Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич, О мере с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 75–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:14:46

Если $\mathcal{B}$ является C^* -алгеброй, то и $\mathcal{A}$ можно считать C^* -алгеброй.

Возьмем теперь в качестве $\mathcal{B}$ алгебру $K(H)$. Хорошо известно, что если I_1 — несепарабельный с.-н. идеал в $\mathcal{B}$, а I — его сепарабельная часть (замыкание множества всех операторов конечного ранга из I_1), то $\mathcal{B}I_1 \subset I$ и $I_1\mathcal{B} \subset I$. Поэтому в качестве X можно взять любой самосопряженный оператор из $I_1 \setminus I$. Алгебра $\mathcal{A}$ совпадает с $K(H \oplus H) + \mathbb{C}P + \mathbb{C}1$, где P — проектор на первое слагаемое в $H \oplus H$, так что $\mathcal{A}$ является коммутативным расширением алгебры $K(H \oplus H)$. Унитарно-инвариантная норма на J естественно индуцируется нормой идеала I_1 .

Заметим, что поскольку идеал I в предыдущей конструкции является сепарабельной частью несепарабельного с.-н. идеала, он (а следовательно, и построенный по нему йорданов идеал J) не может быть рефлексивным. Наш последний результат показывает необходимость такого геометрического ограничения.

Теорема 9. *Если с.-н. йорданов идеал J C^* -алгебры $\mathcal{A}$ рефлексивен как банахово пространство (в норме $\|\cdot\|_J$), то он является с.-н. идеалом этой алгебры.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Brešar, A. Fošner, M. Fošner, Monatsh. Math., **145** (2005), 1–10. [2] P. Civin, B. Yood, Pacific J. Math., **15** (1965), 775–797. [3] C. K. Fong, G. J. Murphy, Acta Sci. Math., **51** (1987), 441–456. [4] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, The University of Chicago Press, Chicago, 1969. [5] N. Jacobson, C. E. Rickart, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), 479–502. [6] E. Kissin, V. S. Shulman, Quart. J. Math., **57:2** (2006), 215–239.

Department of Mathematics and Computer Sciences,
University of Maribor
e-mail: bresar@uni-mb.si

Поступило в редакцию
24 декабря 2006 г.

Department of Computing, Communication Technology
and Mathematics, London Metropolitan University
e-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Вологодский технический университет,
кафедра высшей математики
e-mail: shulman_v@yahoo.com

УДК 517.545+517.938+517.987

О мере с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов*

© 2008. А. И. БУФЕТОВ, Б. М. ГУРЕВИЧ

Для целого числа $g \geq 2$ и неупорядоченного набора $\kappa = (k_1, \dots, k_m)$ с $k_i \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_m = 2g - 2$, обозначим через $\mathcal{M}_\kappa$ пространство модулей римановых поверхностей рода g , снабженных голоморфными абелевыми дифференциалами ω с нулями порядка $k_1, \dots, k_m$ и с $(1/2i) \int \omega \wedge \bar{\omega} = 1$. Пространство $\mathcal{M}_\kappa$ не

*Работа первого автора поддержана грантом NSF no. 0604386 и Фондом Эдгара Оделла Ловетта в университете Райса; работа второго автора поддержана грантами РФФИ 07-01-00203 и 07-01-92215-НЦНИЛ.

обязано быть связным, и мы обозначим через $\mathcal{H}$ его произвольную связную компоненту.

