Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Безматричная версия принципа продолжения Арвесона–Виттстока и ее обобщение, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 63–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:16:17

Безматричная версия принципа продолжения Арвесаона–Виттстока и ее обобщение*

© 2008. А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ

Светлой памяти Дмитрия Петровича Желобенко

Работа посвящена разделу функционального анализа, называемому теорией операторных пространств, а также квантованным или, короче, квантовым функциональным анализом (ср. обсуждение в [2]). Одним из наиболее важных достижений этой теории является теорема Арвесаона–Виттстока о продолжении вполне ограниченных операторов со значениями в алгебрах всех ограниченных операторов в гильбертовых пространствах (см. оригинальные работы [1], [10] и монографии [3, с. 65–70], [4, с. 99–100]). Это «квантовый» аналог (и обобщение) классической теоремы Хана–Банаха о продолжении ограниченных функционалов. В настоящей работе доказывается некоторая теорема о продолжении ограниченных морфизмов банаховых бимодулей. Это теорема 1, которая, в свою очередь, обобщает теорему Арвесаона–Виттстока или, более точно, ее безматричную версию — теорему 2.

Мы начнем с напоминания о нескольких стандартных понятиях и фактах функционального анализа, которые нам понадобятся, и договоримся об обозначениях.

Везде далее пространство всех ограниченных операторов, действующих в нормированном пространстве E , снабженное операторной нормой, мы обозначаем через $\mathcal{B}(E)$, а его подпространство, состоящее из конечномерных операторов, — через $\mathcal{F}(E)$. Тожественный оператор в E будет обозначаться через 1_E .

Как обычно, символ $\otimes$ обозначает алгебраическое тензорное произведение линейных пространств и операторов. Далее, для гильбертова тензорного произведения гильбертовых пространств, равно как и для гильбертова тензорного произведения действующих в них операторов, мы употребляем символ $\dot{\otimes}$. Наконец, символ $\otimes_p$ обозначает *неполненное* проективное тензорное произведение нормированных пространств.

Скалярное произведение в том или ином гильбертовом пространстве мы будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если H — гильбертово пространство, то мы обозначим через $\mathcal{S}(H)$ гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта в H , снабженное скалярным произведением $\langle a, b \rangle := \text{tr}(b^*a)$.

Внешние (или, как еще говорят, модульные) умножения в модулях и бимодулях будут обозначаться точкой.

Теперь введем основные понятия, участвующие в формулировке теоремы 1.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 05-01-00982).

Произвольно выберем какое-либо гильбертово пространство, лишь бы оно было сепарабельным и бесконечномерным, обозначим его через L и зафиксируем на протяжении всей статьи. Базовой алгеброй всех рассмотренных ниже бимодулей будет служить операторная алгебра $\mathcal{B}(L)$, для которой мы примем краткое обозначение $\mathcal{B}$. (Более общие базовые алгебры, работа с которыми, по всей видимости, требует достаточно развитой техники теории операторных алгебр, в нашей статье не рассматриваются). Мы будем также писать $\mathcal{S}$ вместо $\mathcal{S}(L)$ и $\mathcal{F}$ вместо $\mathcal{F}(L)$.

Пусть Y — нормированный $\mathcal{B}$ -бимодуль. Назовем проектор $P \in \mathcal{B}$ носителем элемента $u \in Y$, если $P \cdot u \cdot P = u$.

Определение (ср. с определением абстрактного операторного пространства в [3, с. 20] или [4, с. 180–181]). Нормированный унитарный $\mathcal{B}$ -бимодуль Y называется *бимодулем Руана*, если он удовлетворяет следующим двум условиям (*аксиомам Руана*):

(RI) для всех $a \in \mathcal{B}$ и $u \in Y$

$$\|a \cdot u\|, \|u \cdot a\| \leq \|a\| \|u\|$$

(т.е., в терминологии теории банаховых алгебр, наш бимодуль является *сжимающим*);

(RII) для любых $u, v \in Y$, обладающих ортогональными носителями,

$$\|u + v\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}.$$

Разумеется, из (RII) сразу следует аналогичное свойство для нескольких слагаемых: если $u_1, \dots, u_n \in Y$ обладают попарно ортогональными носителями, то $\|u_1 + \dots + u_n\| = \max\{\|u_1\|, \dots, \|u_n\|\}$.

