Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Буаррудж, П. Я. Грозман, Д. А. Лейтес, Новые простые модулярные супералгебры Ли как обобщенные продолжения, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 3, 1–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:33:48

Новые простые модулярные супералгебры Ли как обобщенные продолжения*

© 2008. С. БУАРРУДЖ, П. Я. ГРОЗМАН, Д. А. ЛЕЙТЕС

§1. Постановка задачи

Всюду в этой работе $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$.

Классические работы С. Ли, В. Киллинга и Э. Картана завершили классификацию над полем $\mathbb{C}$ следующих типов *простых алгебр Ли*:

*всех конечномерных и некоторых бесконечномерных
(а именно, состоящих из полиномиальных векторных полей).* (1)

В 1930-х годах топологи стали рассматривать алгебры Ли и супералгебры Ли над полями характеристики $p > 0$, называемые также *модулярными* (супер)алгебрами Ли. *Простые* модулярные алгебры Ли (над конечными полями $\mathbb{K}$) привлекли внимание как побочный продукт классификации конечных простых групп. *Супералгебры Ли*, даже простые и даже над полями $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, не особенно интересовали математиков до 1970-х годов, когда физики обнаружили их (выдающуюся) полезность, однако *модулярные* супералгебры Ли практически не интересовали исследователей до недавнего времени.

С 1930-х годов математики открывали все новые и новые примеры простых модулярных алгебр Ли, пока Кострикин и Шафаревич [15] не сформулировали для $p > 7$ гипотезу (КШ-гипотезу), охватившую все известные к этому времени примеры и верную, как оказалось, не только при $p > 7$, но и при $p = 7$. Чтобы сформулировать (обобщенную) КШ-гипотезу и ее супер-аналог, напомним необходимые понятия и методы. Например, все простые конечномерные алгебры Ли над $\mathbb{C}$ имеют вид $\mathfrak{g}(A)$, где A — матрица, называемая *матрицей Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$.

1.1. Что такое $\mathfrak{g}(A)$. (Супер)алгебры Ли вида $\mathfrak{g}(A)$ (иногда их называют контраградиентными наряду с некоторыми другими алгебрами, у которых матрицы Картана нет) определяются следующим образом. Пусть $A = (A_{ij})$ — произвольная матрица размера $n \times n$ ранга l с элементами из поля $\mathbb{K}$. Фиксируем векторное пространство $\mathfrak{h}$ размерности $2n - l$ и его дуальное $\mathfrak{h}^*$ и выберем n линейно независимых векторов $h_i \in \mathfrak{h}$ и n линейно независимых векторов $\alpha_j \in \mathfrak{h}^*$ так, что $\alpha_i(h_j) = A_{ij}$.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$; рассмотрим свободную супералгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A, I)$, порожденную генераторами $e_1^\pm, \dots, e_n^\pm$, для которых $p(e_j^\pm) = i_j$, где p —

*Мы благодарны А. В. Лебедеву и И. М. Щепочкиной за помощь; Д. Л. благодарит институт MPiMiS, Лейпциг, где эта статья опубликована как препринт 146/2006, за финансовую поддержку.

четность в $\tilde{\mathfrak{g}}(A, I)$, и пространством $\mathfrak{h}$, с соотношениями

$$\begin{aligned} [e_i^+, e_j^-] &= \delta_{ij} h_i \text{ для всех } i, j, & [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] &= 0, \\ [h, e_j^\pm] &= \pm \alpha_j(h) e_j^\pm \text{ всех } h \in \mathfrak{h} \text{ и для всех } j \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь в каждом равенстве индексы $\pm$ либо все равны $+$, либо все равны $-$). Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}_\pm$ — подалгебры в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}(A, I)$, порожденные всеми элементами $e_i^\pm$.

Предложение. Среди идеалов в $\tilde{\mathfrak{g}}(A, I)$, пересекающихся с $\mathfrak{h}$ по нулю, имеется единственный максимальный идеал $\mathfrak{r}$, и он равен прямой сумме идеалов $\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_+$ и $\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_-$.

