Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, Функциональные уравнения для рядов Гекке–Маасса, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 23–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:37:28

Функциональные уравнения для рядов Гекке–Маасса*

© 2000. В. А. БЫКОВСКИЙ

Введение

Пусть $\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Зафиксируем некоторые $k \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 1)$, а также матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \quad (0.1)$$

у которой $c \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\kappa)$ линейное пространство функций $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$f(z) = \sum_{\substack{n \equiv \theta \pmod{1} \\ n \neq 0}} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{|n|}} W_{\text{sign}(n)k/2, \kappa}(4\pi|n|y) e^{2\pi i n x}, \quad (0.2)$$

где $\alpha(n)$ — последовательность комплексных чисел, для которой $\alpha(n) = O(|n|^\sigma)$ с некоторым $\sigma \in \mathbb{R}$ при $|n| \rightarrow \infty$, а $W_{\mu, \kappa}(y)$ — функция Уиттекера. Следуя [1] и [2], определим для таких f и M в полосе $1/2 + \sigma < \text{Re } s < \infty$ ряды Гекке–Маасса:

$$\xi_f^{(\pm)}(M; s) = \sum_{n \equiv \theta \pmod{1}}^{(\pm)} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{|n|}} \left| \frac{c}{2\pi n} \right|^s e^{2\pi i a n / c}. \quad (0.3)$$

Для $\xi_f^{(+)}$ суммирование ведется по положительным n , а для $\xi_f^{(-)}$ — по отрицательным. В дальнейшем мы будем придерживаться традиционных обозначений:

$$(M : z) = cz + d, \quad M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (f|_k M)(z) = e^{-ik \arg(M : z)} f(M(z)).$$

Здесь и в дальнейшем $\arg w$ означает главную ветвь аргумента с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$.

Хорошо известно, что для f и g из $\mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\kappa)$ соотношение $(f|_k M) = g$ эквивалентно голоморфной продолжимости рядов

$$\xi_f^{(\pm)}(M; s), \quad \xi_g^{(\pm)}(M^{-1}; s) \quad (0.4)$$

на всю комплексную плоскость как целых функций конечного порядка, связанных функциональными уравнениями специального вида. Гекке (см. [3] и [4]) детально изучил эти вопросы для $\kappa = (k-1)/2$, а Маасс [5] — в общем случае. Следует отметить, что у Гекке и Маасса $a = d = 0$. Главный инструмент исследования в таких задачах — преобразования Меллина

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-10439).

$$\int_0^\infty f\left(\frac{a}{c} + \frac{iy}{|c|}\right) y^{s-1} dy, \quad \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{a}{c} + \frac{iy}{|c|}\right) y^{s-1} dy.$$

Мы развиваем новый подход, основанный на преобразовании Меллина

$$\int_0^\infty f\left(\frac{a}{c} + (u+i) \frac{y}{|c|}\right) y^{s-1} dy$$

с непрерывным параметром $u \in \mathbb{R}$. При этом удастся выписать функциональные уравнения с традиционными гамма-множителями, связывающие ряды $\xi_f^{(\pm)}(M; s)$ и $\xi_g^{(\pm)}(M^{-1}; s)$. Напомним, что в аналогичном результате Массаса из [5] присутствуют значения гипергеометрических функций в точке $1/2$. Это замечание становится актуальным уже для арифметически важного случая $k \equiv 1/2 \pmod{1}$ (см. [6] и [7]). Более того, мы доказываем формулу суммирования пуассоновского типа, в которой участвуют средние по коэффициентам $\alpha_f(n)$ в левой части и $\alpha_g(n)$ в правой части. Она выглядит достаточно простой с технической точки зрения, что весьма важно для приложений.

Автор признателен Н. В. Кузнецову за внимание и дискуссии по рассматриваемому кругу вопросов.

§1. Специальные функции

В этом параграфе приводятся некоторые сведения из справочников [8–11] по специальным функциям, которые понадобятся в дальнейшем.

