Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Л. Хебгуд, И. Г. Тодоров, О непрерывности носителя бимодулей над максимальными коммутативными самосопряженными алгебрами, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:52:21

УДК 517.98

О непрерывности носителя бимодулей над максимальными коммутативными самосопряженными алгебрами

© 2008. Дж. Л. ХЕБГУД, И. Г. ТОДОРОВ

Для заданной алгебры (или множества) операторов $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим через $\text{Lat } \mathcal{A}$ множество всех замкнутых инвариантных подпространств в $\mathcal{A}$. Вопрос о непрерывной зависимости множества $\text{Lat } \mathcal{A}$ от $\mathcal{A}$ изучали Дэвидсон, Халмош, Шульман и другие авторы. В данной работе рассматривается аналогичный вопрос для подпространств операторов, представляющих собой бимодули над двумя максимальными коммутативными самосопряженными алгебрами (м.к.с.а.). Наш подход опирается на понятия бирешетки и носителя таких объектов, введенные в [2] и [7]. Доказательства анонсируемых здесь результатов будут опубликованы в другой работе.

Прежде всего, введем обозначения и напомним некоторые необходимые нам результаты. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ — гильбертовы пространства. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ — м.к.с.а. в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1$ -бимодулем (или просто м.к.с.а.-бимодулем, если из контекста понятно, о каких $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ идет речь) называется такое подпространство $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, что $\mathcal{D}_2 \mathcal{U} \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{U}$. Если $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ — м.к.с.а.-бимодуль, то мы обозначим через $\text{Ball}(\mathcal{U})$ единичный шар в $\mathcal{U}$ и положим

$$\text{Bil } \mathcal{U} = \{(P, Q) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 : P \text{ и } Q \text{ проекторы и } Q\mathcal{U}P = \{0\}\}.$$

Множество $S = \text{Bil } \mathcal{U}$ представляет собой бирешетку [7] в том смысле, что $(P, 0), (0, Q) \in \text{bil } \mathcal{U}$ для любых проекторов $P \in \mathcal{D}_1$ и $Q \in \mathcal{D}_2$ и что из включений $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2) \in \text{Bil } \mathcal{U}$ вытекает, что $(P_1 \wedge P_2, Q_1 \vee Q_2), (P_1 \vee P_2, Q_1 \wedge Q_2) \in \text{Bil } \mathcal{U}$. Через $\text{Conv } S$ обозначим слабо замкнутую выпуклую оболочку множества S .

Пусть (X, m) и (Y, n) — обычные пространства с (конечной) мерой. Положим $\mathcal{H} = L^2(X, m)$ и $\mathcal{K} = L^2(Y, n)$. Пусть $\mathcal{D}_1 \equiv L^\infty(X, m)$ и $\mathcal{D}_2 \equiv L^\infty(Y, n)$ — м.к.с.а. мультипликаторов в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно. Пусть $\kappa \subseteq X \times Y$ — измеримое подмножество. Говорят, что носитель оператора T содержится в κ , если $P(\beta)TP(\alpha) = 0$ для любых измеримых подмножеств $\alpha \subseteq X$ и $\beta \subseteq Y$, таких, что $(\alpha \times \beta) \cap \kappa = \emptyset$. (Здесь $P(\gamma)$ — оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества γ .) Пространство $\mathcal{M}_{\max}(\kappa)$ всех операторов с носителем в κ представляет собой рефлексивный м.к.с.а.-бимодуль в смысле [4]. Обратно, в [2] было показано, что любой рефлексивный м.к.с.а.-бимодуль $\mathcal{U}$ может быть представлен в таком виде для некоторого по существу единственного множества $\kappa \subseteq X \times Y$, представляющего собой дополнение счетного объединения измеримых прямоугольников (такие множества будем называть ω -замкнутыми [2]). Множество κ называется носителем бимодуля $\mathcal{U}$. Согласно [1] и [7], существует минимальный *-слабо замкнутый м.к.с.а.-бимодуль $\mathcal{U}$, рефлексивная оболочка которого в смысле [4] совпадает с $\mathcal{M}_{\max}(\kappa)$; этот м.к.с.а.-бимодуль мы обозначим через $\mathcal{M}_{\min}(\kappa)$. Тогда $\text{Bil } \mathcal{M}_{\max}(\kappa) = \text{Bil } \mathcal{M}_{\min}(\kappa) = S_\kappa$,

где

$$S_\kappa = \{(P(\alpha), P(\beta)) : \alpha \subseteq X \text{ и } \beta \subseteq Y \text{ измеримы и } (\alpha \times \beta) \cap \kappa = \emptyset\}.$$

Если $\mathcal{M}_{\min}(\kappa) = \mathcal{M}_{\max}(\kappa)$, то будем говорить, что на κ выполняется операторный синтез [1].

