Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Карабаш, А. С. Костенко, О подобии J -неотрицательного оператора Штурма–Лиувилля самосопряженному, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2919>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:02:17

О подобии J -неотрицательного оператора Штурма–Лиувилля самосопряженному

© 2009. И. М. КАРАВАШ, А. С. КОСТЕНКО

1. Основным объектом настоящей заметки является индефинитный оператор Штурма–Лиувилля вида

$$A := \frac{\operatorname{sgn} x}{\omega(x)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right), \quad \operatorname{dom}(A) := \mathcal{D}_{\max}, \quad (1)$$

задаваемый в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ на максимальной области определения $\mathcal{D}_{\max} = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \omega) : f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}), Af \in L^2(\mathbb{R}, \omega)\}$. Мы предполагаем, что потенциал q и вес ω — вещественные функции, $q, \omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, и $\omega(x) > 0$ для п. в. $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, дифференциальное выражение (1) регулярно на любом конечном интервале $[a, b]$, но сингулярно в $+\infty$ и $-\infty$. Мы будем считать, что в сингулярных концах имеет место *случай предельной точки*, т. е. оператор

$$L := \frac{1}{\omega(x)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right), \quad \operatorname{dom}(L) = \operatorname{dom}(A),$$

самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}, \omega)$. Будем также считать, что L неотрицателен, $L = L^* \geq 0$. Другими словами, оператор A является J -самосопряженным и J -неотрицательным (J — оператор умножения на $\operatorname{sgn} x$, $J = J^* = J^{-1}$). Ясно, что $A \neq A^*$, однако имеет место

Лемма 1. *Если оператор A вида (1) является J -самосопряженным и J -неотрицательным, то $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

За последнее время вопрос о подобии оператора A самосопряженному изучался в работах [1]–[4], [7], [8], [11]–[13] (см. также библиографию к ним). Интерес к данной задаче обусловлен, в частности, некоторыми задачами математической физики и теории случайных процессов (см. [1], [5]).

2. Один из основных инструментов исследования спектральных свойств оператора A вида (1) — спектральная теория J -неотрицательных операторов (определения и основные результаты изложены в [9]). Известно [9], что A имеет вещественный спектр, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, если его резольвентное множество $\rho(A)$ непусто. Более того, в данном случае оператор A обладает спектральной функцией $E_A(\cdot)$ ($E_A(\cdot)$ — семейство J -ортогональных проекторов), свойства которой принципиально отличаются от свойств спектральной функции самосопряженного оператора лишь в *сингулярных критических точках* оператора A , а именно, в окрестности этих точек $E_A(\cdot)$ неограниченна. Несингулярные критические точки называют *регулярными*. Отметим, что только 0 и ∞ могут быть критическими точками оператора A . Лемма 1 позволяет переформулировать вопрос

о подобии оператора A вида (1) самосопряженному в терминах регулярности критических точек спектральной функции.

Теорема 1. *Оператор A вида (1) подобен самосопряженному в $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ тогда и только тогда, когда*

- (i) $\ker A = \ker A^2$;
- (ii) 0 и ∞ не являются сингулярными критическими точками оператора A .

Эта теорема хорошо известна и следует из [9, теоремы 5.7 и 6.1].

3. Вопросу о регулярности критической точки ∞ оператора A посвящено большое количество работ (см. [1], [2], [8], а также [12] и библиографию к ней). Отметим, что существование весов ω , для которых ∞ — сингулярная критическая точка, было установлено Г. Волькмером в [8], а соответствующие примеры построены А. Фляйге, С. Г. Пятковым и Н. Л. Абашеевой (см. подробности в [12]).

Несмотря на то что в 1970–1980-х годах были обнаружены несколько различных критериев регулярности критических точек абстрактного J -неотрицательного оператора, первые результаты о регулярности критической точки 0 оператора A вида (1) были получены сравнительно недавно в [3], [4]. Так, используя критерий регулярности Чургуса, в [3], [4] установлена регулярность критической точки 0 в случае $q \equiv 0$, $\omega(x) = |x|^\alpha$ ($\alpha > -1$). В работах [7], [11], [13] этот результат был распространен на некоторые модельные классы операторов Штурма–Лиувилля при помощи резольвентного критерия подобия Набоко–Маламуда. А именно, в случае $\omega \equiv 1$ регулярность критической точки 0 установлена для потенциалов q с конечным вторым моментом [13] либо конечнозонных q [7]. Работа [11] посвящена случаю $q \equiv 0$.