Преобразование Меллина для экспоненциальной функции

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

определяет гамма-функцию, мероморфную на всей комплексной плоскости, с простыми полюсами в точках $s = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и соответствующими им вычетами $(-1)^n/n!$. Функция $1/\Gamma(s)$ целая, и при этом

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}.$$

О поведении функции $\Gamma(s)$ можно судить по асимптотической формуле Стирлинга: для $\delta \in (0, \pi)$ при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно в угле $-\pi + \delta < \arg s < \pi - \delta$

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s} (1 + O_\delta(|s|^{-1})).$$

Из нее непосредственно следует, что

(а) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно в угле $-\pi + \delta < \arg s < \pi - \delta$

$$\frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s)} = s^\alpha (1 + O_{\alpha, \delta}(|s|^{-1})); \quad (1.1)$$

(б) для любого $\delta \in (0, \infty)$ при $|t| \rightarrow \infty$ равномерно по $\sigma \in [-\delta, \delta]$

$$|\Gamma(\sigma + it)| = \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-1/2} e^{-\pi|t|/2} (1 + O_\delta(|t|^{-1})). \quad (1.2)$$

Для функций Уиттекера справедливы следующие оценки:

(а) при $y \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$

$$W_{\mu, \varkappa}(y) \ll_{\varepsilon, \mu, \varkappa} y^{1/2 - |\operatorname{Re} \varkappa| + \varepsilon}; \quad (1.3)$$

(b) при $y \rightarrow \infty$

$$W_{\mu, \varkappa}(y) \ll_{\mu, \varkappa} y^{\operatorname{Re} \mu} e^{-y/2}. \quad (1.4)$$

Пусть ${}_2F_1(a, b; c; w)$ — гипергеометрическая функция Гаусса и

$$a = 1/2 + s + \varkappa, \quad b = 1/2 + s - \varkappa, \quad c = 1 + s - k/2. \quad (1.5)$$

Определим четыре функции $Q_j(w) = Q_j(k, \varkappa, s; w)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), положив

$$Q_1(w) = {}_2F_1(a, b; c; (1+w)/2),$$

$$Q_2(w) = (1+w)^{1-c}(1-w)^{c-a-b} {}_2F_1(1-a, 1-b; 2-c; (1+w)/2),$$

$$Q_3(w) = {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; (1-w)/2),$$

$$Q_4(w) = (1+w)^{1-c}(1-w)^{c-a-b} {}_2F_1(1-a, 1-b; 1+c-a-b; (1-w)/2).$$

Все они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-w^2) \frac{d^2 Q}{dw^2} - (k+2(1+s)w) \frac{dQ}{dw} - \left(\left(\frac{1}{2} + s \right)^2 - \varkappa^2 \right) Q = 0$$

и связаны соотношениями Куммера (см. [8] или [10])

$$\begin{aligned} Q_3(w) &= \frac{\Gamma(1+s+k/2) \Gamma(k/2-s)}{\Gamma(1/2+\varkappa+k/2) \Gamma(1/2-\varkappa+k/2)} Q_1(w) \\ &\quad + \frac{4^s \Gamma(1+s+k/2) \Gamma(s-k/2)}{\Gamma(1/2+s+\varkappa) \Gamma(1/2+s-\varkappa)} Q_2(w), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} 4^s Q_4(w) &= \frac{\Gamma(1-s-k/2) \Gamma(k/2-s)}{\Gamma(1/2-s+\varkappa) \Gamma(1/2-s-\varkappa)} Q_1(w) \\ &\quad + \frac{4^s \Gamma(1-s-k/2) \Gamma(s-k/2)}{\Gamma(1/2+\varkappa-k/2) \Gamma(1/2-\varkappa-k/2)} Q_2(w). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Нам понадобится выражение для определителя Вронского (см. [10])

$$Q_3(w)Q'_1(w) - Q'_3(w)Q_1(w) = 2 \cdot 4^s \frac{\Gamma(1+s+k/2) \Gamma(1+s-k/2)}{\Gamma(1/2+s+\varkappa) \Gamma(1/2+s-\varkappa)} q(w), \quad (1.8)$$

где

$$q(w) = (1+w)^{-1-s+k/2} (1-w)^{-1-s-k/2}. \quad (1.9)$$

В соответствии с обозначениями (1.5), если $-\infty < \operatorname{Re} w < 1$ и $-1/2 + |\operatorname{Re} \varkappa| < \operatorname{Re} s < \infty$ (см. [11]), то

$$\int_0^\infty W_{k/2, \varkappa}(2y) e^{wy} y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{2^s \Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{1+w}{2}\right). \quad (1.10)$$

Пусть $\delta \in (0, \infty)$, $\sigma \in [-\delta, \delta]$, $s = \sigma + it$ с $t \in \mathbb{R}$ и $|t| \rightarrow \infty$. Из (1.1) и (1.2) непосредственно следует, что для $j = 1, 2, 3, 4$ в круге $|w+1| < 2$

$$Q_j(k, \varkappa, s; w) \ll_{k, \varkappa, \delta, w} e^{-\lambda|t|/\log|t|} \quad (1.11)$$

с некоторым положительным $\lambda = \lambda(w)$.

