Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Караханян, Т. А. Хорькова, Об одной характеристике алгебры $C_\beta(\Omega)$, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 04:17:04

УДК 513.83

Об одной характеристике алгебры $C_\beta(\Omega)$

© 2009. М. И. КАРАХАНИЯН, Т. А. ХОРЬКОВА

1. Равномерные алгебры. Пусть $C(K)$ — алгебра всех непрерывных функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ на компакте K с обычной нормой и A — ее замкнутая подалгебра, $A \neq C(K)$, содержащая константы и разделяющая точки из K . Цель данного раздела — явная (весьма простая) конструкция A -бимодуля с нетривиальным дифференцированием; существование такого бимодуля доказал М. В. Шейнберг в [3].

Пусть μ — нетривиальная мера на K , ортогональная к алгебре A . Обозначим через $H(A)$ замыкание алгебры A в норме пространства $L^2(K, |\mu|)$. Положим $\phi = d\mu/d|\mu|$ (производная Радона–Никодима). Имеет место разложение $L^2(K, |\mu|) = H(A) \oplus H(A)^\perp$, причем подпространство $H(A)^\perp$ ненулевое, ибо $\phi \in H(A)^\perp$. Пусть $P, P^\perp$ — ортогональные проекторы на $H(A)$ и $H(A)^\perp$.

Пусть $\mathcal{B}$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в $L^2(K, |\mu|)$. Любой оператор $T \in \mathcal{B}$ представляется в виде операторной матрицы $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ (относительно указанного разложения). Введем оператор T^f умно-

жения на f в $L^2(K, |\mu|)$, $f \in C(K)$. Ясно, что $T_{21}^f = 0$ при $f \in A$. Рассмотрим пространство операторов $P\mathcal{B}P^\perp$; в матричной записи для элементов $T \in P\mathcal{B}P^\perp$ имеем $T_{11} = T_{21} = T_{22} = 0$. Положим $D_f = T_{12}^f$, $f \in A$. Ясно, что $P\mathcal{B}P^\perp$ есть A -бимодуль относительно умножений $f \cdot T = T^f T$, $T \cdot f = T T^f$, $f \in A$. Имеем очевидное равенство $D_{fg} = T^f D_g + D_f T^g$. Таким образом, отображение $f \mapsto D_f$ есть дифференцирование A -бимодуля $P\mathcal{B}P^\perp$.

Теорема 1. Дифференцирование D_f не является внутренним.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $PLP^\perp \in P\mathcal{B}P^\perp$ — такой элемент, что $D_f = T^f PLP^\perp - PLP^\perp T^f$. Так как $D_f = PT^f - T^f P$, то $T^f(PLP^\perp + P) - (PLP^\perp + P)T^f = 0$ для всех $f \in A$. Поэтому операторы T^f , $f \in A$, коммутируют с оператором $PLP^\perp + P$. Из коммутативности алгебры A и нормальности операторов T^f , $f \in A$, следует (по теореме Фугледе), что $PLP^\perp + P$ коммутирует и с $T^{\bar{f}} = (T^f)^*$ и, согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса, оператор $PLP^\perp + P$ коммутирует с любым оператором T^g , где $g \in C(K)$, на $L^2(K, |\mu|)$. Поэтому $PLP^\perp + P = \alpha I$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Но это невозможно. Таким образом, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Построенный бимодуль изоморфен бимодулю $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H(A)^\perp, H(A))$ (банахово пространство ограниченных линейных отображений) с умножениями $f \cdot L = T_{11}^f L$ и $L \cdot f = L T_{22}^f$.

В следующем разделе мы перенесем эту конструкцию на еще один класс банаховых бимодулей.

2. β -равномерные алгебры. Пусть $C_b(\Omega)$ — алгебра всех ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве Ω , наделенная равномерной нормой $\| \cdot \|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$) и $C_0(\Omega)$ — пространство функций из $C_b(\Omega)$, которые обращаются в нуль на бесконечности.

Топология на $C_b(\Omega)$, заданная с помощью семейства полунорм $\{P_u\}_{u \in C_0(\Omega)}$, $P_u(f) = \|uf\|_\infty$, называется β -топологией, а алгебра $C_b(\Omega)$ в этой топологии обозначается через $C_\beta(\Omega)$. Через $C'_\beta(\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное к $C_\beta(\Omega)$. Известно, что $C_\beta(\Omega)$ полна в β -топологии (см. [1], [2]).

Любой элемент $l \in C'_\beta(\Omega)$ задается конечной комплекснозначной мерой на Ω ; подчеркнем (для контраста), что функционалы $l \in C'_b(\Omega)$ задаются мерами на пространстве максимальных идеалов алгебры $C_b(\Omega)$, стоун-чеховском расширении пространства Ω .

Замкнутая в β -топологии подалгебра алгебры $C_\beta(\Omega)$ называется β -равномерной, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω . Алгебру A , наделенную β -топологией, будем обозначать через A_β , а через A'_β обозначим пространство, сопряженное к A_β . Если $A_\beta \neq C_\beta(\Omega)$, то существует конечная мера μ на Ω , ортогональная к алгебре A_β (см. [1]). Банахово пространство B , на котором заданы действия $f \cdot b, b \cdot f, f \in A, b \in B$, удовлетворяющие стандартным требованиям, назовем A_β -бимодулем, если указанные действия непрерывны (в β -топологии) для любого $b \in B$.