Пусть $\kappa \subseteq X \times Y$. Хейдон и Шульман [3] определили величину

$$\gamma(\kappa) = \inf\{m(\alpha) + n(\beta) : \kappa \subseteq (\alpha \times Y) \cup (X \times \beta)\},$$

где точная нижняя грань берется по измеримым множествам α и β . Они показали, что отображение $\kappa \rightarrow \gamma(\kappa)$ является емкостью на множестве всех подмножеств множества $X \times Y$ в том смысле, что

- (a) $\gamma(\kappa) \leq \gamma(\kappa')$, если $\kappa \subseteq \kappa'$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\kappa_n) = \gamma(\kappa)$, если $\{\kappa_n\}$ — возрастающая последовательность подмножеств в $X \times Y$ и $\kappa = \bigcup \kappa_n$;
- (c) $\gamma(\kappa) = \inf\{\gamma(U) : U \text{ открыто и } \kappa \subseteq U\}$.

Соотношение (c) выполняется для любой пары топологий на X и Y , относительно которых m и n являются регулярными борелевскими мерами.

Пусть $\mathcal{Z}$ — семейство упорядоченных троек вида $((\alpha_i)_{i=1}^N, (\beta_i)_{i=1}^N, (\mu_i)_{i=1}^N)$, где $(\alpha_i)_{i=1}^N$ (соответственно $(\beta_i)_{i=1}^N$) — (упорядоченное) измеримое разбиение множества X (соответственно Y) и $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$.

Зафиксируем подмножество $\kappa \subseteq X \times Y$. Для любого элемента $\Delta = ((\alpha_i)_{i=1}^N, (\beta_i)_{i=1}^N, (\mu_i)_{i=1}^N) \in \mathcal{Z}$ положим

$$\gamma_\Delta(\kappa) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i (m(\alpha \cap \alpha_i) + n(\beta \cap \beta_i)) : \kappa \subseteq (\alpha \times Y) \cup (X \times \beta) \right\},$$

где точная нижняя грань берется по измеримым множествам α и β . Ясно, что если $\mu_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, то $\gamma_\Delta(\kappa) = \gamma(\kappa)$. Можно показать, что γ_Δ является емкостью для любого $\Delta \in \mathcal{Z}$. Если Λ — направленное множество, $\kappa_\lambda, \kappa \subseteq X \times Y$ и $\gamma_\Delta(\kappa) \leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\Delta(\kappa_\lambda)$ (соответственно $\limsup_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\Delta(\kappa_\lambda) \leq \gamma_\Delta(\kappa)$) для любого $\Delta \in \mathcal{Z}$, то мы будем писать $\kappa \leq \text{c-lim inf } \kappa_\lambda$ (соответственно $\text{c-lim sup } \kappa_\lambda \leq \kappa$). Будем писать $\kappa = \text{c-lim } \kappa_\lambda$, если $\kappa = \text{c-lim inf } \kappa_\lambda = \text{c-lim sup } \kappa_\lambda$.

Пусть (Z, τ) — топологическое пространство, а $\{E_\lambda\}$ — направленность подмножеств пространства Z . Через $\tau\text{-lim inf } E_\lambda$ обозначим множество всех точек $z \in Z$, являющихся τ -пределами направленностей $\{z_\lambda\}$, таких, что $z_\lambda \in E_\lambda$. Обозначим также через $\tau\text{-lim sup } E_\lambda$ множество всех точек $z \in Z$, являющихся точками τ -сгущения таких направленностей. Пишем $E = \tau\text{-lim } E_\lambda$, если $E = \tau\text{-lim inf } E_\lambda = \tau\text{-lim sup } E_\lambda$. Через w , s^* и s обозначим соответственно слабую, *-сильную и сильную операторные топологии на $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Имеют место следующие результаты, в которых κ является ω -замкнутым подмножеством, а $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — направленностью ω -замкнутых подмножеств в $X \times Y$.