§2. Функциональные уравнения

В соответствии с обозначениями из введения и §1, в полосе $1/2 + \sigma < \operatorname{Re} s < \infty$ положим

$$\begin{aligned} \eta_f(M; s; w) = & \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{2^s \Gamma(1 + s + k/2)} Q_3(w) \xi_f^{(-)}(M; s) \\ & + \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{2^s \Gamma(1 + s - k/2)} Q_1(w) \xi_f^{(+)}(M; s). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ЛЕММА 1. Пусть $f, g \in \mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\varkappa)$ и для матрицы M из формулы (0.1)

$$(f|_k M) = g. \quad (2.2)$$

Тогда для любого $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta_f(M; s; iu) = & e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} (1 + iu)^{-s+k/2} (1 - iu)^{-s-k/2} \\ & \times \int_{(u^2+1)^{-1/2}}^{\infty} g\left(-\frac{d}{c} + (i - u) \frac{t}{|c|}\right) t^{-s-1} dt \\ & + \int_{(u^2+1)^{-1/2}}^{\infty} f\left(\frac{a}{c} + (i + u) \frac{t}{|c|}\right) t^{s-1} dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки $z \rightarrow -\frac{d}{c} - \frac{1}{|c|z}$ равенство (2.2) можно представить в виде

$$e^{-(1+\operatorname{sign}(c))\pi i k/2} e^{ik \arg z} f\left(\frac{a}{c} + \frac{z}{|c|}\right) = g\left(-\frac{d}{c} - \frac{1}{|c|z}\right). \quad (2.4)$$

Пусть $\delta = \max(-1/2 + |\operatorname{Re} \varkappa|, 1/2 + \sigma)$. Из (1.3) и (1.4) следуют оценки

(а) для любого $\varepsilon > 0$ при $y \rightarrow 0$

$$f(z) \ll_{\varepsilon} (1/y)^{\delta+\varepsilon}; \quad (2.5)$$

(б) при $y \rightarrow \infty$ для некоторого положительного $\lambda = \lambda(\theta)$

$$f(z) \ll e^{-\lambda y}. \quad (2.6)$$

Положим в (2.4) $z = (u + i)t$ с $u \in (-\infty, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$. Так как

$$\begin{aligned} e^{ik \arg((u+i)t)} &= e^{ik \arg(u+i)} = \left(\frac{u+i}{u-i}\right)^{k/2} = \left(-\frac{1-iu}{1+iu}\right)^{k/2} \\ &= e^{\pi i k/2} (1+iu)^{-k/2} (1-iu)^{k/2}, \end{aligned}$$

то

$$f\left(\frac{a}{c} + \frac{(i+u)t}{|c|}\right) = e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} (1+iu)^{k/2} (1-iu)^{-k/2} g\left(-\frac{d}{c} + \frac{i-u}{|c|(u^2+1)t}\right). \quad (2.7)$$

Из (0.2) с помощью оценок (1.3) и (1.4) в полосе $\delta < \operatorname{Re} s < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f\left(\frac{a}{c} + \frac{(i+u)t}{|c|}\right) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n \equiv \theta \pmod{1}}^{(-)} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} \int_0^\infty W_{-k/2, \varkappa}\left(2 \left|\frac{2\pi n}{c}\right| t\right) e^{(2\pi n/|c|)(iu)t} t^{s-1} dt \\ &+ \sum_{n \equiv \theta \pmod{1}}^{(+)} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} \int_0^\infty W_{k/2, \varkappa}\left(2 \left|\frac{2\pi n}{c}\right| t\right) e^{(2\pi n/|c|)(iu)t} t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

Производя замены $t \rightarrow t|c/2\pi n|$, с помощью (1.10) преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{2^s \Gamma(1 + s + k/2)} Q_3(iu) \xi_f^{(-)}(M; s) \\ &+ \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{2^s \Gamma(1 + s - k/2)} Q_1(iu) \xi_f^{(+)}(M; s). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.1) получаем

$$\eta_f(M; s; iu) = \int_0^\infty f\left(\frac{a}{c} + \frac{(i+u)t}{|c|}\right) t^{s-1} dt. \quad (2.8)$$