Важным примером бимодуля Руана является банахово пространство $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$, где H — произвольное гильбертово пространство. Это пространство снабжено внешними умножениями, определенными для $a \in \mathcal{B}$ и $\tilde{b} \in \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ равенствами $a \cdot \tilde{b} := (a \dot{\otimes} 1_H) \tilde{b}$ и $\tilde{b} \cdot a := \tilde{b} (a \dot{\otimes} 1_H)$. Именно бимодули вида $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ (для различных H) сыграют в будущей теореме продолжения ту же роль «инъективных объектов», что квантовые пространства $\mathcal{B}(H)$ в теореме Арвесона–Виттстока (а также поле $\mathbb{C}$ в теореме Хана–Банаха).

Нам понадобится конструкция (*проективного*) *бимодульного* тензорного произведения. Пусть A — нормированная алгебра, а X и Y — нормированные A -бимодули. Нормированное пространство $X \underset{A-A}{\otimes} Y$ — бимодульное тензорное произведение бимодулей X и Y — определяется в терминах свойства универсальности по отношению к классу сбалансированных ограниченных билинейных операторов из $X \times Y$ в нормированные пространства; ср., например, [6, §§II.3,5]. (Напомним, что $\mathcal{R}: X \times Y \rightarrow E$ сбалансирован, если $\mathcal{R}(a \cdot x, y) = \mathcal{R}(x, y \cdot a)$ и $\mathcal{R}(x \cdot a, y) = \mathcal{R}(x, a \cdot y)$ для всех $a \in A$, $x \in X$, $y \in Y$.) В явном виде пространство $X \underset{A-A}{\otimes} Y$ реализуется как факторпространство нормированного пространства $X \underset{p}{\otimes} Y$ по замыканию его подпространства $\text{span}\{a \cdot x \otimes y - x \otimes y \cdot a, x \cdot a \otimes y - x \otimes a \cdot y; a \in A, x \in X, y \in Y\}$.

В частности, если заданы нормированный левый A -модуль X_1 и нормированный правый A -модуль X_2 , то, как известно, $X_1 \underset{p}{\otimes} X_2$ является нормированным

A -бимодулем с внешними умножениями, однозначно определенными равенствами $a \cdot (\dot{x} \otimes \dot{x}) = a \cdot \dot{x} \otimes \dot{x}$ и $(\dot{x} \otimes \dot{x}) \cdot a = \dot{x} \otimes \dot{x} \cdot a$, $a \in A$, $\dot{x} \in X_1$, $\dot{x} \in X_2$. В этом случае, как известно (и как легко убедиться), норма элемента $U \in (X_1 \otimes_p X_2) \otimes_{A-A} Y$ есть

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|\dot{x}_k\| \|\dot{x}_k\| \|y_k\| \right\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям нашего U в виде $\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k \otimes \dot{x}_k) \otimes_{A-A} y_k$.

Теперь сформулируем основную теорему статьи.

Теорема 1. Пусть $\alpha: Y \rightarrow Z$ — изометрический морфизм между двумя бимодулями Руана, а H — произвольное гильбертово пространство. Тогда для любого ограниченного морфизма $\mathcal{B}$ -бимодулей $\Phi: Y \rightarrow \mathcal{B}(L \otimes H)$ существует ограниченный морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей $\Psi: Z \rightarrow \mathcal{B}(L \otimes H)$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & Z \\ \downarrow \Phi & \swarrow \Psi & \\ \mathcal{B}(L \otimes H) & & \end{array}$$

коммутативна и $\|\Psi\| = \|\Phi\|$. Иными словами, каждый ограниченный $\mathcal{B}$ -бимодульный морфизм из Y в $\mathcal{B}(L \otimes H)$ допускает при отождествлении Y с под- $\mathcal{B}$ -бимодулем в Z продолжение до морфизма из Z в $\mathcal{B}(L \otimes H)$ той же нормы.

