Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, Я. Земанек, О равномерном резольвентном условии Крейсса, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 10:52:54

для любого $t \in [0, h_2]$. Такое число существует в силу непрерывности функции y_0 . Пусть $h_0 = \min\{h_1, h_2\}$; тогда отображения $\hat{a}$ и g на шаре $T_R[\bar{x}_0] \subset C_{([0, h_0], E)}$ удовлетворяют условиям леммы 3, что и доказывает утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.
 [2] Б. Д. Гельман, Матем. заметки, **78**:2 (2005), 212–222. [3] С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1971.

Воронежский государственный университет
 e-mail: gelman@func.vsu.ru

Поступило в редакцию
 13 апреля 2007 г.
 В переработанном виде
 18 февраля 2008 г.

УДК 517.9

О равномерном резольвентном условии Крейсса*

© 2008. А. М. ГОМИЛКО, Я. ЗЕМАНЕК

К столетию Марка Григорьевича Крейна

1. Всюду далее B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L}(B)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в B . Через $r(T)$ мы обозначаем спектральный радиус оператора $T \in \mathcal{L}$, I — единичный оператор и $R(T, \lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора $T \in \mathcal{L}$. Напомним (см., например, [1]), что оператор $T \in \mathcal{L}$ с $r(T) \leq 1$ удовлетворяет резольвентному условию Крейсса, если существует такое $C \geq 1$, что

$$\|R(T, \lambda)\| \leq \frac{C}{|\lambda| - 1}, \quad |\lambda| > 1. \quad [R]$$

Говорят, что оператор $T \in \mathcal{L}$ с $r(T) \leq 1$ удовлетворяет сильному резольвентному условию Крейсса, если найдется такая постоянная $M \geq 1$, что

$$\|R^k(T, \lambda)\| \leq \frac{M}{(|\lambda| - 1)^k}, \quad |\lambda| > 1, \quad k = 1, 2, \dots. \quad [SR]$$

В работе [2] было дано определение равномерного резольвентного условия Крейсса, которое заключается в том, что частичные суммы ряда Неймана резольвенты оператора $T \in \mathcal{L}$ с $r(T) \leq 1$ допускают равномерную оценку

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right\| \leq \frac{L}{|\lambda| - 1}, \quad |\lambda| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad [UR]$$

для некоторой постоянной $L \geq 1$.

*Работа написана при поддержке программы Европейского Союза, проект MTKD-СТ-2005-030042 (“TODEQ”). Первый автор также пользовался частичной поддержкой в рамках госбюджетной темы Украины, номер 0107U000937.

Очевидно, что как из [SR], так и из [UR] вытекает выполнение условия [R] (с постоянной $C = M$ или $C = L$ соответственно). С другой стороны, имеются примеры операторов, для которых выполняется условие [R], но не выполняется [SR] (см. [1] и имеющуюся там библиографию), а в [2] показано, что в общем случае выполнение условия [UR] не влечет за собой выполнения [SR]. При этом из рассмотрений работы [1, §6] нетрудно вывести, что известный оператор Шилдса [3] представляет собой пример оператора, который удовлетворяет условию [R], но не удовлетворяет условию [UR]. В данной заметке доказано, что из условия [SR] следует условие [UR] — это является ответом на вопрос из работы [2]. Кроме того, установлено, что оператор T удовлетворяет условию [UR] тогда и только тогда, когда для некоторого (а значит, и для любого) $m = 2, 3, \dots$ этому условию удовлетворяет оператор T^m .

2. Для оператора T с $r(T) \leq 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} = -R(T, \lambda) + \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} R(T, \lambda), \quad |\lambda| > 1, \quad (1)$$

из которого получаем, что выполнение для оператора T условия [UR] эквивалентно справедливости оценки $\|T^n R(T, \lambda)\| \leq \tilde{L}|\lambda|^n/(|\lambda| - 1)$, $|\lambda| > 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Из известных теорем о генераторе C_0 -полугруппы [4, гл. 9] вытекает, что оператор T удовлетворяет сильному условию Крейсса [SR] тогда и только тогда, когда

$$\|\exp(zT)\| \leq Me^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \exp(zT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k T^k}{k!}, \quad (2)$$

причем при $\lambda = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, справедливы интегральные представления

$$R^n(T, \lambda) = \frac{(-1)^n e^{-i\theta}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-\rho t} \exp(te^{-i\theta}T) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Используя общие идеи асимптотического исследования интегралов, зависящих от параметров (см., например, [5, гл. 3]), можно установить следующее утверждение.