Разобьем интервал интегрирования на два: $(0, (u^2 + 1)^{-1/2}]$, $[(u^2 + 1)^{-1/2}, \infty)$. Произведя в первом интеграле замену $t \rightarrow (u^2 + 1)^{-1} t^{-1}$ и воспользовавшись равенством (2.7), получим утверждение леммы 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f, g \in \mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\varkappa)$. Тогда для матрицы M вида (0.1) следующие два условия эквивалентны:

- (i) $(f|_k M)(z) = g(z)$ для любого $z \in \mathbb{H}$;
- (ii) в круге $|w| < 1$ функции $\eta_f(M; s; w)$, $\eta_g(M^{-1}; s; w)$ продолжаются голоморфно по s на всю комплексную плоскость как целые функции конечного порядка и связаны функциональным уравнением

$$e^{-\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} \eta_f(M; s; w) = (1+w)^{-s+k/2} (1-w)^{-s-k/2} \eta_g(M^{-1}; -s; -w). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (i). Из интегрального представления (2.3) леммы 1 для $w = iu$ после замены $t \rightarrow t/\sqrt{1+u^2}$ получаем

$$\begin{aligned} & \eta_f(M; s; w) \\ &= e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} (1+w)^{-(s-k)/2} (1-w)^{-(s+k)/2} \int_1^\infty g\left(-\frac{d}{c} + i \sqrt{\frac{1+w}{1-w}} \frac{t}{|c|}\right) t^{-s-1} dt \\ &+ (1+w)^{-s/2} (1-w)^{-s/2} \int_1^\infty f\left(\frac{a}{c} + i \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} \frac{t}{|c|}\right) t^{s-1} dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как соотношение (2.2) эквивалентно равенству $(g|_k M^{-1}) = f$, то по тем же причинам

$$\begin{aligned} & \eta_g(M^{-1}; -s; -w) \\ &= e^{-\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} (1-w)^{(s+k)/2} (1+w)^{(s-k)/2} \int_1^\infty f\left(\frac{a}{c} + i\sqrt{\frac{1-w}{1+w}} \frac{t}{|c|}\right) t^{s-1} dt \\ &+ (1-w)^{s/2} (1+w)^{s/2} \int_1^\infty g\left(-\frac{d}{c} + i\sqrt{\frac{1+w}{1-w}} \frac{t}{|c|}\right) t^{-s-1} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из этих двух интегральных представлений с помощью принципа аналитического продолжения по s и w непосредственно следует утверждение (ii).

Пусть теперь справедливо утверждение (ii). Из оценки (1.11) следует, что для любого фиксированного w из круга $|w| < 1$ функции $\eta_f(M; s; w)$, $\eta_g(M^{-1}; s; w)$ убывают по s быстрее любой степени на вертикальных прямых в полосе $1/2 + \sigma < \operatorname{Re} s < \infty$. С помощью функционального уравнения (2.9) и принципа Линделёфа это утверждение распространяется на полосу $-\infty < \operatorname{Re} s \leq 1/2 + \sigma$. Воспользовавшись формулой обращения Меллина, из (2.8) для $1/2 + \max(\sigma, |\operatorname{Re} \varkappa|) < \mu < \infty$ получаем

$$f\left(\frac{a}{c} + \frac{z}{|c|}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} \eta_f\left(M; s; \frac{ix}{y}\right) y^{-s} ds.$$

Перенесем контур интегрирования на прямую $\operatorname{Re} s = -\mu$ и воспользуемся функциональным уравнением (2.9). Тогда

$$f\left(\frac{a}{c} + \frac{z}{|c|}\right) = e^{\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} \left(\frac{y+ix}{y-ix}\right)^{k/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = -\mu} \eta_g\left(M^{-1}; -s; -\frac{ix}{y}\right) \left(\frac{y}{|z|^2}\right)^s ds.$$

Заменяя здесь s на $-s$ и принимая во внимание равенства

$$-\frac{1}{z} = -\frac{x}{|z|^2} + \frac{y}{|z|^2} i, \quad e^{\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} \left(\frac{y+ix}{y-ix}\right)^{k/2} = e^{(1+\operatorname{sign}(c))\pi ik/2} e^{-ik \arg z},$$

приходим к соотношению (2.4), которое после соответствующей замены переходит в (i). Теорема 1 полностью доказана.