Это утверждение хорошо известно над $\mathbb{C}$ для конечномерных и некоторых бесконечномерных алгебр Ли [14]; явное описание идеала $\mathfrak{r}$ для простых супералгебр Ли тех же типов над $\mathbb{C}$ см. в [12]; модулярный случай см. в [2], [3], [17].

Замена $A \mapsto \tilde{A} := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot A$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, сохраняет (супер)алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A, I)$. Мы будем называть матрицу Картана *нормализованной*, если она содержит на диагонали только 0, 1 или 2. Если $A_{jj} = 2$, то $p(e_j^\pm) = \bar{0}$, а чтобы отличать строки с $i_j = \bar{0}$ от строк с $i_j = \bar{1}$, мы будем писать $A_{jj} = \bar{0}$ или $\bar{1}$ (вместо $A_{jj} = 0$ или 1), если $i_j = \bar{0}$. Для нормализованных матриц Картана, которые только и будут рассматриваться, нет нужды указывать I .

Подалгебра $\mathfrak{h}$ действует диагонально на $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, и ненулевые веса (супер)алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ относительно $\mathfrak{h}$ называются корнями. В модулярном случае удобнее использовать другое определение: (супер)алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ имеет $\mathbb{Z}^n$ -градуировку, в которой $\deg e_i^\pm = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$, где ± 1 стоит на i -м месте (в случае $\mathbb{C}$ эта градуировка эквивалентна весовой), и мы будем называть *корнями* ненулевые степени этой градуировки, которым соответствуют ненулевые пространства. Для подмножества $B = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ корневой системы R положим

$$R_B^\pm = \left\{ \alpha \in R \mid \alpha = \pm \sum n_i \sigma_i, n_i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \right\}.$$

Множество B называется *системой простых корней* корневой системы R (или (супер)алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$), если $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ линейно независимы и $R = R_B^- \amalg R_B^+$.

Положим $\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$. Заметим, что модулярные (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ могут не быть простыми, даже если выполняются условия, достаточные для простоты над $\mathbb{C}$.

Предупреждение. Если $m - n \equiv 0 \pmod{p}$ (в частности, если $m = n$ над $\mathbb{C}$), то ни алгебра $\mathfrak{sl}(m|n)$, ни ее простой фактор¹⁾ $\mathfrak{psl}(m|n)$ не имеют матрицы Картана — она есть у алгебры $\mathfrak{gl}(m|n)$.

1.2. Алгебры Ли векторных полей. Выбрав $\mathbb{Z}$ -базис в алгебре многочленов от m переменных $\mathbb{C}[x]$, состоящий из разделенных степеней

$$u^{(r)} := \prod u_i^{(r_i)}, \quad \text{где } u_i^{(r_i)} := \frac{x_i^{r_i}}{r_i!}, \quad (3)$$

получим следующее семейство аналогов алгебры многочленов:

$$\mathcal{O}(m; \underline{N}) := \mathbb{K}[u; \underline{N}] := \text{Span}_{\mathbb{K}}(u^{(r)} \mid r_i < p^{N_i} \text{ для обрезающего вектора } \underline{N}), \quad (4)$$

¹⁾Если супералгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ содержит пространство скалярных матриц $\mathfrak{s} = \mathbb{K}1_{m|n}$, то положим $\mathfrak{pg} = \mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ (проективизация).

