Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Брешар, Э. В. Киссин, В. С. Шульман, О йордановых идеалах и подмодулях: алгебраический и аналитический аспекты, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 71–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:24:14

О йордановых идеалах и подмодулях: алгебраический и аналитический аспекты

© 2008. М. БРЕШАР, Э. В. КИССИН, В. С. ШУЛЬМАН

1. Введение. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F , характеристика которого не равна двум. Линейное подпространство $\mathcal{J}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется ее *йордановым идеалом*, если

$$a \circ b := ab + ba \in \mathcal{J} \text{ для всех } a \in \mathcal{A} \text{ и } b \in \mathcal{J}. \quad (1)$$

Во многих случаях все йордановы идеалы алгебры оказываются ее обычными (двусторонними) идеалами. Такие алгебры называются *свободными от йордановых идеалов* или, сокращенно, JIF-алгебрами. Начиная с фундаментальных работ Херстейна [4] и Джекобсона–Рикарта [5], изучались условия на алгебру, обеспечивающие ее принадлежность к классу JIF-алгебр. Было показано, что этот класс содержит все простые алгебры [4], все матричные алгебры $M_n(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ унитарна [5], все W^* -алгебры (для собственно бесконечных W^* -алгебр это было установлено в [3]; общий случай был рассмотрен в [1] и в неопубликованной работе Л. Бунса) и многие другие важные примеры.

Будем обозначать через $\text{Alg}([\mathcal{A}, \mathcal{A}])$ (соответственно через $\text{Id}([\mathcal{A}, \mathcal{A}])$) подалгебру (соответственно идеал) в $\mathcal{A}$, порожденный всеми коммутаторами $[a, b] = ab - ba$, где $a, b \in \mathcal{A}$. В [1] было показано, что класс JIF-алгебр содержит все алгебры, порожденные коммутаторами, т.е. алгебры, удовлетворяющие условию

$$\mathcal{A} = \text{Alg}([\mathcal{A}, \mathcal{A}]). \quad (2)$$

Пусть теперь X — бимодуль над $\mathcal{A}$. Подпространство Y в X называется *йордановым $\mathcal{A}$ -подмодулем* бимодуля X , если

$$a \circ y := ay + ya \in Y \text{ для всех } a \in \mathcal{A} \text{ и } y \in Y.$$

Йордановы $\mathcal{A}$ -подмодули самой алгебры $\mathcal{A}$ — это ее йордановы идеалы. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ *свободна от йордановых подмодулей* (или, сокращенно, является JSF-алгеброй), если все йордановы $\mathcal{A}$ -подмодули любого $\mathcal{A}$ -бимодуля являются его подбимодулями. Оказывается, что многие условия, достаточные для включения $\mathcal{A}$ в класс JIF-алгебр, обеспечивают и более сильное свойство быть JSF-алгеброй.

Подход, основанный на рассмотрении бимодулей, более удобен технически; кроме того, будучи более общим, он имеет более широкие приложения. Так, информация о строении йордановых $\mathcal{A}$ -подмодулей может быть использована для описания йордановых идеалов всех алгебр, содержащих $\mathcal{A}$.

Существуют естественные банахово-алгебраические аналоги рассмотренных выше понятий и задач. Среди имеющихся на этот счет результатов наиболее значительным является теорема Сивина–Юда [2], утверждающая, что все замкнутые йордановы идеалы произвольной C^* -алгебры являются идеалами.

Одной из причин, заставивших нас обратиться к изучению йордановых идеалов и подмодулей, явилась обнаруженная в [6] их связь с теорией операторно-гладких функций. Здесь важны так называемые симметрично-нормированные (с.-н.) йордановы идеалы (точное определение см. ниже). В [6] было показано,

что в алгебрах $B(H)$ и $K(H)$ всех ограниченных и соответственно компактных операторов на гильбертовом пространстве H все с.-н. йордановы идеалы являются идеалами.

В настоящей работе рассматривается как чисто алгебраический, так и банахово-алгебраический варианты. В частности, даны необходимые и достаточные условия, при которых алгебра является JSF-алгеброй. Доказано, что если C^* -алгебра не имеет мультипликативных функционалов, то все ее с.-н. йордановы идеалы являются с.-н. идеалами. Дан ответ (отрицательный) на вопрос о том, всякий ли йорданов идеал C^* -алгебры является идеалом.

