уравнения из этой системы могут быть полезны при классификации интегрируемых моделей (1).

Во-вторых, как замечено в [1], для $N = 2$ условия интегрируемости эквивалентны существованию скалярного псевдопотенциала

$$\Psi_t = f(\Psi_y, \mathbf{u}), \quad \Psi_x = g(\Psi_y, \mathbf{u}) \quad (2)$$

для (1)¹⁾. Все известные к настоящему моменту интегрируемые системы (1) обладают скалярным псевдопотенциалом. Псевдопотенциалы играют существенную роль в теории универсальной уиземовской иерархии ([5]–[7]). Важность псевдопотенциалов была также отмечена в [8]. Существование псевдопотенциала влечет за собой представление системы (1) в виде условия коммутирования

*Исследования частично поддержаны грантом EPSRC EP/D036178/1, грантом РФФИ 08-01-461 и грантом НШ 3472.2008.2.

¹⁾Последнее означает, что переопределенная система (2) для Ψ совместна, если и только если $\mathbf{u}$ — решение системы (1).

соответствующих псевдопотенциалу (2) характеристических векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial t} - f_{\xi} \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} - g_{\xi} \frac{\partial}{\partial y} + g_y \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \text{где } \xi = \Psi_y.$$

Подобные представления были использованы для интегрирования бездисперсионных уравнений в частных производных в недавних работах [10], [11]. С нашей точки зрения, существование псевдопотенциала — это одно из основополагающих свойств интегрируемых систем вида (1).

В настоящей работе мы предполагаем, что матрица $A(\mathbf{u})$ постоянна, и рассматриваем интегрируемые системы

$$u_{it} = \lambda_i u_{ix} + \sum_{1 \leq j \leq N} b_{ij}(\mathbf{u}) u_{jy}, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — попарно различные постоянные. Функции b_{ij} (как и все другие встречающиеся функции) предполагаются локально аналитическими. Отметим, что преобразование

$$u_i \rightarrow \psi_i(u_i) \quad (4)$$

сохраняет форму системы (3) для любых функций одной переменной $\psi_i(u_i)$.

Системы (3) при $N = 2$ рассматривались в [2]. Наша цель — получить список наиболее интересных примеров интегрируемых систем (3) с $N > 2$. Насколько нам известно, никто систематически не исследовал такие системы до нас.

Пример 1. Рассмотрим систему (3) с

$$b_{ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{u_i - u_j} c_j, \quad i \neq j, \quad b_{ii} = - \sum_{j \neq i} b_{ij}, \quad (5)$$

где c_j — произвольные постоянные. Нетрудно проверить, что для произвольного N эта система обладает псевдопотенциалом (2), где

$$g = \sum_{i=1}^N c_i \ln(u_i - \Psi_y), \quad f = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i \ln(u_i - \Psi_y). \quad (6)$$

Этот псевдопотенциал имеет следующую структуру:

$$g = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, u_i), \quad f = \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(\xi, u_i), \quad (7)$$

где $\xi = \Psi_y$. В §2 мы показываем, что формула (7) верна для всякой системы вида (3), обладающей псевдопотенциалом.

Отметим, что функции $h_i(\xi, u_i)$ в (6) имеют «движущиеся» особенности по переменной $\xi = \Psi_y$. Это означает, что положение особенности зависит от $\mathbf{u}$.

В этой статье мы описываем все системы (3), обладающие псевдопотенциалом, таким, что для любого i функция $h_i(\xi, u_i)$ имеет движущуюся особенность. Это приводит к сериям новых интересных примеров интегрируемых систем (3). Эти системы приведены в §1. Описание их гидродинамических редукций и точных решений типа многократных волн ([13], [1]) будет дано в отдельной статье.

В §§2–4 мы выводим функциональное уравнение, описывающее псевдопотенциалы с движущимися особенностями, и находим все его решения. Эти решения соответствуют примерам из §1 и их вырождениям.

