Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, Возмущения сильно непрерывных полугрупп операторов и матричные веса Макенхаупта, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 85–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 07:57:14

УДК 517.98

Возмущения сильно непрерывных полугрупп операторов и матричные веса Макенхаупта*

© 2008. Г. М. ГУБРЕЕВ, Ю. Д. ЛАТУШКИН

К столетию М. Г. Крейна

В этой работе функциональные модели несамосопряженных операторов и техника матричных весов Макенхаупта применяются к теории однопараметрических полугрупп операторов в гильбертовых пространствах.

1. w -возмущения линейных операторов. Пусть A, A_0 — линейные неограниченные плотно заданные и непрерывно обратимые операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, причем имеет место равенство

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (1)$$

где $f_k, g_k \in \mathfrak{H}$ ($1 \leq k \leq n$), а скобки обозначают скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Будем предполагать, что оператор A_0 принадлежит классу $\Sigma^{(\text{exp})}$, т.е.

а) A_0 не имеет спектра и генерирует C_0 -полугруппу $V_+(t) := \exp\{iA_0 t\}$, $t \geq 0$ [1];

б) целая оператор-функция $(A_0 - zI)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип роста.

Значительный интерес представляет задача описания систем векторов $\{f_k\}_1^n$, $\{g_k\}_1^n$, таких, что оператор A , связанный с $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ равенством (1), генерирует C_0 -полугруппу $U_+(t) := \exp\{iAt\}$ или C_0 -полугруппу $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$. В этой заметке мы выделяем класс конечномерных возмущений A , удовлетворяющих соотношению (1), в котором сформулированная задача находит свое решение.

Почти всюду положительный $(n \times n)$ -матричный вес на вещественной оси будем обозначать через $w^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Далее, через $\mathcal{M}_n^2$ обозначается класс матричных весов w^2 , удовлетворяющих (A_2) -условию Макенхаупта [2]

$$\sup_{\Delta} \|(M(w^{-2}))^{1/2}(M(w^2))^{1/2}\| < \infty, \quad (A_2)$$

где $M(w^{\pm 2}) := |\Delta|^{-1} \int_{\Delta} w^{\pm 2}(x) dx$, Δ — произвольный интервал на $\mathbb{R}$ и $|\Delta|$ — его длина. По оператору $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ и векторам $\{g_k\}_1^n$ построим n -мерную строку

$$\mathcal{A}_0(z, h) := \text{row}\{(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_k, h)\}_1^n, \quad h \in \mathfrak{H}, z \in \mathbb{C},$$

и примем следующее определение.

Определение 1. Пусть операторы A, A_0 связаны равенством (1). Будем говорить, что A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ ранга n , если существует вес w^2 класса $\mathcal{M}_n^2$, такой, что выполняются следующие условия:

1) для каждого $h \in \mathfrak{H}$ функция $\|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$;

*Первый автор получал поддержку в рамках госбюджетной темы Украины, номер 0107U000937.

2) существует константа $m > 0$, такая, что

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|^2 dx, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Построим примеры w -возмущений операторов A_0 класса $\Sigma^{(\text{exp})}$. Пусть θ — целая внутренняя в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ $n \times n$ -матрица-функция, нормированная условием $\theta(0) = E_n$ ([3], [5]; в работе [5, с. 54] приведено мультипликативное представление матрицы-функции θ). Множество таких матриц-функций (м.-ф.) будем обозначать через J_n . Пусть также $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ — класс Харди $\mathbb{C}^n$ -значных вектор-функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. В модельном пространстве

$$\mathcal{H}_\theta := H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \theta H_+^2(\mathbb{C}^n) \quad (2)$$

рассмотрим оператор B ,

$$Bh := z^{-1}(h(z) - \theta(z)h(0)), \quad h \in \mathcal{H}_\theta, \quad (3)$$

который имеет тривиальное ядро, причем $\sigma(B) = \{0\}$ и $(B - B^*)/i \leq 0$ (антидиссипативность). Поскольку элементы пространства $\mathcal{H}_\theta$ суть целые вектор-функции, то оператор B формулой (3) определен корректно. Уместно напомнить ([3, с. 310], [6, с. 91]), что для каждого антидиссипативного вольтеррова оператора B с тривиальным ядром и n -мерной мнимой частью существует такая м.-ф. $\theta \in J_n$ (характеристическая м.-ф. оператора B^*), что B унитарно эквивалентен оператору вида (2), (3). Далее, для каждого веса $V^2 \in \mathcal{M}_n^2$ существует внешняя [3] в $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) м.-ф. V_+ (V_-), такая, что [2]

$$V^2(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} V_+^*(x+i0)V_+(x+i0) \stackrel{\text{п.б.}}{=} V_-^*(x-i0)V_-(x-i0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

где через $V_+(x+i0)$ ($V_-(x-i0)$) обозначены некасательные предельные значения м.-ф. $V_+(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$ ($V_-(z)$, $z \in \mathbb{C}_-$) на вещественной оси. Обе м.-ф. определяются с точностью до левого постоянного унитарного множителя, и элементы матрицы $V_+(z)(z+i)^{-1}$ ($V_-(z)(z-i)^{-1}$) принадлежат H_+^2 (H_-^2).