2. Алгебраические результаты. Условимся говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ обладает свойством *максимальности* (является *мах-алгеброй*), если любой собственный идеал содержится в максимальном собственном идеале. Например, если у $\mathcal{A}$ есть конечное подмножество, не содержащееся ни в каком собственном идеале, то она является мах-алгеброй. Таким образом, все унитарные, все простые и все конечно порожденные алгебры обладают свойством максимальнойности.

Теорема 1. *Рассмотрим следующие условия на алгебру $\mathcal{A}$:*

- (i) $\mathcal{A}$ является JSF-алгеброй;
- (ii) $\text{Id}([\mathcal{A}, \mathcal{A}]) = \mathcal{A}$;
- (iii) $\text{Alg}([\mathcal{A}, \mathcal{A}]) = \mathcal{A}$;
- (iv) $\text{Id}([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Тогда (iv) $\iff$ (iii) $\implies$ (i) $\implies$ (ii).

Если $\mathcal{A}$ обладает свойством максимальнойности, то условия (i)–(iv) эквивалентны.

Легко видеть, что (ii) эквивалентно отсутствию в $\mathcal{A}$ идеалов с коммутативной факторалгеброй.

Поскольку для некоммутативных простых алгебр условие (ii) выполнено, из теоремы 1 вытекает следующее обобщение упомянутого во введении результата Херстейна:

Следствие 2. *Все некоммутативные простые алгебры являются JSF-алгебрами.*

Принимая во внимание, что унитарные коммутативные банаховы алгебры имеют мультипликативные функционалы, получаем

Следствие 3. *Для унитарной банаховой алгебры каждое из условий (i)–(iv) теоремы 1 эквивалентно отсутствию мультипликативных функционалов.*

Пусть $\mathcal{G}$ — грассманова алгебра со счетным множеством $\{x_1, x_2, \dots\}$ образующих ($x_i x_j + x_j x_i = 0$), и пусть $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный всеми элементами вида

$$x_i - x_{3i-1} x_{3i} x_{3i+1} = x_i - \frac{1}{2} [x_{3i-1}, x_{3i}] x_{3i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Можно доказать, что $\mathcal{A} = \mathcal{G} / \mathcal{I}$ не является JSF-алгеброй и даже JIF-алгеброй. Однако $\mathcal{A}$ не имеет идеалов с коммутативным фактором. Таким образом, условие (ii) теоремы 1, вообще говоря, не влечет за собой (i).

3. Банаховы алгебры. Пусть теперь $\mathcal{A}$ — банахова алгебра. В этом случае естественно рассматривать класс банаховых $\mathcal{A}$ -бимодулей, т. е. банаховых пространств X , являющихся $\mathcal{A}$ -бимодулями, причем

$$\|ax\|_X \leq \|a\| \|x\|_X \text{ и } \|xa\|_X \leq \|a\| \|x\|_X \text{ для всех } a \in \mathcal{A} \text{ и } x \in X. \quad (3)$$

Будем говорить, что $\mathcal{A}$ топологически свободна от йордановых подмодулей (является TJSF-алгеброй), если любой замкнутый йорданов подмодуль произвольного банахова $\mathcal{A}$ -бимодуля является его подбимодулем.

Ясно, что любая банахова JSF-алгебра входит в класс TJSF-алгебр. Обратное включение неверно: например, все идеалы Шэттена C_p являются TJSF-, но не JSF-алгебрами. Однако для унитарных алгебр, как мы сейчас увидим, эти классы совпадают.

Следующая теорема является банахово-алгебраической версией теоремы 1. Отметим, что рассматриваемые в ней условия (i)–(iv) слабее соответствующих алгебраических условий из теоремы 1.

Теорема 4. *Рассмотрим следующие условия на банахову алгебру $\mathcal{A}$:*

- (i) $\mathcal{A}$ топологически свободна от йордановых подмодулей;
- (ii) $\overline{\text{Id}([\mathcal{A}, \mathcal{A}])} = \mathcal{A}$;
- (iii) $\overline{\text{Alg}([\mathcal{A}, \mathcal{A}])} = \mathcal{A}$;
- (iv) $\overline{\text{Id}([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A})} = \mathcal{A}$;
- (v) $\mathcal{A}$ не имеет мультипликативных функционалов.

Тогда (iv) $\iff$ (iii) $\implies$ (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (v).

Для унитарных алгебр, а также для всех C^* -алгебр условия (i)–(v) эквивалентны.