Мы ограничимся случаем, когда H бесконечномерно и сепарабельно. Тогда из теоремы Рисса–Фишера следует, что H унитарно изоморфно L^* , а это позволяет отождествить $L \otimes H = L \otimes L^*$ с $\mathcal{S}$ по известному правилу $(\xi \otimes f)(\eta) := f(\eta)\xi$, $\xi, \eta \in L$, $f \in L^*$. Легко убедиться, что при этом отождествлении бимодульная структура в $\mathcal{B}(L \otimes H)$ переносится на $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ по правилу $(a \cdot \varphi)(b) := a\varphi(b)$, $(\varphi \cdot a)(b) := \varphi(ab)$, $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{S}(L))$, $a \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{S}$. Таким образом, наша задача — показать, что каждый ограниченный морфизм из Y в $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ допускает продолжение до морфизма из Z с сохранением нормы.

Выделим несколько вспомогательных утверждений.

В приведенных ниже леммах Y — произвольный бимодуль Руана.

Разумеется, $\mathcal{S}$ (так же, как $\mathcal{F}$ и само $\mathcal{B}$) является нормированным $\mathcal{B}$ -бимодулем с внешними умножениями, определенными как обычная операторная композиция. Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ плотный нормированный под- $\mathcal{B}$ -бимодуль в $\mathcal{S}$, состоящий из конечномерных операторов (иначе говоря, $\mathcal{B}$ -бимодуль $\mathcal{F}$ с нормой Гильберта–Шмидта).

Рассмотрим нормированное пространство $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \otimes_p \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$. Оно, будучи тензорным произведением левого и правого $\mathcal{B}$ -модулей, является $\mathcal{B}$ -бимодулем, который мы для краткости обозначим через $\mathcal{X}$. Некоторое время нашим основным объектом изучения будет нормированное пространство $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} Y$ — бимодульное

тензорное произведение бимодулей $\mathcal{X}$ и Y , далее обозначаемое через $\mathcal{X}_Y$. Напомним (см. выше), что любой $U \in \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} Y$ есть сумма элементарных тензоров $\sum_{k=1}^n (a_k \otimes b_k) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u_k$, $a_k \otimes b_k \in \mathcal{S}$, $u_k \in Y$, и

$$\|U\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|a_k\| \|b_k\| \|u_k\| \right\}, \quad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям нашего U в виде подобной суммы.

Лемма 1. *Любой $U \in \mathcal{X}_Y$ представим в виде одного элементарного тензора, $U = (a \otimes b) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u$, $a \otimes b \in \mathcal{X}$, $u \in Y$. При этом $\|U\| = \inf \{ \|a\|_{\mathcal{S}} \|b\|_{\mathcal{S}} \|u\| \}$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям элемента U в указанном виде.*

Доказательство. Пусть $U = \sum_{k=1}^n (a_k \otimes b_k) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u_k$ (см. выше). Очевидно, не теряя общности, мы можем считать, что $\|u_k\| = 1$ и $\|a_k\|_{\mathcal{S}} = \|b_k\|_{\mathcal{S}}$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим семейство S_k , $k = 1, \dots, n$, изометрических операторов в L с попарно ортогональными конечными проекторами $P_k := S_k S_k^*$. В такой ситуации, разумеется, выполнены равенства

$$P_k S_k = S_k \text{ и, как следствие, } S_k^* P_k = S_k^* \text{ и } S_k^* S_l = \delta_l^k 1. \quad (2)$$