§1. Примеры

Пример 2. Рассмотрим систему (3), заданную формулами

$$b_{ij} = c_j(\lambda_j - \lambda_i) \left(\kappa + \frac{e^{u_i - u_j}}{e^{u_i - u_j} - 1} \right), \quad i \neq j, \quad b_{ii} = - \sum_{j \neq i} b_{ij}.$$

Здесь если $\kappa = -1$ или $\kappa = 0$, то c_j — произвольные постоянные. Для остальных κ постоянные c_j должны удовлетворять следующим двум соотношениям:

$$\sum_{i=1}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i = 0. \quad (8)$$

Легко проверить, что для любого N эта система допускает псевдопотенциал (2), (7) с

$$h_i(\xi, u) = c_i(\kappa(\xi - u) + \ln(e^{\xi - u} - 1)). \quad (9)$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение (3) с

$$b_{ij} = c_j(\lambda_j - \lambda_i) \frac{u_i - u_j + 1}{u_i - u_j} \frac{u_i}{u_j}, \quad i \neq j, \quad b_{ii} = \sum_{j \neq i} c_j(\lambda_j - \lambda_i) \left(\frac{1}{u_j - u_i} + \ln(u_j) \right),$$

где c_j — любые постоянные, удовлетворяющие условиям (8). Эта система обладает псевдопотенциалом (2), (7) с

$$h_i(\xi, u) = c_i((\xi + 1) \ln(u) - \ln(u - \xi)). \quad (10)$$

Система из примера 1 является частным случаем следующей модели.

Пример 4. Пусть

$$b_{ij} = \frac{(\lambda_i - \lambda_j)c_j P(u_i)M(u_j)}{u_i - u_j}, \quad i \neq j, \\ b_{ii} = - \sum_{j \neq i} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)c_j P(u_j)M(u_j)}{u_i - u_j} - \sum_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)c_j B(u_j),$$

где c_j — произвольные постоянные, а функции B , M находятся в квадратурах из уравнений

$$B' = (k_3 x + k_2 + z_1) M, \quad M' = M \frac{-k_3 x^2 + z_1 x + z_0}{P}.$$

Здесь $P(x) = k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0$ — произвольный многочлен степени не выше чем 3, а z_1 , z_0 — произвольные постоянные.

Соответствующая система (3) обладает псевдопотенциалом (2), (7), где $h_i(\xi, u_i) = c_i h(\xi, u_i)$, а функция $h(\xi, u_i)$ определяется соотношениями

$$h_u(\xi, u) = - \frac{M(u)}{u - \phi(\xi)} \frac{1}{M(\phi(\xi))}, \quad h_\xi(\xi, u) = -B(u) + \frac{P(u)M(u)}{u - \phi(\xi)}, \quad \phi' = P(\phi)M(\phi). \quad (11)$$

Для данных P и z_1 , z_0 уравнения для $\phi(\xi)$ и $h(\xi, u)$ легко можно решить в квадратурах.

Используя допустимые преобразования

$$u_i \rightarrow \frac{au_i + b}{cu_i + d}, \quad i = 1, \dots, N,$$

многочлен P можно привести к канонической форме. Например, если все три его корня различны, то без ограничения общности мы можем положить $P(x) = x(x-1)$. В этом случае

$$M(x) = x^{s_1}(x-1)^{s_2},$$

где $s_1 = -z_0$, $s_2 = z_0 + z_1$, и

$$B(x) = (s_1 + s_2 + 1) \int x^{s_1}(x-1)^{s_2} dx.$$

Из формул (11) следует, что

$$h(\xi, u) = \frac{1}{\phi(\xi)^{s_1}(\phi(\xi) - 1)^{s_2}} \int_c^u \frac{t^{s_1}(t-1)^{s_2}}{\phi(\xi) - t} dt - c^{s_1+1}(c-1)^{s_2+1} \int \frac{d\xi}{\phi(\xi) - c},$$

где $\phi' = \phi^{s_1+1}(\phi-1)^{s_2+1}$.

Оставшиеся две канонические формы — это $P = x$ и $P = 1$. Последняя дает пример 1, если $z_1 = z_0 = 0$.

