Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Ю. И. Любич, Кватернионное нормированное пространство с группой изометрий $\mathbb{Z}_2$, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 90–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:31:44

Кватернионное нормированное пространство с группой изометрий $\mathbb{Z}_2^*$

© 2008. Р. С. Исмагилов, Ю. И. Любич

Группа линейных изометрических преобразований вещественного линейного нормированного пространства может оказаться конечной; в случае комплексного пространства аналогичная группа всегда бесконечна, ибо любое преобразование вида $x \mapsto \alpha x$, где α — комплексное число и $|\alpha| = 1$, изометрично. Рассмотрим теперь классическое тело кватернионов $\mathbb{H}$ и пространство $\mathbb{H}^n$, состоящее из всех столбцов $x = (x_1, \dots, x_n)'$, $x_s \in \mathbb{H}$. Введя в $\mathbb{H}^n$ умножение справа (для определенности) на элементы из $\mathbb{H}$, мы получаем (правое) $\mathbb{H}$ -линейное пространство. Заметим, что в пространстве $\mathbb{H}^n$ умножение $x \mapsto x\lambda$ не является $\mathbb{H}$ -линейным отображением, если $\lambda \notin \mathbb{R}$.

В докладе Ю. И. Любича (WONRA-6, Бремен, 15–17 июля 2006) была введена норма

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^N |x_1 + \phi_k(x_2, \dots, x_n)|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{H}^n, \quad (1)$$

для любого $p \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$; было показано, что при подходящем выборе $\mathbb{H}$ -линейных функционалов ϕ_k группа $\mathbb{H}$ -линейных изометрических (по отношению к норме (1)) преобразований пространства $\mathbb{H}^n$ конечна. В предлагаемой заметке мы несколько усовершенствуем выбор функционалов ϕ_k ; при таком выборе группа линейных изометрий сведется к $\mathbb{Z}_2 = \{\pm \text{id}\}$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}^2$; его элементы будут обозначаться через (s, r) . Возьмем целые числа $1 = N_1 < \dots < N_n$ и рассмотрим подмножество $E \subset \mathbb{Z}^2$ вида $E = \{(s, r) : 1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq N_s\}$. Для каждого $s = 1, \dots, n$ обозначим через E_s множество точек $(s, r) \in E$ (с фиксированным s); назовем множества E_s *слоями*. Возьмем, далее, ступенчатую кватернионную матрицу (h_{sr}) , $h_{sr} \in \mathbb{H}$, со следующими свойствами:

- а) $h_{11} = 0$, $h_{sr} \neq 0$ для всех $(s, r) \neq (1, 1)$, $(s, r) \in E$;
- б) $\sum_{r=1}^{N_s} h_{sr} = 0$ для всех $s \in \{2, \dots, n\}$;
- с) для любого $s \in \{2, \dots, n\}$ величины $|h_{sr}|$, $r = 1, \dots, N_s$, попарно различны;
- д) любой кватернион, перестановочный со всеми h_{sr} , $(s, r) \in E$, есть вещественное число;
- е) в любом слое E_s , $s = 2, \dots, n$, существует такая точка (s, r) , что h_{sr} — вещественное число.

Используя эту матрицу, введем в $\mathbb{H}^n$ норму (разновидность нормы (1)) по формуле

$$\|x\| = \left(\sum_{(s,r) \in E} |x_1 + h_{sr}x_s|^p \right)^{1/p}. \quad (2)$$

Теорема. При выполнении условий а)–е) любая линейная изометрия пространства $\mathbb{H}^n$ по отношению к норме (2) есть либо $x \mapsto x$, либо $x \mapsto -x$, $x \in \mathbb{H}^n$.

В доказательстве следующей леммы мы используем метод сравнения особенностей, развитый в работах [1]–[3].

Лемма 1. Пусть два семейства неотрицательных квадратичных форм $(f_k(x))_1^N$ и $(g_k(x))_1^N$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^N (f_k(x))^\alpha = \sum_{k=1}^N (g_k(x))^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $2\alpha \notin \mathbb{Z}$. Пусть формы f_k попарно не пропорциональны и тем же свойством обладают формы g_k . Тогда семейство $(g_k)_1^N$ получается перестановкой семейства $(f_k)_1^N$.