Положим $u := \sum_{k=1}^n S_k \cdot u_k \cdot S_k^*$, $a := \sum_{k=1}^n S_k a_k$ и $b := \sum_{k=1}^n b_k S_k^*$. Тогда в силу свойств бимодульных тензорных произведений и равенств (2)

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u &= \sum_{k,l,m=1}^n (S_k a_k \otimes b_l S_l^*) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} S_m \cdot u_m \cdot S_m^* \\ &= \sum_{k,l,m=1}^n (a_k \otimes b_l) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} S_l^* S_m \cdot u_m \cdot S_m^* S_k = \sum_{k=1}^n (a_k \otimes b_k) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u_k = U. \end{aligned}$$

Таким образом, первое утверждение леммы доказано, и, значит, фигурирующая в лемме нижняя грань корректно определена; обозначим ее через $\|U\|'$. Из формулы (1) вытекает, что $\|U\| \leq \|U\|'$. Осталось установить обратное неравенство.

Как следует из (2), u есть сумма элементов с попарно ортогональными носителями P_k . Поэтому обе аксиомы Руана вместе дают $\|u\| = 1$. Кроме того, из определения нормы Гильберта–Шмидта и тех же равенств (2) следует, что

$$\|a\|_{\mathcal{S}}^2 = \text{tr}(a^* a) = \text{tr} \left(\sum_{k,l=1}^n a_k^* a_l \right) = \sum_{k=1}^n \text{tr}(a_k^* a_k) = \sum_{k=1}^n \|a_k\|_{\mathcal{S}}^2,$$

и точно так же $\|b\|_{\mathcal{S}}^2 = \sum_{k=1}^n \|b_k\|_{\mathcal{S}}^2$. Тогда, разумеется, $\|a\|_{\mathcal{S}} \|b\|_{\mathcal{S}} \|u\| = \sum_{k=1}^n \|a_k\|_{\mathcal{S}} \|b_k\|_{\mathcal{S}} \|u_k\|$ и, стало быть, $\|U\|' \leq \sum_{k=1}^n \|a_k\|_{\mathcal{S}} \|b_k\|_{\mathcal{S}} \|u_k\|$. Это в силу произвольности исходного представления элемента U и равенства (1), влечет за собой неравенство $\|U\|' \leq \|U\|$. $\square$

Теперь рассмотрим сжимающий оператор $\pi_Y: \mathcal{X}_Y \rightarrow Y$, определенный правилом $(a \otimes b) \otimes_{\mathcal{B}-\mathcal{B}} u \mapsto b \cdot u \cdot a$. Такое определение корректно: при фиксированном $u \in Y$ билинейный оператор $(a, b) \mapsto b \cdot u \cdot a$ порождает линейный оператор

$\pi^u: \mathcal{X} \rightarrow Y$, а с ним сжимающий билинейный оператор $\mathcal{X} \times Y \rightarrow \mathcal{X}_Y: (x, u) \mapsto \pi^u(x)$. Этот последний, как легко проверяется на элементарных тензорах, сбалансирован, а значит, порождает оператор π_Y с требуемыми свойствами.

Лемма 2. Пусть $U \in \mathcal{X}_Y$ представим как $(a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} u$. Тогда существуют операторы $c, d \in \mathcal{F}$, такие, что $U = (a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} w$, где $w = c \cdot \pi_Y(U) \cdot d$ и $\|w\| \leq \|u\|$.