В силу формулы (2.1) функциональное уравнение (2.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & e^{-\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s - \varkappa\right) 2^{-s} \left\{ \frac{Q_3(w)}{\Gamma(1 + s + k/2)} \xi_f^{(-)}(M; s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{Q_1(w)}{\Gamma(1 + s - k/2)} \xi_f^{(+)}(M; s) \right\} \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \varkappa\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s - \varkappa\right) 2^s \left\{ \frac{Q_2(w)}{\Gamma(1 - s + k/2)} \xi_g^{(-)}(M^{-1}; -s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{Q_4(w)}{\Gamma(1 - s - k/2)} \xi_g^{(+)}(M^{-1}; -s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Продифференцировав обе части этого равенства по w и положив $w = 0$, получим пару функциональных уравнений Маасса из [5]. Возникающие при этом множители $Q_j(k, \varkappa, s; 0)$ и $Q'_j(k, \varkappa, s; 0)$ для $j = 1, 2, 3, 4$ выражаются через

гамма-функцию только для частных случаев $\varkappa = \pm(k-1)/2$ (Гекке) и $k=0$ (Маасс).

Однако от функций $Q_j(w)$ в (2.12) можно полностью избавиться и в общем случае. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f, g \in \mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\varkappa)$. Тогда для матрицы M вида (0.1) следующие два условия эквивалентны:

- (i) $(f|_k M)(z) = g(z)$ для любого $z \in \mathbb{H}$;
- (ii) функции

$$\xi_f^{(-)}(M; s), \quad \xi_f^{(+)}(M; s), \quad \xi_g^{(-)}(M^{-1}; s), \quad \xi_g^{(+)}(M^{-1}; s)$$

продолжаются голоморфно по s на всю плоскость комплексного переменного как целые функции конечного порядка и удовлетворяют функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} e^{-\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} \xi_f^{(-)}(M; s) \\ = \vartheta^{(-,-)}(-s) \xi_g^{(-)}(M^{-1}; -s) + \vartheta^{(-,+)}(-s) \xi_g^{(+)}(M^{-1}; -s), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} e^{-\operatorname{sign}(c)\pi ik/2} \xi_f^{(+)}(M; s) \\ = \vartheta^{(+,-)}(-s) \xi_g^{(-)}(M^{-1}; -s) + \vartheta^{(+,+)}(-s) \xi_g^{(+)}(M^{-1}; -s), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta^{(-,-)}(s) &= \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{\Gamma(1 + s + k/2) \Gamma(-s - k/2)}, \\ \vartheta^{(-,+)}(s) &= \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{\Gamma(1/2 - k/2 + \varkappa) \Gamma(1/2 - k/2 - \varkappa)}, \\ \vartheta^{(+,-)}(s) &= \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{\Gamma(1/2 + k/2 + \varkappa) \Gamma(1/2 + k/2 - \varkappa)}, \\ \vartheta^{(+,+)}(s) &= \frac{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}{\Gamma(1 + s - k/2) \Gamma(-s + k/2)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть в (2.10) через $T(s; w)$. Тогда в силу (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{Q_3(w)}{\Gamma(1 + s + k/2)} \xi_f^{(-)}(M; s) + \frac{Q_1(w)}{\Gamma(1 + s - k/2)} \xi_f^{(+)}(M; s) \\ = \frac{2^s T(s; w)}{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}, \\ \frac{Q'_3(w)}{\Gamma(1 + s + k/2)} \xi_f^{(-)}(M; s) + \frac{Q'_1(w)}{\Gamma(1 + s - k/2)} \xi_f^{(+)}(M; s) \\ = \frac{2^s T'_w(s; w)}{\Gamma(1/2 + s + \varkappa) \Gamma(1/2 + s - \varkappa)}. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений относительно $\xi_f^{(-)}$ и $\xi_f^{(+)}$, с помощью (1.8) находим