Доказательство. Обозначим через V множество всех таких пар (x, y) , что $f_k(y) > 0$ для всех $k \in \{1, \dots, N\}$, $f_k(x)f_l(y) - f_k(y)f_l(x) \neq 0$ при $k \neq l$ и аналогичные условия выполнены для семейства $(g_k)_1^N$. Для любой точки $(x, y) \in V$ рассмотрим соотношение (3) на прямой $\{x + \tau y, \tau \in \mathbb{R}\}$, продолжим это соотношение аналитически на комплексные τ и изучим точки ветвления полученных слагаемых (корни квадратичных многочленов $f_k(x + \tau y)$, $g_k(x + \tau y)$). Согласно выбору множества V , многочлены $f_k(x + \tau y)$ попарно не пропорциональны. Так как, кроме того, $2\alpha \notin \mathbb{Z}$, то у функции в левой части равенства имеется N различных пар точек ветвления (числа, входящие в пару, комплексно сопряжены; некоторые пары могут состоять из одинаковых вещественных чисел). То же самое имеет место и для функции в правой части равенства. Отсюда следует, что набор многочленов $\{g_k(x + \tau y)\}$ получается перестановкой набора $\{f_m(x + \tau y)\}$. В частности, многочлен $g_1(x + \tau y)$ совпадает с некоторым $f_m(x + \tau y)$ (номер m зависит от x, y), откуда $g_1(y) = f_m(y)$. Итак, для любого $y \in \mathbb{R}^n$, входящего в некоторую пару $(x, y) \in V$ (ясно, что множество таких векторов y плотно в $\mathbb{R}^n$), существует такой номер $m = m(y)$, что $g_1(y) = f_m(y)$. Следовательно, для некоторого m множество векторов y , удовлетворяющих условию $g_1(y) = f_m(y)$, плотно в некотором шаре. Но тогда это равенство выполнено для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Итак, $g_1 = f_m$. Продолжая это рассуждение, приходим к утверждению леммы.

Нам понадобится также следующий элементарный факт.

Лемма 2. Пусть строки $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a_r \in \mathbb{H}$, $b_r \in \mathbb{H}$, удовлетворяют условию $|ax| = |bx|$ для всех $x \in \mathbb{H}^n$. Тогда $b = \theta a$ для некоторого $\theta \in \mathbb{H}$, $|\theta| = 1$.

Докажем теорему. Введем вектор-строки $e_s = (\delta_{sj})_{j=1}^n$, δ_{sj} — символ Кронекера. Тогда можно чуть преобразовать формулу (2), переписав выражение $x_1 + h_{sr}x_s$ из (2) в виде $(e_1 + h_{sr}e_s)x$.

Обратимся теперь к $\mathbb{H}$ -линейным изометриям пространства $\mathbb{H}^n$. Пусть $T = (t_{s\sigma})$, $1 \leq s, \sigma \leq n$, — такая кватернионная матрица, что $\|x\| = \|Tx\|$, $x \in \mathbb{H}^n$. Это равенство приводится к виду (3) при $\alpha = p/2$; в роли квадратичных форм из (3) выступают $x \mapsto |(e_1 + h_{sr}e_s)x|^2$ и $x \mapsto |(e_1 + h_{sr}e_s)Tx|^2$. Применяя леммы 1 и 2, получаем такую биекцию $\phi: E \rightarrow E$ и такие элементы $\theta_{sr} \in \mathbb{H}$, $(s, r) \in E$, что $|\theta_{sr}| = 1$ и $e_1T + h_{sr}e_sT = \theta_{sr}(e_1 + h_{s'r'}e_{s'})$, где $(s, r) \in E$, $(s', r') = \phi(s, r)$.