Доказательство. Пусть P — проектор на $\text{Ker}(b)^\perp$, а Q — проектор на $\text{Im}(a)$. Тогда $bP = b$ и $Qa = a$. Отсюда в силу свойств элементарных тензоров в бимодульных тензорных произведениях следует, что $U = (a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} P \cdot u \cdot Q$. Далее, ясно, что существуют $c, d \in \mathcal{F}$, такие, что $cb = P$ и $ad = Q$. Остается положить $w := P \cdot u \cdot Q$. $\square$

Пусть теперь Y и Z — два произвольных бимодуля Руана, а $\alpha: Y \rightarrow Z$ — (тоже пока произвольный) ограниченный морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей. Тогда в силу функториальных свойств бимодульного тензорного произведения возникает оператор $1_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} \alpha: \mathcal{X}_Y \rightarrow \mathcal{X}_Z$, обозначаемый далее через $\alpha_{\mathcal{X}}$. Этот оператор однозначно определен правилом $(a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} u \mapsto (a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} \alpha(u)$, причем $\|\alpha_{\mathcal{X}}\| \leq \|\alpha\|$. Отметим, что для любых $c, d \in \mathcal{B}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \alpha_{\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{X}_Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z \end{array} \quad (3)$$

непосредственно проверяемая на элементарных тензорах в $\mathcal{X}_Y$.

Лемма 3. Если α инъективен, то инъективен и $\alpha_{\mathcal{X}}$.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{X}_Y$ и $\alpha_{\mathcal{X}}(U) = 0$. Тогда из коммутативности предыдущей диаграммы и инъективности морфизма α следует, что $\pi_Y(U) = 0$. Но из этого на основании леммы 2 вытекает, что $U = 0$. $\square$

Мы переходим к самому важному из вспомогательных утверждений.

Лемма 4. Если α — изометрический морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей, то $\alpha_{\mathcal{X}}$ — изометрический оператор.

Доказательство. По условию мы можем считать, что Y является подмодулем в Z с той же нормой, а в силу предыдущей леммы — что $\mathcal{X}_Y$ является подпространством в $\mathcal{X}_Z$. Обозначим нормы в двух последних пространствах через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Помня, что $\alpha_{\mathcal{X}}$ — сжимающий оператор, мы видим, что наша задача — проверить, что для любого $U \in \mathcal{X}_Y$ выполнено неравенство $\|U\|_1 \leq \|U\|_2$.

Понимая U как элемент из $\mathcal{X}_Z$, возьмем его произвольное представление $U = (a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} v$, $v \in Z$, обеспеченное леммой 1. Тогда, согласно лемме 2, $U = (a \otimes b) \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} w$, где $w \in Z$, $\|w\| \leq \|v\|$ и $w = c \cdot \pi_Z(U) \cdot d$, $c, d \in \mathcal{B}$. Поскольку в силу коммутативности диаграммы (3) мы вправе считать π_Y ограничением оператора π_Z на $\mathcal{X}_Y$, $\pi_Z(U)$, а с ним и w , принадлежит Y . Но тогда

$$\|U\|_1 \leq \|a\| \|b\| \|w\| \leq \|a\| \|b\| \|v\|.$$

Теперь в силу произвольности исходного представления U как элемента из $\mathcal{X}_Z$ желаемая оценка $\|U\|_1 \leq \|U\|_2$ вытекает из леммы 1. $\square$

Окончание доказательства теоремы 1. Для любого бимодуля Руана Y обозначим через $\mathbf{h}_Y$ пространство ограниченных морфизмов между $\mathcal{B}$ -бимодулями Y и $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, снабженное операторной нормой. Это пространство мы отождествим с пространством $\mathcal{X}_Y^*$, сопряженным к $\mathcal{X}_Y$, посредством изометрического изоморфизма I_Y , переводящего $\Phi \in \mathbf{h}_Y$ в функционал на $\mathcal{X}_Y$, корректно определенный правилом $a \otimes b \underset{\mathcal{B}-\mathcal{B}}{\otimes} u \mapsto \text{tr}([\Phi(u)](a)b)$.