$$\begin{aligned}\xi_f^{(-)}(M; s) &= \frac{T(s; w)Q'_1(w) - T'_w(s; w)Q_1(w)}{2^{s+1}q(w)\Gamma(1 + s - k/2)}, \\ \xi_f^{(+)}(M; s) &= \frac{T'_w(s; w)Q_3(w) - T(s; w)Q'_3(w)}{2^{s+1}q(w)\Gamma(1 + s + k/2)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если выполнено условие (i), то $\xi_f^{(-)}$ и $\xi_f^{(+)}$ продолжаются голоморфно по s на всю комплексную плоскость как целые функции. Точно так же доказывается аналогичное утверждение относительно $\xi_g^{(-)}$ и $\xi_g^{(+)}$. Выражая $Q_3(w)$ и $Q_4(w)$ в формуле (2.12) через $Q_1(w)$ и $Q_2(w)$ с помощью соотношений Куммера (1.6) и (1.7), а также принимая во внимание линейную независимость функций Q_1 и Q_2 , приходим к функциональным уравнениям (2.13) и (2.14). Обращая эти рассуждения, получим импликацию (ii) $\implies$ (i). Теорема 2 полностью доказана.

§3. Пуассоновская формула суммирования

Положим для $y \in (0, \infty)$

$$\Phi^{(\pm, \pm)}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} \vartheta^{(\pm, \pm)}(s) y^{-s} ds, \quad (3.1)$$

где под $(\pm, \pm)$ подразумеваются четыре комбинации: $(-, -)$, $(-, +)$, $(+, -)$, $(+, +)$. Во всех случаях интегрирование ведется по контуру, выходящему из бесконечно удаленной точки снизу и уходящему вверх снова по прямой $\operatorname{Re} s = \mu$. При этом полюсы обходятся справа и $-\infty < \mu < -1/2$.

Для $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}')$ пространство Шварца, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi: \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{C}$, которые вместе со своими производными убывают быстрее любой степени около 0 и ∞ . Положим для $y \in (0, \infty)$

$$\widehat{\varphi}(-y) = \int_0^\infty [\varphi(-t)\Phi^{(-, -)}(ty) + \varphi(t)\Phi^{(-, +)}(ty)] \frac{dt}{t}, \quad (3.2)$$

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_0^\infty [\varphi(-t)\Phi^{(+, -)}(ty) + \varphi(t)\Phi^{(+, +)}(ty)] \frac{dt}{t}. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f, g \in \mathfrak{M}_\theta^{(k)}(\mathcal{X})$ и $(f|_k M) = g$ для матрицы M вида (0.1). Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}')$

$$\sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \varphi\left(\frac{2\pi n}{|c|}\right) \frac{\alpha_f(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} = e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} \sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \widehat{\varphi}\left(\frac{2\pi n}{|c|}\right) \frac{\alpha_g(n)}{\sqrt{|n|}} e^{-2\pi i b n/c}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$h^{(+)}(s) = \int_0^\infty \varphi(y) y^{s-1} dy, \quad h^{(-)}(s) = \int_0^\infty \varphi(-y) y^{s-1} dy.$$

Функции $h^\pm(s)$ голоморфны на всей комплексной плоскости и равномерно убывают быстрее любой степени в полосе $-\mu \leq \operatorname{Re} s \leq \mu$ для любого $\mu \in (0, \infty)$.

При этом для любого $y \in (0, \infty)$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(+)}(s) y^{-s} ds, \quad \varphi(-y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(-)}(s) y^{-s} ds.$$

Для $\sigma + 1/2 < \mu < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \varphi\left(\frac{2\pi n}{|c|}\right) \frac{\alpha_f(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} \\ &= \sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \frac{\alpha_f(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(-)}(s) \left| \frac{c}{2\pi n} \right|^s ds \\ &\quad + \sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \frac{\alpha_f(n)}{\sqrt{|n|}} e^{2\pi i a n/c} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(+)}(s) \left| \frac{c}{2\pi n} \right|^s ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} [h^{(-)}(s) \xi_f^{(-)}(M; s) + h^{(+)}(s) \xi_f^{(+)}(M; s)] ds. \end{aligned}$$

С помощью функциональных уравнений (2.13) и (2.14) приходим к формуле

$$\begin{aligned} S_\varphi &= e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(-)}(s) [\vartheta^{(-,-)}(-s) \xi_g^{(-)}(M^{-1}; -s) \right. \\ &\quad \left. + \vartheta^{(-,+)}(-s) \xi_g^{(+)}(M^{-1}; -s)] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} h^{(+)}(s) [\vartheta^{(+,-)}(-s) \xi_g^{(-)}(M^{-1}; -s) \right. \\ &\quad \left. + \vartheta^{(+,+)}(-s) \xi_g^{(+)}(M^{-1}; -s)] ds \right\}. \end{aligned}$$