где $u = (u_1, \dots, u_m)$, $r = (r_1, \dots, r_m)$, $\underline{N} = (N_1, \dots, N_m)$. Заметим, что из этих многочисленных алгебр разделенных степеней только одна порождается заявленными переменными — а именно та, для которой $N_i = 1$ для всех i . В противном случае в список образующих к u_i нужно добавить $u_i^{(p^{k_i})}$ для всех i и всех k_i , таких, что $1 < k_i < N_i$. Поскольку любое дифференцирование алгебры определяется своими значениями на образующих, то, как мы видим, алгебра $\text{der}(\mathcal{O}(m; \underline{N}))$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(m; \underline{N})$ имеет больше чем m функциональных параметров (коэффициентов при аналогах частных производных), если $N_i \neq 1$ хотя бы для одного i . Определим *специальные частные производные*, положив

$$\partial_i(u_j^{(k)}) = \delta_{ij}u_j^{(k-1)} \quad \text{для всех } k < p^{N_j}.$$

Алгебра Ли всех дифференцирований $\text{der}(\mathcal{O}(m; \underline{N}))$ оказывается менее интересной, чем ее подалгебра специальных дифференцирований, обозначаемая через

$$\text{vect}(m; \underline{N}), \text{ или } W(m; \underline{N}), \text{ или } \text{sder} \mathbb{K}[u; \underline{N}] = \text{Span}_{\mathbb{K}}(u^{(r)} \partial_k \mid r_i < p^{N_i} \text{ при } i \leq m) \quad (5)$$

и называемая *общей векторной алгеброй*. Супералгебра Ли специальных дифференцирований определяется очевидным образом и обозначается через $\text{vect}(m; \underline{N}|n)$.

1.3. КШ-метод. Напомним, что (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *ограниченной*, если $(\text{ad}_X)^p$ является внутренним дифференцированием для любого $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ — производные (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

КШ-гипотеза. При $p > 5$ простые ограниченные модулярные конечномерные алгебры Ли строятся одним из двух способов:

1) Для простой конечномерной алгебры Ли вида $\mathfrak{g}(A)$ над $\mathbb{C}$ возьмем матрицу Картана A , нормализованную таким образом, что $A_{ii} = 2$ для всех i ; выберем целочисленный базис Шевалле (для нормализованной матрицы Картана такой базис — единственный с точностью до знаков); символом $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ обозначим алгебру Ли над $\mathbb{Z}$, порожденную базисом Шевалле, и положим $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} := \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{K}$.

2) Для простой бесконечномерной алгебры Ли векторных полей $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ (возможно, сохраняющей тензор (форму объема, симплектическую или контактную форму)) возьмем в качестве $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ ее аналог, состоящий из специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(m; \underline{N} = (1, \dots, 1))$, сохраняющих модулярный аналог того же тензора.

Алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ просты (иногда с точностью до центра или взятия первой или второй производной) и ограничены.

Обобщенная КШ-гипотеза. Описанные выше (в п. 2)) алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, но с любым $\underline{N}$, и их деформации¹⁾ дают все простые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутыми полями, если $p > 5$. При $p = 5$ к списку нужно также добавить примеры Меликяна (описанные ниже).

¹⁾ Хотя в [18] даны основания считать, что стандартное определение универсальной оберывающей алгебры нуждается в изменении в модулярном случае, а вместе с ним и определение (ко)гомологий, для ограниченных (супер)алгебр Ли вида $\mathfrak{g}(A)$ и их «родственников» инфинитезимальные деформации можно описывать по-старому в терминах $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$, если $p \neq 2$ (ср. [4] и [23]).

Блок, Уилсон, Премет и Штраде, суммировав результаты тридцати лет работы нескольких групп исследователей и добавив новые идеи, доказали приведенную выше обобщенную КШ-гипотезу, см. [22]. При $p < 5$ КШ-процедура и примеры Меликяна дают не все простые конечномерные алгебры Ли, появляются и другие примеры, а некоторые старые исчезают. В [13] мы вернулись к картановскому описанию $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли как алгебр Ли векторных полей, сохраняющих неинтегрируемые распределения, и, таким образом, проинтерпретировали «таинственные» исключительные примеры простых алгебр Ли при $p = 3$ (Брауна, Франк, Ермолаева и Скрыбина), пояснили кузнецовскую интерпретацию [16] алгебр Меликяна (как продолжений неотрицательной части исключительной алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$ в одной из ее $\mathbb{Z}$ -градуировок) и обнаружили три новые серии простых алгебр Ли. В [1] тот же подход привел к открытию супералгебры Ли $\mathfrak{bj}$, простой супер-версии алгебры $\mathfrak{g}(2)$, и $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$, простой супер-версии алгебры Меликяна. Обе супералгебры — и $\mathfrak{bj}$, и $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$ — присущи лишь случаю $p = 3$, а $\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{K}}$ в этом случае не проста.