§ 2. Псевдопотенциалы

Пара уравнений вида

$$\Psi_t = f(\Psi_y, u_1, \dots, u_N), \quad \Psi_x = g(\Psi_y, u_1, \dots, u_N) \quad (12)$$

относительно неизвестной Ψ называется псевдопотенциалом для уравнения (3), если условия совместности $\Psi_{tx} = \Psi_{xt}$ для (12) эквивалентны системе (3). Дифференцируя уравнения (12), находим, что эти условия совместности задаются формулой

$$f_\xi \sum_{i=1}^N (u_i)_y \partial_i g + \sum_{i=1}^N (u_i)_x \partial_i f = g_\xi \sum_{i=1}^N (u_i)_y \partial_i f + \sum_{i=1}^N (u_i)_t \partial_i g.$$

Здесь и ниже мы обозначаем Ψ_y через ξ и $\partial/\partial u_i$ через ∂_i . Подставляя правые части уравнений системы (3) вместо производных по t и расщепляя относительно производных по x и y , получаем, что для любого i выполнены соотношения

$$\partial_i f = \lambda_i \partial_i g, \quad (13)$$

$$f_\xi \partial_i g - g_\xi \partial_i f = \sum_{j=1}^N b_{ji} \partial_j g. \quad (14)$$

Так как λ_i попарно различны, из условия (13) следует, что

$$g = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, u_i) \quad \text{и} \quad f = \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(\xi, u_i) + c(\xi).$$

Легко видеть, что постоянная интегрирования $c(\xi)$ может быть распределена между функциями h_i . Таким образом, мы пришли к (7).

Подставляя (7) в (14), мы получаем

$$\partial_i h_i(\xi, u_i) \sum_j (\lambda_j - \lambda_i) h_{j\xi}(\xi, u_j) = \sum_j b_{ji} \partial_j h_j(\xi, u_j). \quad (15)$$

Замечание 1. Зафиксировав значение ξ_0 переменной ξ , из (15) получим, что

$$b_{ii} = \sum_j (\lambda_j - \lambda_i) \phi_j(u_j) - \sum_{j \neq i} b_{ji} \frac{s_j(u_j)}{s_i(u_i)}, \quad (16)$$

где $\phi_j(u_j) = h_{j\xi}(\xi_0, u_j)$, $s_j(u_j) = \partial_j h_j(\xi_0, u_j)$.

§3. Основное функциональное уравнение

Предположим, что для любого i функция $h_i(\xi, u)$ имеет особенность по ξ и эта особенность зависит от u . После преобразования вида (4) мы можем считать, что для любого i особенность функции $h_i(\xi, u)$ расположена на диагонали $\xi = u$. Скажем, что $h_i(\xi, u)$ имеет особенность на диагонали, если для фиксированного u , взятого в общем положении, и любого $\epsilon > 0$ мы имеем $\max\{|h_i(\xi, u)|, |\xi - u| < \epsilon\} = \infty$.

Предложение 1. Предположим, что $h_i(\xi, u)$ имеет особенность на диагонали $\xi = u$ для каждого i . Тогда существует функция $h(\xi, u)$, функции $f_i(\xi)$ и ненулевые постоянные c_i , такие, что

$$h_i(\xi, u) = c_i h(\xi, u) + f_i(\xi), \quad (17)$$

$$b_{ji} = (\lambda_i - \lambda_j) c_i \partial_i h(u_j, u_i), \quad i \neq j, \quad (18)$$

$$b_{ii} = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) (c_j \partial_i h(u_i, u_j) + f'_j(u_i)), \quad (19)$$

$$h(\xi, u) = \ln(\xi - u) + \text{регулярная часть}. \quad (20)$$

Кроме того, выполнено функциональное уравнение

$$h_\xi(\xi, w) h_v(\xi, v) + h_v(w, v) h_w(\xi, w) - h_v(v, w) h_v(\xi, v) = \nu(\xi, v), \quad (21)$$

где ν — некоторая функция.