До сих пор не были известны примеры J -неотрицательных операторов A вида (1) с сингулярной критической точкой нуль. В настоящей заметке мы приводим примеры таких операторов. Подробное изложение этих результатов содержится в препринте [6].

4. Пусть $f_\pm(\cdot, \lambda)$ — некоторое нетривиальное интегрируемое с квадратом решение уравнения

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \pm \lambda \omega(x)y(x), \quad \pm x \geq 0. \quad (2)$$

m -функции Вейля–Титчмарша задач Неймана для таких уравнений определяются соотношениями

$$m_\pm(\lambda) := -\frac{f_\pm(0, \lambda)}{f'_\pm(0, \lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3)$$

Один из основных результатов данной заметки — следующее необходимое условие регулярности критических точек оператора A .

Теорема 2. (i) *Пусть оператор A вида (1) J -самосопряжен и J -неотрицателен, а $m_+(\lambda)$ и $m_-(\lambda)$ — функции Вейля–Титчмарша вида (3). Если A подобен самосопряженному оператору, то функции*

$$\frac{\operatorname{Im} m_+(\lambda)}{m_+(\lambda) - m_-(\lambda)} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{Im} m_-(\lambda)}{m_+(\lambda) - m_-(\lambda)} \quad (4)$$

ограниченны в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

(ii) Если $\ker A = \ker A^2$ и 0 не является сингулярной критической точкой оператора A , то для любого $R > 0$ функции (4) ограничены на множестве $B_R^+ := \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : |\lambda| \leq R\}$.

Отметим, что условие (i) необходимо для подобия самосопряженному произвольного J -самосопряженного (не обязательно J -неотрицательного) оператора A вида (1). В работе [7] в терминах m -функций получен ряд необходимых условий подобия оператора A самосопряженному. Условие (i) усиливает одно из условий работы [7] (см. следствие 5.3 в этой работе). Связь с другими условиями из [7] пока не ясна. Однако стоит отметить, что для приведенных ниже примеров условия из [7] не нарушаются.

5. В данном разделе мы построим примеры операторов вида (1) с сингулярной критической точкой нуль.

Пример 1. Пусть

$$m(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} - \frac{1}{-\lambda + \sqrt{-\lambda}}, \quad \lambda \notin [0, +\infty). \quad (5)$$

Лемма 2. Функция $m(\cdot)$ является m -функцией задачи Неймана для уравнения (2) на правой полуоси с $\omega \equiv 1$ и некоторым непрерывным квадратично суммируемым потенциалом $q(x) = q_0(x)$.

Теорема 3. Пусть A_0 — оператор вида (1) с $\omega \equiv 1$ и $q(x) := q_0(|x|)$, где функция $q_0 \in C_{\text{loc}}[0, +\infty) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определена в лемме 2. Тогда

- (i) оператор A_0 является J -самосопряженным и J -неотрицательным, причем $\sigma(A_0) = \mathbb{R}$;
- (ii) $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A_0 ;
- (iii) 0 — сингулярная критическая точка оператора A_0 ;
- (iv) оператор A_0 не подобен самосопряженному.

Мы приведем лишь набросок доказательства. Отметим, что в данном случае $m_+(\lambda) := m(\lambda)$, $m_-(\lambda) := -m(-\lambda)$, где $m(\cdot)$ имеет вид (5). Утверждение (i) является следствием того факта, что $m(\cdot)$ вида (5) принадлежит (S) -классу Крейна–Стилтьеса (см. определение в [10]). Доказательство (ii) вытекает из [7, теорема 4.2 (2)]. Кроме того, нетрудно убедиться, что функции вида (4) неограниченны в окрестности нуля. Поэтому утверждения (iii) и (iv) следуют из теоремы 2.

Замечание 1. Отметим, что в случае $\omega \equiv 1$ регулярность критической точки ∞ оператора A была установлена в [2]. Этот результат можно переформулировать следующим образом: если $L := -d^2/dx^2 + q(x)$ неотрицателен в $L^2(\mathbb{R})$ и $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(L)$, то оператор $A = JL$ подобен самосопряженному в точности тогда, когда $\ker A = \ker A^2$. Приведенный пример показывает, что в случае $0 \in \sigma_{\text{ess}}(L)$ это утверждение неверно даже для L^2 -потенциалов.