Геодезический поток Тейхмюллера g_t на $\mathcal{H}$, впервые изучавшийся Мазуром [7] и Вичем [9] (см. также [10], [11]), индуцируется своим действием на множестве пар $(\mathcal{C}, \omega)$, где $\mathcal{C}$ — комплексная структура на компактной поверхности S рода g и ω — голоморфный абелев дифференциал, по формуле $g_t(\mathcal{C}, \omega) = (\mathcal{C}', \omega')$, где $\omega' = e^t \operatorname{Re}(\omega) + ie^{-t} \operatorname{Im}(\omega)$, а комплексная структура $\mathcal{C}'$ однозначно задается условием, что форма ω' голоморфна. По теореме Хаббарда–Мазура [4] пространство $\mathcal{H}$ допускает локальное отождествление с пространством относительных когомологий $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{C})$, где $p_1, \dots, p_m$ — нули дифференциала ω . Мера Лебега на $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{C})$, нормированная условием, что решетка $H^1(S, \{p_1, \dots, p_m\}, \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ имеет кообъем 1, индуцирует при указанном локальном отождествлении g_t -инвариантную конечную меру на $\mathcal{H}$ (определенную глобально). Пронормировав ее, получим вероятностную меру μ_κ (см. [7], [10], [5]). Поток $(\mathcal{H}, g_t, \mu_\kappa)$ является K -поток с энтропией $h_{\mu_\kappa}(g_t) = 2g - 1 + m$ (см. [10]). Основной результат настоящей заметки состоит в следующем.

Теорема 1. *Поток Тейхмюллера на $\mathcal{H}$ обладает единственной мерой с максимальной энтропией — эта мера есть μ_κ .*

Наметим путь доказательства теоремы 1. С пространством $\mathcal{H}$ можно связать класс Розы $\mathcal{R}$ (см. [8], [9]), образованный перестановками конечного множества, пространство Вича $V(\mathcal{R})$ «зашнурованных прямоугольников» (zippered rectangles) и поток p^t на $V(\mathcal{R})$ ([9], см. также [6]). В [9] фактически доказано следующее утверждение: существует борелевское отображение $\pi_{\mathcal{R}}: V(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{H}$, для которого: (а) число прообразов каждой точки из $\mathcal{H}$ конечно; (б) $\pi_{\mathcal{R}} \circ p^t = g_t \circ \pi_{\mathcal{R}}$; (с) образ $\pi_{\mathcal{R}}(V(\mathcal{R}))$ содержит все рекуррентные траектории потока g_t ; (д) существует p^t -инвариантная вероятностная мера $\mu^{\mathcal{R}}$ на $V(\mathcal{R})$, положительная на всех открытых множествах и такая, что $(\pi_{\mathcal{R}})_* \mu^{\mathcal{R}} = \mu_\kappa$, $h_{\mu^{\mathcal{R}}}(p^t) = 2g - 1 + m$. В силу свойств (а)–(с) для всякой g_t -инвариантной эргодической вероятностной меры ξ на $\mathcal{H}$ найдется p^t -инвариантная мера η на $V(\mathcal{R})$, такая, что $(\pi_{\mathcal{R}})_* \eta = \xi$. При этом в силу эргодичности меры ξ поток $(V(\mathcal{R}), p^t, \eta)$ является косым произведением с конечным слоем над потоком $(\mathcal{H}, g_t, \xi)$. По формуле Абрамова–Рохлина [1] $h_\eta(g_t) = h_\xi(p^t)$. Поэтому достаточно доказать, что $\mu^{\mathcal{R}}$ — единственная мера с максимальной энтропией потока p^t . Для этого можно воспользоваться символическим представлением потока p^t . Существует счетное семейство p^t -инвариантных борелевских множеств $\Omega_i \subset V(\mathcal{R})$, такое, что: 1) при каждом i поток $p^t|_{\Omega_i}$ борелевски изоморфен специальному потоку над топологическим сдвигом Бернулли со счетным алфавитом, построенному по некоторой непрерывной функции f_i ; 2) всякая вероятностная p^t -инвариантная эргодическая мера сосредоточена на некотором Ω_i ; 3) $\mu^{\mathcal{R}}(\Omega_i) = 1$ при всех i . Остается доказать, что $\mu^{\mathcal{R}}$ — единственная мера с максимальной энтропией потока $p^t|_{\Omega_i}$. Это делается с помощью формулируемой ниже теоремы 2.