Сдвинув контур интегрирования на прямую $\operatorname{Re} s = -\mu$, произведя замену $s \rightarrow -s$ и поменяв местами суммирование в $\xi_g^{(\pm)}$ с интегрированием, получим тождество (формула суммирования пуассоновского типа)

$$S_\varphi = e^{\operatorname{sign}(c)\pi i k/2} \sum'_{n \equiv \theta \pmod{1}} \widehat{\varphi}\left(\frac{2\pi n}{|c|}\right) \frac{\alpha_g(n)}{\sqrt{|n|}} e^{-2\pi i b n/c},$$

где для $y \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(-y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} [h^{(-)}(-s) \vartheta^{(-,-)}(s) + h^{(+)}(-s) \vartheta^{(-,+)}(s)] y^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} \vartheta^{(-,-)}(s) \left(\int_0^\infty \varphi(-t) t^{-s-1} dt \right) y^{-s} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \mu} \vartheta^{(-,+)}(s) \left(\int_0^\infty \varphi(t) t^{-s-1} dt \right) y^{-s} ds \\ &= \int_0^\infty [\varphi(-t) \Phi^{(-,-)}(ty) + \varphi(t) \Phi^{(-,+)}(ty)] \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

что соответствует формуле (3.2). Точно так же получается интегральное представление (3.3). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Двигая контур в формуле (3.1) влево и учитывая полюсы подынтегрального выражения, получим представление через функции Бесселя:

$$\Phi^{(-,-)}(y) = \frac{\cos(\pi k/2 + \pi \varkappa)}{\sin 2\pi \varkappa} \sqrt{y} J_{-2\varkappa}(2\sqrt{y}) - \frac{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)}{\sin 2\pi \varkappa} \sqrt{y} J_{2\varkappa}(2\sqrt{y}),$$

$$\Phi^{(+,+)}(y) = \frac{\cos(\pi k/2 - \pi \varkappa)}{\sin 2\pi \varkappa} \sqrt{y} J_{-2\varkappa}(2\sqrt{y}) - \frac{\cos(\pi k/2 + \pi \varkappa)}{\sin 2\pi \varkappa} \sqrt{y} J_{2\varkappa}(2\sqrt{y}),$$

$$\Phi^{(-,+)}(y) = \frac{2}{\Gamma(1/2 - k/2 + \varkappa) \Gamma(1/2 - k/2 - \varkappa)} \sqrt{y} K_{2\varkappa}(2\sqrt{y}),$$

$$\Phi^{(+,-)}(y) = \frac{2}{\Gamma(1/2 + k/2 + \varkappa) \Gamma(1/2 + k/2 - \varkappa)} \sqrt{y} K_{2\varkappa}(2\sqrt{y}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Н. В. Гипотеза Петерссона для форм веса нуль и гипотеза Линника. Препринт, Хабаровск, 1977.
2. Goldfeld D. Analytic and arithmetic theory of Poincare series. In: Journées Arithmétiques de Luminy (Colloq. Internat. CNRS, Centre Univ. Luminy, Luminy, 1978), Asterisque, **61**, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 95–107.
3. Hecke E. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Functionalgleichung. Math. Ann., **112**, 644–669 (1936); Mathematische Werke, Gottingen, 1959, pp. 591–626.
4. Ogg A. Modular forms and Dirichlet series, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
5. Maass H. Lectures on modular functions of one complex variable (Tata Institute Lecture Notes, vol. 29), Springer-Verlag, 1983.
6. Goldfeld D., Hoffstein J. Eisenstein series of 1/2-integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series. Invent. Math., **80**, 185–208 (1985).
7. Bump D., Friedberg S., Hoffstein J. On some applications of automorphic forms to number theory. Bull. Amer. Math. Soc., **33**, No. 2, 157–175 (1996).
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I. Наука, М., 1973.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. II. Наука, М., 1966.
10. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Мир, М., 1980.
11. Слейтер Л. Вырожденные гипергеометрические функции. Библ. мат. таблиц, вып. 39, М., 1966.

Институт прикладной математики ДВО РАН
e-mail: vab@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
29 октября 1998 г.