Вообще говоря, из (v) не следует (ii) (в качестве примера можно взять любую нильпотентную банахову алгебру). Однако для сравнительно «хороших» неунитарных алгебр вопрос открыт; более того, он эквивалентен известной проблеме существования замкнутого идеала:

Предложение 5. *Пусть $\mathbb{A}$ — класс всех банаховых алгебр $\mathcal{A}$, у которых всякий замкнутый идеал содержится в максимальном замкнутом идеале. Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) импликация (v) $\implies$ (ii) (для условий из теоремы 4) справедлива для всех $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$;
- (ii) всякая коммутативная топологически простая банахова алгебра одномерна.

4. Симметрично-нормированные йордановы подмодули в бимодулях над C^* -алгебрами. Напомним, что идеал J банаховой алгебры $\mathcal{A}$ называется симметрично-нормированным (с.-н.), если он является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_J$, причем существует число $D > 0$, такое, что

$$\|axb\|_J \leq D\|a\|\|b\|\|x\|_J \text{ для всех } a, b \in \mathcal{A} \text{ и } x \in J.$$

Аналогично, йорданов идеал J банаховой алгебры $\mathcal{A}$ называется с.-н. йордановым идеалом, если он наделен нормой $\|\cdot\|_J$, относительно которой является банаховым пространством, и при некотором $D > 0$

$$\|a \circ x\|_J \leq D\|a\|\|x\|_J \text{ для всех } a \in \mathcal{A} \text{ и } x \in J.$$

Отметим, что если с.-н. йорданов идеал является идеалом, это еще не означает, что он является с.-н. идеалом.

Аналогично определяются с.-н. йордановы подбимодули в бимодулях над банаховыми алгебрами.

Очевидно, что все замкнутые йордановы $\mathcal{A}$ -подмодули в банаховом модуле X являются с.-н. йордановыми подмодулями по отношению к норме $\|\cdot\|_X$. Об-

ратное, однако, неверно. Например, $B(H)$ как банахов $B(H)$ -бимодуль имеет только один нетривиальный замкнутый йорданов подбимодуль $K(H)$, но, в то же время, он обладает множеством с.-н. идеалов с разнообразными алгебраическими и аналитическими свойствами.

Мы рассмотрим условия, которым должна удовлетворять алгебра $\mathcal{A}$ для того, чтобы любой с.-н. йорданов подмодуль $(Y, \|\cdot\|_Y)$ любого банахова $\mathcal{A}$ -бимодуля являлся банаховым $\mathcal{A}$ -бимодулем (относительно нормы $\|\cdot\|_Y$).

Чтобы сформулировать эти условия, нам нужен количественный вариант свойства алгебры быть порожденной коммутаторами. Пусть

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{[a, b] : a, b \in \mathcal{A}, \|a\| \leq 1, \|b\| \leq 1\}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{A}$ принадлежит классу $\mathcal{L}$, если существует такое число $t > 0$, что замкнутая выпуклая оболочка мультипликативной подполугруппы в $\mathcal{A}$, порожденной $t\mathcal{L}(\mathcal{A})$, содержит некоторый шар алгебры $\mathcal{A}$.

Класс $\mathcal{L}$ содержит, например, все алгебры вида $M_n(B)$, где B — произвольная унитарная банахова алгебра.

Теорема 6. *Если $\mathcal{A}$ принадлежит классу $\mathcal{L}$, то всякий с.-н. йорданов $\mathcal{A}$ -подмодуль любого банахова $\mathcal{A}$ -бимодуля является банаховым $\mathcal{A}$ -бимодулем.*

Оказывается, что для C^* -алгебры принадлежность классу $\mathcal{L}$ эквивалентна отсутствию мультипликативных функционалов. Таким образом, мы получаем следующий критерий:

Теорема 7. *Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

- (i) $\mathcal{A}$ не имеет мультипликативных функционалов;
- (ii) все с.-н. йордановы подмодули любого банахова $\mathcal{A}$ -бимодуля являются банаховыми $\mathcal{A}$ -бимодулями.

Менее ясна ситуация с с.-н. йордановыми идеалами C^* -алгебр. Понятно ввиду предыдущей теоремы, что если C^* -алгебра не имеет мультипликативных функционалов, то ее с.-н. йордановы идеалы являются с.-н. идеалами. Оказывается, что в случае, когда мультипликативные функционалы существуют, с.-н. йордановы идеалы могут не быть идеалами (это тем более неожиданно, что до сих пор не было известно примеров нетривиальных йордановых идеалов C^* -алгебр).