Отсюда и из условия $h_{11} = 0$ получаем равенства

$$t_{11} + h_{sr}t_{s1} = \theta_{sr} \quad (4)$$

и

$$t_{1j} + h_{sr}t_{sj} = \theta_{sr}h_{s'r'}\delta_{s'j}, \quad (s, r) \in E, \quad j \in \{2, \dots, n\}. \quad (5)$$

Так как $h_{11} = 0$, то из (4) следует, что $t_{11} = \theta_{11}$, а потому $|t_{11}| = 1$. Отсюда и из (4) вытекает, что $|h_{sr}|^2|t_{s1}|^2 + t_{11}\bar{t}_{s1}\bar{h}_{sr} + h_{sr}t_{s1}\bar{t}_{11} = 0$, $(s, r) \in E$, $s \geq 2$. Складывая эти равенства по слою E_s и применяя свойства а) и б), приходим к равенствам $t_{s1} = 0$ при $s \geq 2$. Таким образом, равенство (4) сводится к $\theta_{sr} = t_{11}$ при $s \geq 2$. Учитывая это равенство, сложим равенства (5) по всем $(s, r) \in E$; применяя свойства а) и б), получаем, что $t_{1j} = 0$, $j \geq 2$. Теперь (5) принимает вид

$$h_{sr}t_{sj} = t_{11}h_{s'r'}\delta_{s'j}, \quad (s, r) \in E, \quad j \geq 2, \quad (s', r') = \phi(s, r). \quad (6)$$

Возьмем в этой формуле $(s, r) = (1, 1)$ и положим $\phi(1, 1) = (k, l)$. Тогда $t_{11}h_{kl}\delta_{kj} = 0$; таким образом, $h_{kl} = 0$ либо $\delta_{kj} = 0$ для всех $j \geq 2$. В обоих случаях $k = 1$ и $l = 1$. Итак, биекция ϕ сохраняет слой E_1 . Покажем, что и остальные слои инвариантны относительно ϕ . Действительно, из (6) и условия а) вытекает, что $t_{sj} = 0$ для всех $j \neq s'$ и $t_{ss'} \neq 0$. Следовательно, s' не зависит от r , а потому слой E_s отображается в слой $E_{s'}$. Так как количества элементов в $E_2, \dots, E_n$ попарно различны, то эти слои инвариантны относительно ϕ .

Теперь соотношение (6) принимает вид $h_{sr}t_{sj} = t_{11}h_{s'r'}\delta_{s'j}$, $(s, r) \in E$, $s \geq 2$, $j \geq 2$, $(s, r') = \phi(s, r)$. Отсюда, вспоминая равенства $t_{s1} = t_{1j} = 0$ ($s, j \geq 2$), видим, что матрица T диагональна. Далее, $|t_{ss}| = 1$, ибо T — изометрия. Теперь (6) сводится к равенству $h_{sr}t_{ss} = t_{11}h_{s'r'}$. Отсюда, используя свойство с), получаем равенство $r' = r$. Далее, свойство е) показывает, что $t_{ss} = t_{11}$, а свойство d) дает $t_{11} \in \mathbb{R}$. Отсюда $t_{11} = \pm 1$ и, наконец, $T = \pm \text{id}$. Теорема доказана.

В последнее время авторы рассмотрели нормы вида $\|x\| = (\sum_k |u_k x|^p)^{1/p}$, где $p \in \{1, \infty\} \setminus \mathbb{Z}$ и $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{kn})$, $u_{kj} \in \mathbb{H}$, $1 \leq k \leq N$, $N > n + 1$. Оказывается, что при выполнении некоторого полиномиального неравенства вида $P(\{u_{kj}\}) \neq 0$ любая линейная изометрия имеет вид $\pm \text{id}$.

Замечание. Наше доказательство переносится на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и в обоих случаях дает $T = \text{id} \cdot \lambda$, $|\lambda| = 1$, даже без условий d), е). Чтобы охватить все три случая ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$), достаточно добавить, что λ принадлежит центру тела и соответственно изменить условие е). Однако условие d) в такой общей формулировке следует опустить.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. И. Любич, Сиб. матем. ж., **11:2** (1970), 359–369. [2] Ю. И. Любич, О. А. Шаталова, Алгебра и анализ, **16:1** (2004), 15–32. [3] Yu. I. Lyubich, L. N. Vaserstein, Geom. Dedicata, **47:3** (1993), 327–362.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@serv.bmstu.ru
Technion, Israel Institute of Technology
e-mail: lyubich@techunix.technion.ac.il

Поступило в редакцию
27 сентября 2006 г.