Рассмотрим в $\mathcal{H}_\theta$ систему векторов

$$G_k := (I + iB)^{-1} \mathbb{P}_\theta \frac{V_+^k(x+i0)}{x+i}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5)$$

где $V_+^k(x+i0)$ обозначает столбец матрицы $V_+(x+i0)$ с номером k , $\mathbb{P}_\theta$ — ортопроектор из $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathcal{H}_\theta$, а B задается формулой (3). Заметим, что оператор $\tilde{A}_0 := B^{-1}$ принадлежит классу $\Sigma^{(\text{exp})}$. Пусть $\tilde{A}$ — плотно заданный в $\mathcal{H}_\theta$ оператор, обратный к которому определяется формулой

$$(\tilde{A})^{-1}h = (\tilde{A}_0)^{-1}h + \sum_{k=1}^n \langle h, F_k \rangle G_k, \quad h \in \mathcal{H}_\theta, \quad (6)$$

где $F_k \in \mathcal{H}_\theta$, $1 \leq k \leq n$, а скобки обозначают скалярное произведение в $\mathcal{H}_\theta$. Доказывается, что $\tilde{A}$ есть w -возмущение оператора $\tilde{A}_0$ ранга n , причем условия 1), 2) из определения 1 выполняются для веса $w^2 = V^2$. Таким образом, каждая м.-ф. $\theta \in J_n$ и каждый вес $V^2 \in \mathcal{M}_n^2$ порождают w -возмущения, задаваемые формулами (5), (6).

Обратно, пусть формула (1) задает w -возмущение оператора A_0 , которому отвечает вес w^2 в силу определения 1. Обозначим через a экспоненциальный тип резольвенты $(A_0 - zI)^{-1}$. Среди всех левых делителей [3] $\hat{\theta} \in J_n$ м.-ф. $e^{iaz}E_n$ су-

ществуют такие, которые обладают следующим свойством: для каждого $h \in \mathfrak{H}$

$$\mathcal{A}_0(z, h)w_+^{-1}(z)\tilde{\theta}(z) \in H_+^2(\mathbb{C}^n), \quad (7)$$

где w_+ взята из факторизации вида (4) веса w^2 , а $\mathcal{A}_0(z, h)$ имеет тот же смысл, что и в определении 1. В множестве левых делителей $\tilde{\theta}$, для которых имеет место (7), существует «наименьший» $\theta \in J_n$ в том смысле, что:

- 1) каждая м.-ф. $\tilde{\theta}$ содержит θ в качестве левого делителя;
- 2) включение (7) имеет место для $\tilde{\theta} = \theta$;
- 3) $\theta(0) = E_n$.

При уже выбранном весе $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ внутренняя м.-ф. θ определяется этими условиями однозначно. Итак, верно обратное утверждение, т.е. каждому w -возмущению отвечает вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ и м.-ф. $\theta \in J_n$. В следующей формулировке A , A_0 связаны равенством (1), оператор B задается формулами (2)–(3), а векторы G_k определяются равенствами (5).

Теорема 1. Пусть A есть w -возмущение ранга n оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$, которому отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, $\theta \in J_n$. Тогда существует изоморфизм S пространства $\mathfrak{H}$ на модельное пространство $\mathcal{H}_\theta$, такой, что

$$B = SA_0^{-1}S^{-1}, \quad Sg_k = G_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \tilde{A} = SAS^{-1},$$

где $\tilde{A}$ определяется формулой (6), в которой $F_k := (S^*)^{-1}f_k$, $1 \leq k \leq n$.