Действительно, каждый Φ задает трилинейный ограниченный функционал $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times Y \rightarrow \mathbb{C}: (a, b, \Phi) \mapsto \text{tr}([\Phi(u)](a)b)$ или, что эквивалентно, билинейный функционал $\mathcal{R}_{\Phi}: \mathcal{X} \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ той же нормы. Из того, что $\text{tr}([\Phi(u)](a)b)$ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $[\Phi(u)](a)$ и b^* в $\mathcal{S}$, легко следует, что норма исходного трилинейного функционала, а с ней и норма функционала $\mathcal{R}_{\Phi}$, равна $\|\Phi\|$. Далее, $\mathcal{R}_{\Phi}$ является сбалансированным, т. е. удовлетворяет равенствам $\mathcal{R}_{\Phi}(a \cdot x, u) = \mathcal{R}_{\Phi}(x, u \cdot a)$ и $\mathcal{R}_{\Phi}(u \cdot a, y) = \mathcal{R}_{\Phi}(u, a \cdot y)$, $a \in \mathcal{B}$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in Y$ (это легко проверяется на элементарных тензорах в $\mathcal{X} := \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \underset{P}{\otimes} \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$),

и, очевидно, образ отображения $\Phi \mapsto \mathcal{R}_{\Phi}$ содержит все сбалансированные билинейные функционалы. Тем самым, поскольку банахово пространство сбалансированных билинейных функционалов на $\mathcal{X} \times Y$ канонически изометрически изоморфно пространству $\mathcal{X}_Y^*$, требуемый изоморфизм I_Y построен.

Теперь сделаем очевидное наблюдение. Утверждение нашей теоремы (с учетом сделанной ранее замены $\mathcal{B}(L \otimes H)$ на $\mathcal{B}(\mathcal{S})$) эквивалентно тому, что оператор $\alpha^{\bullet}: \mathbf{h}_Z \rightarrow \mathbf{h}_Y$, сопоставляющий каждому морфизму из Z в $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ его ограничение на Y , строго коизометричен, т. е. отображает замкнутый единичный шар в $\mathbf{h}_Z$ на замкнутый единичный шар в $\mathbf{h}_Y$. Но при отождествлении $\mathbf{h}_Z$ с $\mathcal{X}_Z$ и $\mathbf{h}_Y$ с $\mathcal{X}_Y$ посредством изоморфизмов I_Z и I_Y оператор $\alpha^{\bullet}$ превращается в оператор $\alpha_{\mathcal{X}}^*: \mathcal{X}_Z^* \rightarrow \mathcal{X}_Y^*$, сопряженный к $\alpha_{\mathcal{X}}$. Но $\alpha_{\mathcal{X}}^*$ в силу леммы 4 и теоремы Хана–Банаха строго коизометричен. Следовательно, таков же и $\alpha^{\bullet}$. Этим доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

В оставшейся части работы мы сформулируем бескоординатную версию теоремы Арвесона–Виттстока и покажем, что она следует из теоремы 1. В подавляющем большинстве статей и монографий квантовая норма (= структура операторного пространства) в линейном пространстве E задается путем одновременного введения нормы в каждое из пространств матриц всех размерностей с коэффициентами из E . Есть, однако, и другой путь, который на наш (разумеется, субъективный) взгляд приводит к более элегантной и в целом даже более прозрачной картине происходящего. Вместо последовательности норм в пространствах матриц рассматривается одна норма, заданная в тензорном произведении исходного пространства на какую-либо «хорошую» операторную алгебру (ср. [8], [9], [11]). В этой работе в качестве такой алгебры взята $\mathcal{F} = \mathcal{F}(L)$, которая представляется нам наиболее удобной.

Приведем необходимые определения. *Размножением* линейного пространства E называется пространство $\mathcal{F} \otimes E$, далее кратко обозначаемое через $\mathcal{F}E$. (Его удобно мыслить как «пространство формальных линейных комбинаций векторов из E с соответствующими операторными коэффициентами»). Кроме того, элементарные тензоры этого пространства мы будем часто обозначать через ax вместо $a \otimes x$, $a \in \mathcal{F}$, $x \in E$.

Пространство $\mathcal{F}E$ является $\mathcal{B}$ -бимодулем относительно внешних умножений, корректно определенных равенствами $a \cdot bx = (ab)x$ и $bx \cdot a = (ba)x$, $a \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{F}$, $x \in E$.