Доказательство. Рассматривая равенство (15) около диагонали $\xi = u_j$, где $j \neq i$, и сравнивая особенности, получаем

$$b_{ji} = (\lambda_j - \lambda_i) \mu_j(u_j) \partial_i h_i(u_j, u_i), \quad (22)$$

где $\mu_j(u_j) = \lim_{\xi \rightarrow u_j} h_{j\xi}(\xi, u_j) / \partial_j h_j(\xi, u_j)$. Мы видим, что функция b_{ji} зависит только от u_i, u_j и имеет такую же особенность на диагонали, как и $\partial_i h_i(u_j, u_i)$. Рассматривая равенство (15) около диагонали $u_i = u_j$, сравнивая особенности и используя (16), мы получаем $\partial_j h_j(\xi, u_i) s_i(u_i) = \partial_i h_i(\xi, u_i) s_j(u_i)$, или $\partial_i h_i(\xi, u_i) = \nu_i(u_i) r(\xi, u_i)$ для некоторых функций ν_i и r . С другой стороны, рассмотрим равенство (15) для N значений общего положения $\xi_1, \dots, \xi_N$ переменной ξ . Для каждого фиксированного $i = 1, \dots, N$ мы имеем систему из N линейных уравнений для $b_{i1}, \dots, b_{iN}$ с матрицей $Q = (q_{jk})$, где $q_{jk} = \nu_j(u_j) r(\xi_k, u_j)$. По определению псевдопотенциала эта система должна иметь единственное решение, и поэтому $\Delta = \det Q \neq 0$. Ясно, что $b_{ji} = P_{ji} / \Delta$, где выражение P_{ji} регулярно на каждой диагонали $u_k = u_l$. Легко доказывается следующая

Лемма. Пусть $\Delta(u_1, \dots, u_m)$ — определитель некоторой $m \times m$ -матрицы Q , элементы q_{ij} которой имеют вид $q_{ij} = g_i(u_j)$ для некоторых функций $g_1, \dots, g_m$. Функция Δ не равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда функции $g_1, \dots, g_m$ линейно независимы. В этом случае $\partial_i \Delta \neq 0$ на диагонали $u_i = u_j$ для любых $i \neq j$.

Из этой леммы следует, что единственно возможная особенность у b_{ij} на диагонали — это полюс первого порядка. Принимая во внимание (22), получаем, что поблизости от диагонали $u_j = u_i$

$$\partial_i h_i(u_j, u_i) = \frac{\alpha_i(u_j)}{u_j - u_i} + \text{регулярная часть},$$

или, после интегрирования,

$$h_i(u_j, u_i) = -\alpha_i(u_j) \ln(u_j - u_i) + \text{регулярная часть}.$$

Рассматривая сингулярную часть в (15) при $\xi = u_j$, получаем $\mu_j(u_j) = -1$ и $\alpha'_i(u_j) = 0$, т.е. $\alpha_i(u_j) = -c_i$ для некоторой постоянной c_i . Сравнивая особенности в левой и правой частях соотношения (15) при $\xi = u_i$, находим, что

$$b_{ii} = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) \partial_i h_j(u_i, u_j).$$

Подставляя это выражение для b_{ii} в (15), получаем

$$\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) (h_{j\xi}(\xi, u_j) \partial_i h_i(\xi, u_i) + \partial_i h_i(u_j, u_i) \partial_j h_j(\xi, u_j) - \partial_i h_j(u_i, u_j) \partial_i h_i(\xi, u_i)) = 0. \quad (23)$$

Рассматривая сингулярную часть в (23) при $u_i = u_j$, получаем

$$c_j (h_i(\xi, u))_u = c_i (h_j(\xi, u))_u,$$

что дает (17) и (20). Теперь (18) и (19) следуют из (17) и уже полученных выражений для b_{ij} и b_{ii} . Используя (23), мы приходим к соотношению

$$\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) c_j (h_\xi(\xi, u_j) \partial_i h(\xi, u_i) + \partial_i h(u_j, u_i) \partial_j h(\xi, u_j) - \partial_i h(u_i, u_j) \partial_i h(\xi, u_i) + (f'_j(\xi) - f'_j(u_i)) \partial_i h(\xi, u_i)) = 0.$$