Из этой теоремы выводится

Следствие 1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ действует оператор A , определяемый формулой вида (1), причем A_0^{-1} является антидиссипативным оператором с подпространством несамосопряженности $\mathcal{L} := (A_0^{-1} - (A_0^{-1})^*)\mathfrak{H}$ размерности n . Если в формуле (1) векторы g_k , $1 \leq k \leq n$, образуют базис пространства $\mathcal{L}$, то A есть w -возмущение оператора A_0 с постоянным весом $w^2(x) \equiv E_n$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Описание генераторов C_0 -полугрупп. Каждому оператору A , определяемому формулой вида (1), отнесем целую м.-ф. $\Phi(z)$ с элементами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_j, f_k), \quad 1 \leq k, j \leq n,$$

и рассмотрим определитель $\Delta(z) := \det \Phi(z)$. Отметим, что $\sigma(A)$ совпадает с множеством $\Lambda := \{\lambda_k\}$ корней функции Δ .

Пусть A есть w -возмущение оператора A_0 , которому в силу рассмотрений разд. 1 отвечает A_2 -вес w^2 и левый делитель $\theta \in J_n$ м.-ф. $e^{iaz}E_n$, где a — экспоненциальный тип резольвенты $(A_0 - zI)^{-1}$. Заметим, что справедливы неравенства $0 < -i \operatorname{Sp}(\frac{d}{dz}\theta|_{z=0}) \leq na$. Через $w_\pm$ обозначим внешние м.-ф., которые взяты из факторизации вида (4) веса w^2 .

Теорема 2. Пусть A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$, которому отвечает пара w^2 , θ . Если при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия

- 1) $\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_k < \varepsilon$;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\Delta(iy)| = -i \operatorname{Sp}(\theta'(0))$;
- 3) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x + i\varepsilon)(w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\varepsilon)$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$,

то полугруппа $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 , причем ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

Обратно, если $U_-(t) \in C_0$ и тип полугруппы $U_-(t)$ равен ω , то при каждом $\varepsilon > \omega$ выполняются условия 1)–2). Кроме того, если при некотором $\delta > 0$ м.-ф. $e^{-i\delta z}\theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при любом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3).

Теорема 3. Пусть A есть w -возмущение оператора A_0 , которому отвечает пара w^2, θ . Если при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия

- 1) $\inf_{\lambda_k \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_k > -\varepsilon$;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\Delta(iy)| = 0$;
- 3) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x - i\varepsilon)$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$,

то полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$, $t \geq 0$ принадлежит классу C_0 и ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

Обратно, если $U_+(t) \in C_0$ и тип полугруппы $U_+(t)$ равен ω , то при каждом $\varepsilon > \omega$ выполняются условия 1)–2). Кроме того, если при некотором $\delta > 0$ м.-ф. $e^{-i\delta z}\theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при любом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3).

Следствие 2. Для класса w -возмущений из следствия 1 в формулировке теорем 2 и 3 можно положить $w_\pm(z) \equiv E_n$.

Остановимся на примере применения теорем 2 и 3. Пусть A есть w -возмущение оператора A_0 из следствия 1. Поскольку оператор $L := A_0^{-1}$ антидиссипативен, то существует ортогональный базис $\{u_k\}_1^n$ подпространства $\mathcal{L}$, такой, что $(L^* - L)h = i \sum_{k=1}^n (h, u_k) u_k$ для всех $h \in \mathfrak{H}$. Характеристическая м.-ф. оператора L^* определяется формулой

$$\theta_{kj}(z) = \delta_{kj} + iz((I - zL^*)^{-1}u_k, u_j), \quad L = A_0^{-1}, \quad (8)$$

и принадлежит классу J_n [5]. Пусть, кроме того, векторы $\{f_k\}_1^n, \{g_k\}_1^n$ (см. формулу (1)) образуют базисы подпространства $\mathcal{L}$, т. е. $f_k = \sum_{p=1}^n d_{kp} u_p$, $g_k = \sum_{p=1}^n c_{kp} u_p$ и матрицы $D := \|d_{kp}\|$, $C := \|c_{kp}\|$ обратимы.

Теорема 4. Пусть A есть w -возмущение оператора A_0 из следствия 1, причем обе системы векторов $\{f_k\}_1^n, \{g_k\}_1^n$ образуют базисы подпространства $\mathcal{L}$, и м.-ф. θ определяется формулой (8).

Если $\lim_{y \rightarrow +\infty} \theta(x + iy) = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, то полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 . Если предположить, кроме того, что матрица $E_n + iCD^*$ обратима, то классу C_0 принадлежит также полугруппа $U_+(t)$.