Лемма 1. Для любых $R > 0$ и $\tau > 0$ справедлива оценка

$$I(R; \tau) := \int_0^{\pi} e^{R|\tau + e^{i\theta}|} d\theta \leq \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \frac{e^{(\tau+1)R}}{\sqrt{R}}. \quad (4)$$

Основная теорема о том, что сильное условие Крейсса влечет за собой равномерное условие Крейсса, выводится из следующего утверждения, представляющего и самостоятельный интерес.

Лемма 2. Пусть оператор T удовлетворяет сильному условию Крейсса [SR]. Тогда для любых натуральных m и n выполняется оценка

$$\|T^m R^n(T, \lambda)\| \leq \frac{\sqrt{2}Me^{1/12}}{(|\lambda| - 1)^n} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{m(|\lambda| - 1)}}{\sqrt{n}}\right), \quad |\lambda| > 1. \quad (5)$$

Доказательство. Без уменьшения общности достаточно рассмотреть случай действительных значений $\lambda > 1$. Используя (3) и представления

$$T^m = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{e^{zT}}{z^{m+1}} dz, \quad R > 0,$$

имеем при $\lambda > 1$ равенство

$$T^m R^n(T, \lambda) = \frac{(-1)^n m!}{2\pi i (n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \left\{ \int_{|z|=R} \frac{e^{(z+t)T}}{z^{m+1}} dz \right\} dt.$$

Отсюда, вводя переменные $z = Re^{i\theta}$, $t = R\tau$, на основании неравенства (2) получаем

$$\|T^m R^n(T, \lambda)\| \leq \frac{Mm!}{\pi(n-1)! R^{m-n}} \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{-\lambda R\tau} I(R; \tau) d\tau, \quad \lambda > 1, \quad (6)$$

где выражение $I(R; \tau)$ определено в лемме 1. Тогда, используя оценку (4) и интегральное представление для гамма-функции $\Gamma(x)$, получаем из (6) неравенство

$$\|T^m R^n(T, \lambda)\| \leq \frac{Mm! e^R}{\sqrt{\pi} R^m \sqrt{R}(\lambda-1)^n} \left(1 + \frac{\Gamma(n-1/2) \sqrt{R(\lambda-1)}}{(n-1)!} \right), \quad \lambda > 1.$$

Используя здесь оценки (см. [6, §1.4]) $m! < \sqrt{2\pi} e^{-m} m^m \sqrt{m} e^{1/12}$, $\Gamma(n-1/2) \leq \sqrt{\pi}(n-1)!/\sqrt{n}$ (вторая из оценок вытекает из убывания последовательности $(n-1/2)\sqrt{n+1}/(n\sqrt{n})$, $n=1, 2, \dots$, и свойства $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), получаем

$$\|T^m R^n(T, \lambda)\| \leq \frac{\sqrt{2} M e^{1/12} e^R}{R^m \sqrt{R}} \frac{e^{-m} m^m \sqrt{m}}{(\lambda-1)^n} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{R(\lambda-1)}}{\sqrt{n}} \right), \quad \lambda > 1,$$

а полагая здесь $R = m$, имеем при $\lambda > 1$ оценки (5). Лемма доказана.

Теорема. Если оператор T удовлетворяет условию [SR], то выполняется оценка [UR] с постоянной $L = 4M$.