Это соотношение дает (21) с некоторой функцией $\nu(\xi, v)$. □

Замечание 2. Если пара $h(\xi, v)$, $\nu(\xi, v)$ — решение уравнения (21), то

$$\tilde{h}(\xi, v) = h(\xi, v) + f(\xi), \quad \tilde{\nu}(\xi, v) = \nu(\xi, v) + (f'(\xi) - f'(v)) h_v(\xi, v) \quad (24)$$

— также решение этого уравнения. Поэтому, если $\nu(\xi, v)$ имеет вид $(g(\xi) - g(v)) h_v(\xi, v)$ для некоторой функции g , мы можем сделать $\nu(\xi, v)$ нулем, прибавляя к $h(\xi, v)$ подходящую функцию от ξ .

Замечание 3. Без ограничения общности мы можем предположить, что $f_i(\xi) = f_j(\xi)$ для всех i, j . Действительно, в (7) встречаются только линейные комбинации $\sum_i f_i(\xi)$ и $\sum_i \lambda_i f_i(\xi)$. Более того, согласно замечанию 2, мы можем положить $f_i(\xi) = 0$.

Замечание 4. Из (18), (21) следует, что для любых $i \neq j$ функция $b = b_{ij}(u_i, u_j)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$b(w, v) b_w(x, w) - b(x, v) b_v(v, w) + b(x, w) b_w(w, v) + b(x, v) b_x(x, w) = 0.$$

Замечание 5. Из формул (18), (19) следует, что система (3), заданная этими формулами с $f_i(\xi) = 0$, может быть записана в следующей дивергентной форме:

$$u_{it} = \lambda_i u_{ix} + \sigma_{iy}, \quad \text{где } \sigma_i = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) c_j h(u_i, u_j).$$

Таким образом, всякая такая система имеет по крайней мере N линейно независимых гидродинамических законов сохранения.

Предложение 2. Пусть $h(\xi, v)$ — решение уравнения (21) с $\nu(\xi, v) = 0$. Тогда для любых ненулевых постоянных c_i формула

$$g = \sum_{i=1}^N c_i h(\xi, u_i), \quad f = \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i h(\xi, u_i) \quad (25)$$

определяет псевдопотенциал для уравнения (3), заданного с помощью формул (18) и (19) с $f_i(\xi) = 0$.

Пусть $h(\xi, v)$ — решение уравнения (21) с $\nu(\xi, v) \neq 0$. Тогда (25) задает псевдопотенциал для уравнения (3), определяемого формулами (18) и (19) с $f_i(\xi) = 0$, если и только если постоянные c_i удовлетворяют соотношениям (8).

Доказательство. Согласно предыдущим результатам, формулы (25) определяют псевдопотенциал тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) c_j (h_\xi(\xi, u_j) \partial_i h(\xi, u_i) + \partial_i h(u_j, u_i) \partial_j h(\xi, u_j) - \partial_i h(u_i, u_j) \partial_i h(\xi, u_i)) = 0.$$

Подставляя (21) в это соотношение, получаем утверждение предложения. $\square$

§4. Классификация решений функционального уравнения

Предложение 3. Пусть пара $h(\xi, v)$, $\nu(\xi, v)$ является решением уравнения (21) с асимптотикой (20). Тогда, с точностью до преобразований вида (24), она принадлежит следующему списку:

$$h(x, v) = \kappa(x - v) + \ln(x - v), \quad \nu(x, v) = \kappa(\kappa + 1),$$

$$h(x, v) = \kappa(x - v) + \ln(e^{x-v} - 1), \quad \nu(x, v) = \kappa(\kappa + 1),$$