Теорема 8. *Существует C^* -алгебра $\mathcal{A}$, являющаяся коммутативным расширением алгебры $K(H)$ и имеющая с.-н. йорданов идеал, не являющийся идеалом.*

Доказательство основано на простой алгебраической конструкции. Пусть $\mathcal{B}$ — алгебра и I — ее идеал. Пусть существует такой $X \in \mathcal{B} \setminus I$, что $BX \in I$ и $XB \in I$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Понятно, что в таком случае алгебра $\mathcal{B}$ не унитарна. Обозначив через $\tilde{\mathcal{B}}$ ее унитарлизацию $\mathcal{B} + \mathbb{C}1$, положим

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : B, C \in \mathcal{B} \text{ и } A, D \in \tilde{\mathcal{B}} \right\}.$$

Пусть, далее,

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} : R, S, T, U \in I, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Прямой подсчет показывает, что J — йорданов идеал алгебры $\mathcal{A}$, не являющийся, однако, ее идеалом, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J.$$

Если $\mathcal{B}$ является C^* -алгеброй, то и $\mathcal{A}$ можно считать C^* -алгеброй.

Возьмем теперь в качестве $\mathcal{B}$ алгебру $K(H)$. Хорошо известно, что если I_1 — несепарабельный с.-н. идеал в $\mathcal{B}$, а I — его сепарабельная часть (замыкание множества всех операторов конечного ранга из I_1), то $\mathcal{B}I_1 \subset I$ и $I_1\mathcal{B} \subset I$. Поэтому в качестве X можно взять любой самосопряженный оператор из $I_1 \setminus I$. Алгебра $\mathcal{A}$ совпадает с $K(H \oplus H) + \mathbb{C}P + \mathbb{C}1$, где P — проектор на первое слагаемое в $H \oplus H$, так что $\mathcal{A}$ является коммутативным расширением алгебры $K(H \oplus H)$. Унитарно-инвариантная норма на J естественно индуцируется нормой идеала I_1 .

Заметим, что поскольку идеал I в предыдущей конструкции является сепарабельной частью несепарабельного с.-н. идеала, он (а следовательно, и построенный по нему йорданов идеал J) не может быть рефлексивным. Наш последний результат показывает необходимость такого геометрического ограничения.

Теорема 9. *Если с.-н. йорданов идеал J C^* -алгебры $\mathcal{A}$ рефлексивен как банахово пространство (в норме $\|\cdot\|_J$), то он является с.-н. идеалом этой алгебры.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Brešar, A. Fošner, M. Fošner, Monatsh. Math., **145** (2005), 1–10. [2] P. Civin, B. Yood, Pacific J. Math., **15** (1965), 775–797. [3] C. K. Fong, G. J. Murphy, Acta Sci. Math., **51** (1987), 441–456. [4] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, The University of Chicago Press, Chicago, 1969. [5] N. Jacobson, C. E. Rickart, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), 479–502. [6] E. Kissin, V. S. Shulman, Quart. J. Math., **57:2** (2006), 215–239.

Department of Mathematics and Computer Sciences,
University of Maribor
e-mail: bresar@uni-mb.si

Поступило в редакцию
24 декабря 2006 г.

Department of Computing, Communication Technology
and Mathematics, London Metropolitan University
e-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Вологодский технический университет,
кафедра высшей математики
e-mail: shulman_v@yahoo.com

УДК 517.545+517.938+517.987

О мере с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов*

© 2008. А. И. БУФЕТОВ, Б. М. ГУРЕВИЧ

Для целого числа $g \geq 2$ и неупорядоченного набора $\kappa = (k_1, \dots, k_m)$ с $k_i \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_m = 2g - 2$, обозначим через $\mathcal{M}_\kappa$ пространство модулей римановых поверхностей рода g , снабженных голоморфными абелевыми дифференциалами ω с нулями порядка $k_1, \dots, k_m$ и с $(1/2i) \int \omega \wedge \bar{\omega} = 1$. Пространство $\mathcal{M}_\kappa$ не

*Работа первого автора поддержана грантом NSF no. 0604386 и Фондом Эдгара Оделла Ловетта в университете Райса; работа второго автора поддержана грантами РФФИ 07-01-00203 и 07-01-92215-НЦНИЛ.