Топологический сдвиг Бернулли со счетным алфавитом A — это левый сдвиг T в пространстве $X = A^{\mathbb{Z}}$ бесконечных двусторонних последовательностей элементов из A . Поставим в соответствие каждому слову $w = (v_1, \dots, v_n) \in A^n$ цилиндрическое множество $C_w = \{x \in X : (x_0, \dots, x_{n-1}) = w\}$. Назовем слово w простым, если не существует положительного $k < n$, для которого $(v_1, \dots, v_k) = (v_{n-k+1}, \dots, v_n)$. Для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ положим $\operatorname{var}_n(f) =$

$\sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i \text{ при } |i| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что f имеет суммируемые вариации, если $\sum_{n=1}^{\infty} \text{var}_n(f) < \infty$, и что f зависит только от будущего, если $f(x) = f(y)$, коль скоро $x_i = y_i$ при всех $i \geq 0$. Для специального потока (X^f, S_t) (с фазовым пространством X^f), построенного над (X, T) с помощью функции $f > 0$, определенной на X , и для множества $B \subset X$ положим $\tau(B, x) = \inf\{t > 0 : S_t(x, 0) \in B \times \{0\}\}$, $x \in X$.

Теорема 2. Пусть (X, T) — топологический сдвиг Бернулли со счетным алфавитом, $f: X \rightarrow [c, \infty)$, $c > 0$, — функция с суммируемыми вариациями, зависящая только от будущего, и (X^f, S_t) — специальный поток над (X, T) , построенный с помощью f . Пусть μ есть T -инвариантная вероятностная мера на X и μ^f — индуцированная ею S_t -инвариантная вероятностная мера на X^f . Предположим, что μ положительна на всех открытых множествах в X и что для всякого простого слова w , всякого слова $\hat{w}$, не содержащего w , и μ -почти всякого $x \in C_{w\hat{w}w}$ справедлива оценка

$$|\mu(C_{w\hat{w}w})/\mu(C_w) - e^{-s\tau(C_w, x)}| \leq e^{-\alpha|w| - s\tau(C_w, x)}, \quad (1)$$

где s — энтропия потока (X^f, S_t, μ^f) , $\tau(C_w, x)$ определено выше, $|w|$ — длина слова w и α — положительная константа (не зависящая от w , $\hat{w}$). Тогда μ^f — единственная мера с максимальной энтропией потока (X^f, S_t) .

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 потому, что функции, определяющие специальные потоки, изоморфные каждому $p^t|_{\Omega_i}$, удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 2 на f . Заметим, что условие (1) связано с равномерным растяжением условных мер на неустойчивых слоях (свойство Маргулиса). В доказательстве же самой теоремы 2 используется аппроксимация функции с суммируемыми вариациями функциями конечного числа координат; при этом единственность легко вывести из теоремы Буззи и Сарига [3], согласно которой у функции, удовлетворяющей условиям теоремы 2, не может быть двух равновесных состояний, т.е. вероятностных T -инвариантных мер на X , максимизирующих разность $h_\nu(T) - \nu(f)$ ($h_\nu(T)$ — энтропия сдвига T) по всем таким мерам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. М. Абрамов, В. А. Рохлин, Вестн. ЛГУ, №2, вып. 7, 1962, 5–13. [2] A. I. Bufetov, J. Amer. Math. Soc., **19**:3 (2006), 579–623. [3] J. Buzzi, O. Sarig, Ergodic Theory Dynam. Systems, **23**:5 (2003), 1383–1400. [4] J. Hubbard, H. Masur, Acta. Math., **142**:3–4 (1979), 221–274. [5] M. Kontsevich, in: The Mathematical Beauty of Physics, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, 318–332. [6] M. Kontsevich, A. Zorich, Invent. Math., **153**:3 (2003), 631–678. [7] H. Mazur, Ann. of Math. (2), **115**:1 (1982), 169–200. [8] G. Rauzy, Acta Arith., **34**:4 (1979), 315–328. [9] W. Veech, Ann. of Math. (2), **115**:1 (1982), 201–242. [10] W. Veech, Ann. of Math. (2), **124**:3 (1986), 441–530. [11] A. Zorich, in: Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1. On Random Matrices, Zeta Functions, and Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 437–583.

Университет Райса, Хьюстон
e-mail: abufetov@mccme.ru

Поступило в редакцию
29 января 2007 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
ИППИ им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: gurevich@mech.math.msu.su