Пример 2. Рассмотрим теперь случай $q \equiv 0$. Положим

$$\omega_c(x) = \begin{cases} (1 + cx)^{-4/3}, & x > 0, \\ (1 - x)^{-4/3}, & x < 0, \end{cases} \quad c > 0.$$

Теорема 4. Пусть A_c — оператор вида (1) с $q \equiv 0$ и $\omega := \omega_c$. Тогда

- (i) оператор A_c является J -самосопряженным и J -неотрицательным, причем $\sigma(A_c) = \mathbb{R}$;

- (ii) $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A_c ;
- (iii) A_c подобен самосопряженному в точности тогда, когда $c \neq 1$;
- (iv) 0 — регулярная критическая точка оператора A_c , если и только если $c \neq 1$.

Вкратце поясним суть доказательства. В данном случае $m_+(\lambda) = -1/(3\lambda) + 1/\sqrt{-\lambda}$ и $m_-(\lambda) = -c/(3\lambda) - 1/\sqrt{\lambda}$ (см. подробности в [6]). Поэтому утверждение (i) очевидно. Отметим, что $\ker A \neq \{0\}$. Учитывая вид функций m_+ и m_- , можно показать, что справедлива оценка $\|(A_c - iy)^{-1}\| \leq O(y^{-3/2})$, $y \rightarrow +0$, из которой следует (ii). Далее, если $c \neq 1$, то $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} |(m_+(\lambda) + m_-(\lambda))(m_+(\lambda) - m_-(\lambda))^{-1}| < \infty$. Поэтому по теореме 5.8 из [7] оператор A_c подобен самосопряженному, когда $c \neq 1$. Если же $c = 1$, то функции (4) неограниченны в окрестности нуля. Это завершает доказательство утверждений (iii) и (iv).

Замечание 2. Результаты работ [1], [2], [8], [12] позволяют судить о регулярности критической точки ∞ по одному лишь поведению веса ω в окрестности нуля. Примеры 1 и 2 показывают, что в случае $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ критическая точка 0 может становиться сингулярной для оператора A . Условия на $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ обычно получаются как условия на поведение коэффициентов q и ω в бесконечности. Результаты данной заметки в сочетании с результатами работ [7], [11], [13] показывают, что условия регулярности точки 0 затруднительно сформулировать в этих терминах.

Авторы благодарны А. Фляйге за постановку задачи и А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликову, на семинаре которых докладывалась работа, за полезные обсуждения. Авторы искренне благодарны М. М. Маламуду за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Beals, J. Differential Equations, **56:3** (1985), 391–407. [2] B. Ćurgus, H. Langer, J. Differential Equations, **79:1** (1989), 31–61. [3] B. Ćurgus, B. Najman, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 1125–1128. [4] A. Fleige, B. Najman, in: Oper. Theory: Adv. Appl., vol. 102, Birkhauser, Basel, 1998, 85–95. [5] I. M. Karabash, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 188, Birkhäuser, Basel, 2009, 183–203. [6] I. M. Karabash, A. S. Kostenko, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, **138:4** (2008), 801–820; <http://arxiv.org/abs/math/0612173>. [7] I. M. Karabash, M. M. Malamud, Oper. Matrices, **1:3** (2007), 301–368. [8] H. Volkmer, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A 126:5** (1996), 1097–1112. [9] H. Langer, *Spectral Functions of Definitizable Operators in Krein Space*, Lect. Notes in Math., vol. 948, 1982. [10] И. С. Кац, М. Г. Крейн, в кн.: Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные задачи, Мир, М., 1968, дополнение I. [11] А. С. Костенко, Матем. заметки, **80:1** (2006), 135–138. [12] А. И. Парфенов, Сиб. матем. ж., **44:4** (2003), 638–644. [13] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, Зап. науч. семин. ПОМИ, **270** (2000), 336–349.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Донецк
e-mail: karabashi@yahoo.com

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Донецк
e-mail: duzer80@mail.ru

Поступило в редакцию
23 марта 2007 г.