Квантовая норма или, короче, q -норма в E — это по определению норма в $\mathcal{B}$ -бимодуле $\mathcal{F}E$, превращающая его в бимодуль Руана. Пространство, снабженное q -нормой, называется *квантовым нормированным пространством* или просто *q -пространством*.

Если H — гильбертово пространство, то $\mathcal{F}\mathcal{B}(H)$ наделяется нормой, которая индуцирована вложением этого пространства в $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ по правилу $a \otimes b \mapsto a \dot{\otimes} b$, $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{B}(H)$ ($\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ рассматривается, конечно, с операторной нормой). Легко проверить, что возникает q -норма в $\mathcal{B}(H)$. Полученное q -пространство называется *конкретным*.

Если F — подпространство в q -пространстве E , то, как легко проверить, оно само является q -пространством относительно q -нормы, определенной равенством $\|u\| := \|(1_{\mathcal{F}} \otimes i)(u)\|$, где $i: F \rightarrow E$ — естественное вложение. В такой ситуации мы будем говорить о соответствующем *q -подпространстве*.

Пусть теперь $\varphi: E \rightarrow G$ — оператор между двумя линейными пространствами. Оператор $1_{\mathcal{F}} \otimes \varphi: \mathcal{F}E \rightarrow \mathcal{F}G$ мы будем называть *размножением* оператора φ и кратко обозначать через φ_{∞} . Очевидно, это морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей. Покажем, что и, напротив, *всякий морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей $\Phi: \mathcal{F}E \rightarrow \mathcal{F}G$ есть размножение некоторого $\varphi: E \rightarrow G$* . В соответствующем рассуждении и далее в тексте через $\xi \circ \eta$, где $\xi, \eta \in L$, обозначен одномерный оператор в L , действующий по правилу $\zeta \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle \xi$.

Действительно, если $p := e \circ e$, где $e \in L$, $\|e\| = 1$, — одномерный проектор, и $x \in E$, то, как легко видеть, $\Phi(px) = py$ для некоторого $y \in G$. Тогда отображение $\varphi: E \rightarrow G$, $x \mapsto y$, — это, разумеется, оператор. Тот факт, что $\varphi_{\infty} = \Phi$, легко следует из равенства $\xi \circ \eta = (\xi \circ e)p(e \circ \eta)$ и свойств Φ как морфизма.

В случае когда E и G суть q -пространства, оператор $\varphi: E \rightarrow G$ называется *вполне ограниченным*, если его размножение — ограниченный (в «классическом» смысле) оператор. (Это самое важное понятие во всем квантовом функциональном анализе. Его «матричный» прототип см., например, в [3, с. 23]). Операторная норма $\|\varphi_{\infty}\|$ обозначается также через $\|\varphi\|_{cb}$ и называется *вполне ограниченной нормой* (исходного) оператора φ .

Теорема 2 (бескоординатная версия теоремы Арвесона–Виттстока). *Пусть E есть q -подпространство q -пространства G , а H — произвольное гильбертово пространство. Тогда любой вполне ограниченный оператор φ из E в конкретное q -пространство $\mathcal{B}(H)$ может быть продолжен до вполне ограниченного оператора $\psi: G \rightarrow \mathcal{B}(H)$, такого, что $\|\psi\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{B}(H)$ конкретно, его размножение $\mathcal{F}\mathcal{B}(H)$ очевидным образом отождествляется с нормированным под- $\mathcal{B}$ -бимодулем в $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$. Пусть $\Phi: \mathcal{F}E \rightarrow \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ — копродолжение морфизма φ_{∞} (т.е. морфизм, действующий так же, как φ_{∞} , но с увеличенной областью значений). Тогда теорема 1 в случае, когда $Y := \mathcal{F}E$ и $Z := \mathcal{F}G$, доставляет продолжающий Φ морфизм Ψ той же нормы.