Доказательство. Из (5) при $n = 1$ получаем оценку

$$\|T^m R(T, \lambda)\| \leq \frac{\sqrt{2} M e^{1/12}}{(|\lambda| - 1)} (1 + \sqrt{\pi} \sqrt{m(|\lambda| - 1)}), \quad |\lambda| > 1. \quad (7)$$

При этом $2\sqrt{(|\lambda| - 1)m} \leq (|\lambda| - 1)m + 1 \leq |\lambda|^m$, и, значит, из (7) получаем

$$|\lambda|^{-m} \|T^m R(T, \lambda)\| \leq \frac{\sqrt{2} e^{1/12} M}{|\lambda| - 1} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \leq \frac{3M}{|\lambda| - 1}, \quad |\lambda| > 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а отсюда и из (1) следует утверждение теоремы.

3. Для оператора T с $r(T) \leq 1$ имеем при $|\mu| > 1$ соотношения

$$R(T^m, \mu^m) = \frac{1}{m\mu^{m-1}} \sum_{k=1}^m \nu_k R(T, \nu_k \mu), \quad R(T, \mu) = R(T^m, \mu^m) \sum_{k=0}^{m-1} \mu^k T^{m-1-k}, \quad (8)$$

где $\nu_k = e^{2\pi i k/m}$ — корни m -й степени из 1. Использование этих равенств позволяет получить следующие два утверждения, первое из которых является частным случаем одного из результатов работы [7].

Предложение 1. Пусть оператор T удовлетворяет условию Крейсса [R]. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\|R(T^m, \lambda)\| \leq mC/(|\lambda| - 1), \quad |\lambda| > 1.$$

Предложение 2. Пусть оператор T^m для некоторого натурального значения $m \geq 2$ удовлетворяет условию Крейсса с постоянной $C = C_m$. Тогда оператор T также удовлетворяет условию Крейсса [R] с постоянной $C = (\max\{\|T\|, 1\})^{m-1}C_m$.

Следующие две леммы показывают, в частности, что выполнение равномерного условия Крейсса для оператора T эквивалентно тому, что это условие выполняется для натуральных степеней T^m оператора T .

Лемма 3. Пусть T удовлетворяет условию [UR]. Тогда для любого $m = 2, 3, \dots$ оператор T^m также удовлетворяет условию [UR], причем

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{T^{mk}}{\lambda^{k+1}} \right\| \leq \frac{3mL}{|\lambda| - 1}, \quad |\lambda| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Лемма 4. Пусть для некоторого натурального m , $m \geq 2$, оператор T^m удовлетворяет равномерному условию Крейсса с постоянной $L = L_m$. Тогда для оператора T также выполняется условие [UR] с постоянной $L = 3L_m(\max\{\|T\|, 1\})^{2(m-1)}$.

Для доказательства леммы 3 используется соотношение (1), примененное к операторам T и T^m , и предложение 1, а при доказательстве леммы 4 следует воспользоваться вторым из равенств (8), формулой (1) и предложением 2. Из теоремы и леммы 4 получаем такое

Следствие. Если оператор T^m для некоторого натурального $m \geq 2$ удовлетворяет сильному условию Крейсса с постоянной $M = M_m$, то оператор T удовлетворяет условию [UR] с постоянной

$$L = 12M_m(\max\{\|T\|, 1\})^{2(m-1)}.$$

Отметим, что вопрос о соотношении между выполнением условия [SR] для оператора T и для его натуральных степеней является открытым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. C. Strikwerda, B. A. Wade, in: Linear operators, vol. 38, Warsaw, 1997, 339–360. [2] A. Montes-Rodríguez, J. Sánchez-Álvarez, J. Zemánek, Proc. London Math. Soc. (3), **91**:3 (2005), 761–788. [3] A. L. Shields, Acta Sci. Math., **40**:3–4 (1978), 371–374. [4] Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, Мир, М., 1972. [5] Ф. Олвер, Асимптотика и специальные функции, Наука, М., 1990. [6] Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М.-Л., 1963. [7] N. Yu. Bakaeв, J. Difference Equations Appl., **4**:3 (1998), 343–364.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
e-mail: alex@gomilko.com

Математический институт ПАН, Варшава
e-mail: zemanek@impan.gov.pl

Поступило в редакцию
19 марта 2007 г.