где κ — произвольная постоянная,

$$h(x, v) = (x + 1) \ln(v) - \ln(v - x), \quad \nu(x, v) = \frac{x}{v},$$

$$h(x, v) = \int_c^v \frac{P(\phi(x)) \phi'(t)^2}{(\phi(x) - \phi(t)) P(\phi(t)) \phi'(x)} dt - \int \frac{\phi'(c)}{\phi(x) - \phi(c)} dx, \quad \nu(x, v) = 0.$$

Здесь c — постоянная, а функция ϕ определяется из дифференциального уравнения

$$\phi'' = \left(\frac{2P'(\phi)}{3P(\phi)} + \frac{Z(\phi)}{P(\phi)} \right) \phi'^2,$$

где

$$P(x) = k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0, \quad Z(x) = z_1 x + z_0$$

— произвольные полиномы, такие, что $\deg P \leq 3$ и $\deg Z \leq 1$.

Доказательство. Согласно (20), мы имеем разложение вида

$$h(w, v) = \ln(w - v) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(w)(w - v)^i \quad (26)$$

при v , стремящемся к w . Для того чтобы описать решения функционального уравнения (21), исследуем набор соотношений, связывающих функции a_i . Используя разложение (26) для $h(v, w)$ и $h(w, v)$ и приравнявая коэффициенты при разных степенях $v - w$, получаем бесконечную последовательность уравнений в частных производных для функции $h(x, v)$ и коэффициентов $a_i(v)$. Простейшие три из них имеют вид

$$h_{vvv} - 2h_v h_{xv} + 2a_1 h_{vv} = 0, \quad (27)$$

$$h_{vvvv} - 3h_v h_{xvv} + 3a_1 h_{vvv} + 6(a'_1 + 2a_2)h_{vv} + 3(a''_1 + 6a'_2 + 12a_3)h_v = 0, \quad (28)$$

$$h_{vvvvv} - 4h_v h_{xvvv} + 4a_1 h_{vvvv} + 12(a'_1 + 2a_2)h_{vvv} + 12(a''_1 + 4a'_2 + 6a_3)h_{vv} + 4(a'''_1 + 6a''_2 + 12a'_3)h_v = 0. \quad (29)$$

Подставляя в (27) вместо $h(x, v)$ разложение (26), мы обнаруживаем, что все коэффициенты a_i , $i > 2$, выражаются как некоторые дифференциальные многочлены от a_1 и a_2 . Например,

$$a_3 = -\frac{1}{12}(a''_1 + 2a_1 a'_1 + 4a'_2).$$

Это означает, что функция $h(x, v)$ однозначно определяется функциями $a_1(v)$ и $a_2(v)$.

Разложения в ряд уравнений (28) и (29) приводят к дифференциальным соотношениям между a_1 и a_2 . В частности, простейшее соотношение, вытекающее из (28), имеет вид

$$a'''_1 + 6a_1 a''_1 + 6a_1'^2 - 6a_1^2 a'_1 + 12(a_2 a'_1 + a'_2 a_1) = 0.$$

Если $a_1 \neq 0$, отсюда следует, что

$$a_2 = \frac{C - a''_1 - 6a_1 a'_1 + 2a_1^3}{12a_1} \quad (30)$$

для некоторой постоянной C . Исключая a_2 с помощью (30), мы приходим к переопределенной системе ОДУ относительно a_1 . Если $C = 0$, мы находим из этой системы, что

$$a_1^2 a_1^{(4)} + 2a_1(3a_1^2 - a_1')a_1^{(3)} - 4a_1(a_1'')^2 + 2(a_1'^2 - 9a_1^2 a_1' + 4a_1^4)a_1'' - 16a_1^3 a_1'^2 = 0. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (31) можно записать в виде

$$a_1(x) = -\frac{3Z(\phi(x))}{2P(\phi(x))}\phi'(x), \quad \phi'' = \left(\frac{2P'(\phi)}{3P(\phi)} + \frac{Z(\phi)}{P(\phi)}\right)\phi'^2,$$

где

$$P(x) = k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0, \quad Z(x) = z_1 x + z_0$$

— произвольные многочлены, такие, что $\deg P \leq 3$ и $\deg Z \leq 1$. Для любых конкретных P и Z уравнение для ϕ легко может быть проинтегрировано в квадратурах. Пример 4 из §1 после преобразования $u \rightarrow \phi(u)$ описывает псевдопотенциал, порожденный такой функцией a_1 .