Покажем, что образ морфизма Ψ содержится в $\mathcal{F}\mathcal{B}(H)$. Очевидно, достаточно установить, что для любого одномерного проектора $p = e \circ e$ в L и $z \in \mathcal{F}Z$ оператор $\Psi(pz)$, т.е. $p \cdot \Psi(pz) \cdot p$, имеет вид $p \dot{\otimes} T$, где $T \in \mathcal{B}(H)$. В качестве T

рассмотрим отображение, переводящее $\eta \in L$ в однозначно определенный вектор $\zeta \in L$, удовлетворяющий равенству $[p \cdot \Psi(pz)](e \otimes \eta) = e \otimes \zeta$. Ясно, что это ограниченный оператор в H , который, как легко проверить на элементарных тензорах в $L \otimes H$, обладает нужными свойствами¹⁾.

Итак, Ψ является копродолжением некоторого морфизма между $\mathcal{F}G$ и $\mathcal{F}\mathcal{B}(H)$. Но последний на основании сделанного выше наблюдения имеет вид ψ_∞ для некоторого $\psi : G \rightarrow \mathcal{B}(H)$. Дальнейшее ясно. $\square$

Замечание. Рассматривая случай q -пространств, можно было бы показать, что для $Y := \mathcal{F}E$ пространство $\mathcal{X}_Y := \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \mathcal{F}E$ совпадает, с точностью до линейного изоморфизма, с пространством $\mathcal{F}(H) \otimes E$. Этот изоморфизм однозначно определен правилом $(a \otimes b) \otimes dx \mapsto (bda) \otimes x$, $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}}(H, L^c)$, $b \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}}(L^c, H)$, $d \in \mathcal{F}$, $x \in E$. В частности, если $H = L$, то $\mathcal{X}_Y$ совпадает как линейное пространство с $\mathcal{F}E$, но его норма, вообще говоря, сильнее исходной q -нормы в E . Эти факты, однако, нам не понадобились.

В заключение нам хотелось бы выразить свою признательность обоим рецензентам за их замечания и предложения, способствовавшие улучшению качества работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^* -algebras*, Acta Math., **123** (1969), 141–224.
- [2] E. G. Effros, *Advances in quantized functional analysis*, in: Proc. ICM (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 906–916.
- [3] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 2000.
- [4] V. I. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [5] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004.
- [6] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986.
- [7] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989.
- [8] G. Pisier, *Introduction to Operator Space Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [9] A. Ya. Helemskii, *Tensor products in quantum functional analysis: non-matricial approach*, in: Proc. of the Conference “Topological Algebras and Applications 2005”, Contemp. Math., vol. 427, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 199–224.
- [10] G. Wittstock, *Ein operatorvertiger Hahn-Banach Satz*, J. Funct. Anal., **40** (1981), 127–150.
- [11] А. Я. Хелемский, *Квантовые версии векторной двойственности и экспоненциального закона в рамках безматричного подхода*, Матем. сб., **197**:12 (2006), 133–156.

Московский государственный университет
e-mail: helemskii@comail.ru

Поступило в редакцию
19 февраля 2007 г.

¹⁾ Из этого рассуждения видно, что $p \cdot \mathcal{B}(L \otimes H) \cdot p \subseteq \mathcal{F}\mathcal{B}(H)$. Любопытно, что утверждение « $p \cdot \mathcal{B}(L \otimes H) \subseteq \mathcal{F}\mathcal{B}(H)$ » уже неверно. А именно, если $\{e'_n\}$ и $\{e''_n\}$ — ортонормированные системы в L и H , а $S \in \mathcal{B}(L \otimes H)$ — оператор, переводящий $e'_n \otimes e''_n$ в $e \otimes e''_n$, $n \in \mathbb{N}$, то $p \cdot S$ не принадлежит $\mathcal{F}\mathcal{B}(H)$.