Зафиксируем β -равномерную подалгебру $A_\beta \neq C_\beta(\Omega)$. Как и в разд. 1, введем подпространство $H(A)$ (как замыкание алгебры A в $L^2(\Omega, |\mu|)$), разложение $L^2(\Omega, |\mu|) = H(A) \oplus H(A)^\perp$, алгебру операторов $\mathcal{B}$, ее подпространство $P\mathcal{B}P^\perp$ и отображение $f \mapsto D_f, f \in A$. Отличие от разд. 1 состоит в том, что алгебра $\mathcal{B}$, рассматриваемая с равномерной топологией, не есть $C_\beta(\Omega)$ -бимодуль, ибо, скажем, отображение $f \mapsto fI$ не является непрерывным в β -топологии. Как следствие, пространство $P\mathcal{B}P^\perp$ (с равномерной топологией) не есть A_β -бимодуль. Чтобы «исправить» положение, рассмотрим пространство ядерных операторов $\mathcal{T}_1$, снабженное нормой $\|T\|_1 = \text{tr}|T|$.

Лемма 1. *Пространство $\mathcal{T}_1$ есть бимодуль относительно умножений $f \cdot T = T^f T, T \cdot g = TT^g$.*

Доказательство. Для доказательства нам достаточно показать, что для любого T из $\mathcal{T}_1$ бимодульная операция $f \cdot T \cdot g = T^f TT^g$ непрерывна в β -топологии. Ядерный оператор T есть интегральный оператор с ядром $\sum_k \lambda_k f_k(x) g_k(y)$, где $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ — ортонормированные системы, $\lambda_k > 0, \sum_k \lambda_k < \infty$.

Для любой непрерывной функции ω оператор $T^\omega T$ также является интегральным оператором с ядром $\sum_k \lambda_k \omega(x) f_k(x) g_k(y)$. Его ядерная норма не превосходит величины

$$\begin{aligned} \sum_k \lambda_k \|\omega f_k\|_{L^2} &\leq \left(\sum_k \lambda_k \right)^{1/2} \left(\sum_k \lambda_k \|\omega f_k\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \lambda_k \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\omega(x)|^2 h(x) d|\mu| \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $h(x) = \sum_k \lambda_k |f_k(x)|^2$. Функция h суммируема, а потому можно подобрать функцию ω так, чтобы оцениваемая величина была конечной и $\omega(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. $u(x) = 1/\omega(x)$ — функция из $C_0(\Omega)$. Пусть теперь сеть $\{f_i\}_{i \in I}$ из A_β сходится к f_0 . Тогда

$$\lim_I \|T^{f_i} T - T^{f_0} T\|_1 = \lim_I \|(T^{f_i} T^u - T^{f_0} T^u) T^\omega T\|_1 \leq \|T^\omega T\|_1 \lim_I \|f_i u - f_0 u\|_\infty = 0.$$

Лемма доказана.

Пространство $\mathcal{B}$ является сопряженным к банаховому пространству $\mathcal{T}_1$, так как каждый оператор B из $\mathcal{B}$ задает функционал $\Phi_B(\cdot) = \text{tr}(B \cdot)$ на $\mathcal{T}_1$ (см. [9]). Поэтому A_β -бимодульная структура на $\mathcal{T}_1$ естественным образом распространяется на $\mathcal{B}$, превращая $\mathcal{B}$ в A_β -бимодуль в $*$ -слабой топологии.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Банахово пространство $P\mathcal{B}P^\perp$, снабженное слабой топологией, есть A_β -бимодуль. Отображение $f \mapsto D_f$, $f \in A$, есть нетривиальное дифференцирование.*

Авторы благодарят Р. С. Исмагилова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. C. Buck, Michigan Math. J., **5**:2 (1958), 95–104. [2] I. Glikhsberg, Proc. Amer. Math. Soc., **14**:2 (1963), 329–333. [3] М. В. Шейнберг, УМН, **32**:5 (1977), 203–204. [4] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд. Моск. ун-та, 1986. [5] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973. [6] R. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 127, 1972. [7] М. В. Шейнберг, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1971, № 3, 53–58. [8] М. В. Шейнберг, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1972, № 4, 39–45. [9] М. Рид, Б. Саймон, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977. [10] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975. [11] R. Giles, Trans. Amer. Math. Soc., **161** (1971), 467–474. [12] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.

Ереванский государственный университет
e-mail: m_karakhanyan@yahoo.com

Казанский государственный энергетический университет
e-mail: tamarakhrkva@rambler.ru

Поступило в редакцию
28 марта 2007 г.

В переработанном виде
9 июля 2007 г.

УДК 517.983.27, 517.986.7

Анализ устойчивости динамики возрастной структуры нетрудоспособного населения*

© 2009. Пэн Цзигэнь, Сун Сюэли, Чжан Сянцинъ

Пусть X — вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Если $v \in X^*$, то можно показать, что бинарное отношение $\leqslant_v$, определенное на X формулой

$$x \leqslant_v y \iff \|x - y\| \leqslant v(y) - v(x), \quad (1)$$

есть отношение частичного порядка, так что X оказывается упорядоченным банаховым пространством с конусом положительных элементов

$$X_v^+ := \{z \in X : \|z\| \leqslant v(z)\}.$$

*Работа поддержана ГФЕН (контракт №10531030) и частично Программой для выдающихся университетских талантов Нового века.