Заметим, что в теореме 4 числовой образ оператора A_0^{-1} лежит в замкнутой нижней полуплоскости. Из формулы (1) вытекает, что в случае $g_k = \sum_{p=1}^n Q_{kp} f_p$, $1 \leq k \leq n$, $\operatorname{Im} Q \leq 0$ ($Q := \|Q_{kp}\|$), возмущение сохраняет это свойство, т. е. $\operatorname{Im}(Af, f) \geq 0$, $f \in \mathcal{D}_A$, и, следовательно, полугруппа $U_+(t)$ принадлежит классу C_0 . Теорема 4 приводит к такому же выводу, поскольку в этом случае $C = QD$ и матрица $E_n + iQDD^*$ всегда обратима, однако первое условие (о поведении $\theta(x + iy)$) оказывается излишним.

Несмотря на схожесть формулировок обеих теорем, они решают принципиально разные задачи. В теореме 3 речь идет о полугруппе $U_+(t)$ при наличии полугруппы $V_+(t)$, $t \geq 0$, а в теореме 2 дается критерий существования $U_-(t)$, в то время как полугруппы $V_-(t) := \exp\{-iA_0 t\}$ не существует.

Примеры показывают, что условие 3) может выполняться и без предположения ограниченности в $\mathbb{C}_+$ м.-ф. $e^{-i\delta z}\theta(z)$. Вместе с тем наша гипотеза за-

ключается в том, что во всем классе w -возмущений от этого предположения отказаться нельзя.

3. Полугруппа сдвигов вдоль периодических в среднем вектор-функций. Пусть в пространстве Соболева $W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$ задана такая система линейных ограниченных функционалов φ_k ($1 \leq k \leq n$), что никакая их линейная комбинация не продолжается до ограниченного функционала в пространстве $L_2([0, a], \mathbb{C}^n)$. Предполагается также, что выполняются условия $\varphi_k(e_j) = \delta_{kj}$, где $\{e_k\}_1^n$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^n$, рассматриваемые как элемент пространства Соболева. В качестве примера рассмотрим в $L_2([0, a], \mathbb{C}^n)$ операторы

$$A = i \frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}_A = \bigcap_{k=1}^n \ker \varphi_k, \quad A_0 = i \frac{d}{dx},$$

причем область определения оператора A_0 состоит из функций $h \in W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$, таких, что $h(0) = 0$. Оператор A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{\text{exp}}$ ранга n , которому отвечает вес $w^2(x) \equiv E_n$, м.-ф. $\theta(z) = e^{iaz} E_n$ и целая м.-ф. Φ с элементами $\Phi_{kj}(z) := \varphi_k(e^{-iza} e_j)$. Условия 1)–3) теоремы 2, в которых надо положить $-iSp(\theta'(0)) = na$, $w_+(z) \equiv E_n$, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы полугруппа $U_-(t)$ принадлежала классу C_0 . На функции $h \in \mathcal{D}_A$ полугруппа действует по формуле $(U_-(t)h)(x) = \tilde{h}(t+x)$, где $\tilde{h}$ — единственное продолжение функции h вправо, такое, что $\tilde{h}(t+x) \in \mathcal{D}_A$ при каждом $t > 0$. Другими словами, для каждого $h \in \mathcal{D}_A$ функция $\tilde{h}$ является единственным решением системы

$$\varphi_k(\tilde{h}(t+x)) = 0, \quad \tilde{h}(x) = h(x), \quad x \in [0, a], \quad 1 \leq k \leq n, \quad \|\tilde{h}(a+x)\|_{L_2} \leq M \|h\|_{L_2} \quad (9)$$

интегро-дифференциальных уравнений со сдвигом аргумента, удовлетворяющим указанной оценке для норм в $L_2([0, a], \mathbb{C}^n)$. Такие продолжения $\tilde{h}$ (по аналогии со случаем $n = 1$ [4]) естественно называть периодическими в среднем относительно системы функционалов φ_k . Таким образом, теорема 2 дает критерий разрешимости задачи (9) в терминах м.-ф. Φ .

Эту статью мы посвящаем светлой памяти Марка Григорьевича Крейна; незабываемые годы общения с ним навсегда останутся с нами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [2] S. Treil, A. Volberg, J. Funct. Anal., **143**:2 (1997), 269–308. [3] В. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970. [4] J. Delsarte, J. Math. Pures Appl., **14** (1935), 403–453. [5] М. С. Бродский, М. С. Лившиц, УМН, **13**:1(79) (1958), 3–85. [6] В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, Из-во Харьковского национального университета им. Каразина, 2003.

Полтавский национальный технический университет, Украина
e-mail: gubreev@yandex.ru

University of Missouri-Columbia, USA
e-mail: yuri@math.missouri.edu

Поступило в редакцию
9 марта 2007 г.