Пусть $C \neq 0$. Тогда простой анализ системы ОДУ для a_1 показывает, что или $a_1' = 0$, или

$$4(a_1')^3 + 12a_1^2(a_1')^2 + 12(a_1^4 - Ca_1)a_1' + 4a_1^6 + 4Ca_1^3 + C^2 = 0. \quad (32)$$

Легко проверить, что если $a_1' = 0$, то $a_i' = 0$ для всех i и поэтому $h(x, v) = H(x - v)$ для некоторой функции H . Решая уравнение (27), получаем

$$H(x) = c_1 + c_2x + \ln(1 - e^{-c_3x})$$

или

$$H(x) = c_1 + c_2x + \ln(c_3x).$$

Эти решения соответствуют модели из примера 2 и ее вырождению.

Левая часть в (32) может быть разложена на три множителя. Каждый множитель приводит к дифференциальному уравнению вида

$$a_1' + (a_1 + k)^2 = 0,$$

где k связано с постоянной C из (30) соотношением $C = 2k^3$. Соответствующая модель описана в примере 3.

Случай $a_1 = 0$ должен быть рассмотрен отдельно. Легко получить, что в этом случае $a_2'' + 36a_2^2 = 0$. Оказывается, что это частный случай модели, описываемой уравнением (31). В соответствующих формулах надо положить $Z = 0$. $\square$

Благодарности. Авторы благодарны Е. В. Фералонтову, который привлек их к деятельности по классификации интегрируемых многомерных бездисперсионных моделей, указал на основополагающую роль гидродинамических систем в многообразии таких моделей и описал круг интересных нерешенных задач в этой области. Мы также благодарны М. В. Павлову и О. И. Мохову за полезные обсуждения. Второй автор благодарен Манчестерскому институту математических наук за гостеприимство и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Hydrodynamic reductions of multi-dimensional dispersionless PDEs: the test for integrability*, J. Math. Phys., **45**:6 (2004), 2365–2377.
- [2] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *The characterization of two-component (2+1)-dimensional integrable systems of hydrodynamic type*, J. Phys. A: Math. Gen., **37**:8 (2004), 2949–2963.
- [3] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova *The Haantjes tensor and double waves for multi-dimensional systems of hydrodynamic type: a necessary condition for integrability*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **462**:2068 (2006), 1197–1219.
- [4] J. Gibbons, S. P. Tsarev, *Reductions of the Benney equations*, Phys. Lett. A, **211**:1 (1996), 19–24.
- [5] И. М. Кривчер, *Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений*, Функц. анализ и его прил., **22**:3 (1988), 37–52.
- [6] I. M. Krichever, *The dispersionless Lax equations and topological minimal models*, Comm. Math. Phys., **143**:2 (1992), 415–429.
- [7] I. M. Krichever, *The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories*, Comm. Pure Appl. Math., **47**:4 (1994), 437–475.
- [8] V. E. Zakharov, *Dispersionless limit of integrable systems in 2+1 dimensions*, in: Singular Limits of Dispersive Waves, Plenum Press, New York, 1994, 165–174.

- [9] С. П. Царев, *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР, сер. матем., **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [10] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *Задача Коши на плоскости для бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили*, Письма в ЖЭТФ, **83**:10 (2006), 462–466.
- [11] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation*, Phys. Lett. A, **359**:6 (2006), 613–619.
- [12] J. Haantjes, *On X_m -forming sets of eigenvectors*, Indag. Math., **17** (1955), 158–162.
- [13] Z. Peradzyński, *Nonlinear planar k -waves and Riemann invariants*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Tech., **19** (1971), 625–632.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
Математический факультет университета г. Манчестер
e-mail: alexander.odesskii@manchester.ac.uk

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sokolov@itp.ac.ru

Поступило в редакцию
28 февраля 2007 г.