Теорема 1. Положим $S = S_\kappa$, $S_\lambda = S_{\kappa_\lambda}$. Тогда

- (i) $\text{Conv } S \subseteq w\text{-lim inf } \text{Conv } S_\lambda$ в том и только том случае, когда $\text{c-lim sup } \kappa_\lambda \leq \kappa$;
- (ii) $w\text{-lim sup } \text{Conv } S_\lambda \subseteq \text{Conv } S$ в том и только том случае, когда $\kappa \leq \text{c-lim inf } \kappa_\lambda$;
- (iii) $\text{Conv } S = w\text{-lim } \text{Conv } S_\lambda$ в том и только том случае, когда $\kappa = \text{c-lim } \kappa_\lambda$.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $w\text{-}\lim \sup \text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda)) \subseteq \text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa))$;
- (ii) $c\text{-}\lim \sup \kappa_n \leq \kappa$;
- (iii) $S_\kappa \subseteq s\text{-}\lim \inf S_{\kappa_\lambda}$.

Теорема 3. Рассмотрим следующие утверждения:

- (i) $\text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa)) \subseteq s^*\text{-}\lim \inf \text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda))$;
- (ii) $\kappa \leq c\text{-}\lim \inf \kappa_\lambda$;
- (iii) $s\text{-}\lim \sup S_{\kappa_\lambda} \subseteq S_\kappa$.

Тогда (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii).

Следствие 4. Предположим, что $\text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa)) = s^*\text{-}\lim \inf \text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda)) = w\text{-}\lim \sup \text{Ball}(\mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda))$. Тогда $\kappa = c\text{-}\lim \kappa_\lambda$.

Замечания. (i) Импликации (i) $\implies$ (iii) в теоремах 2 и 3 обобщают доказанные в [5] и [6] результаты о непрерывности отображения Lat .

(ii) Для $\kappa = \emptyset$ результаты можно сформулировать проще: $w\text{-}\lim \mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda) \rightarrow \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\kappa_\lambda) \rightarrow 0$.

(iii) Можно показать, что импликации, обратные к указанным в теореме 3, не выполняются. Следующий ниже результат представляет собой частичное обращение импликации (ii) $\implies$ (i) и устанавливает полунепрерывность снизу отображения $\kappa \rightarrow \mathcal{M}_{\min}(\kappa)$ в более слабом смысле.

Теорема 5. Если $\kappa \leq c\text{-}\lim \inf_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda$, то для любого $T \in \mathcal{M}_{\min}(\kappa)$ и любого счетного набора векторов $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$ существует такая направленность $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, что $T_\lambda \in \mathcal{M}_{\min}(\kappa_\lambda)$ и $T_\lambda x \rightarrow Tx$ для любого $x \in \mathcal{E}$.

В частности, если на κ выполнен операторный синтез и $\kappa \leq c\text{-}\lim \inf_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda$, то любой элемент из $\mathcal{M}_{\max}(\kappa)$ можно приблизить направленностью $\{T_\lambda\}$, где $T_\lambda \in \mathcal{M}_{\max}(\kappa_\lambda)$, на любом счетном множестве векторов.

Благодарность. Авторы признательны профессору В. С. Шульману за плодотворное обсуждение рассматриваемых в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. B. Arveson, Ann. of Math. (2), **100** (1974), 433–532. [2] J. A. Erdos, A. Katavolos, V. S. Shulman, J. Funct. Anal., **157**:2 (1998), 554–587. [3] R. G. Haydon, V. S. Shulman, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 497–503. [4] А. И. Логинов, В. С. Шульман, Изв. АН СССР, **39**:6 (1975), 1260–1273. [5] В. С. Шульман, Функц. анализ и его прил., **23**:2 (1989), 86–87. [6] V. S. Shulman, I. G. Todorov, J. Operator Theory, **52**:2 (2004), 371–384. [7] V. S. Shulman, L. Turowska, J. Funct. Anal., **209**:2 (2004), 293–331.

Department of Pure Mathematics, Queen's University Belfast
e-mail: joe.habgood@qub.ac.uk

Department of Pure Mathematics, Queen's University Belfast
e-mail: i.todorov@qub.ac.uk

Поступило в редакцию
7 марта 2007