Мы напомним аналог КШ-гипотезы для $p > 2$ (охватывающий и супералгебры Ли). Цель этой работы — привести аргументы в его пользу.

§2. Классификация простых модулярных супералгебр Ли (гипотезы и результаты)

В дополнение к упомянутым выше двум типам алгебр (алгебр вида $\mathfrak{g}(A)$ и алгебр векторных полей) в супер-случае есть еще один тип «симметричных» алгебр.

2.1. Странные супералгебры. Есть два супер-аналога алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ — непосредственный, $\mathfrak{gl}(m|n)$, и «странный», $\mathfrak{q}(n)$, сохраняющий комплексную структуру, заданную нечетным оператором, т.е. $\mathfrak{q}(n) \subset \mathfrak{gl}(n|n)$ состоит из всех операторов, сохраняющих нечетный оператор $J_{n|n}$, такой, что $J_{n|n}^2 = -\text{Id}$. У этой алгебры есть свой собственный (нечетный) странный след, выделяющий $\mathfrak{sq}(n)$. Супералгебры Ли $\mathfrak{psq}(n)$ просты при $n > 2$.

2.2. Исключительные супералгебры Ли. Недавно Эльдюк по-новому взглянул на магический квадрат Фрейденделя, и его подход (магический суперквадрат) открыл 10 новых примеров простых (исключительных) супералгебр Ли при $p = 3$; еще двенадцать исключений вида $\mathfrak{g}(A)$ (см. предупреждение о «простоте» алгебр вида $\mathfrak{g}(A)$ в предыдущем параграфе) при $p = 5$, 3 и 2 были недавно получены вместе с полной классификацией в [5]. Описание супералгебр Эльдюка см. в [6], [8], [7], [9]; их описание в терминах матриц Картана и аналогов образующих Шевалле и соотношений Серра (и «не-Серра»), а также обозначения, которые мы используем ниже, см. в [2], [3], [5].

2.3. Супер-аналог КШ-гипотезы. Мы используем стандартные обозначения из [10], [22]; точные определения (алгоритм) КТШ-продолжений (Картана–Танаки–Щепочкиной), в том числе *частичных*, см. в [21]. Пусть $m\mathfrak{g}(A)$ обозначает реализацию (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ с помощью m -й матрицы Картана A , список и нумерацию которых см. в [13], [2], [3]. Градуировку $\deg e_i^{\pm} = \pm s_i$ для образующих Шевалле $e_i^{\pm}$ (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ назовем *простейшей*, если все координаты вектора $s = (s_1, \dots, s_n)$ равны 0 и лишь одна «избранная» равна 1. Простая супералгебра ограничена, если ограничена ее четная часть; общее определение см. в [19].

В работе [19] сформулирован следующий аналог КШ-гипотезы, охватывающий и супералгебры. Он основан на совершенно иной идее, и в нем (как и в [13] и [1]) основную роль играют КТШ-продолжения. (Именно так Картан получил все простые $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры Ли полиномиального роста и конечной глубины, т.е. алгебры Ли типов (1), в то время, когда язык корней отсутствовал.)

Гипотеза. *Над $\mathbb{K}$ у каждой простой конечномерной (супер)алгебры Ли вида $\mathfrak{g}(A)$ или $\mathfrak{psq}$ в одной из ее простейших $\mathbb{Z}$ -градуировок возьмем неположительную часть и рассмотрим полные и частичные продолжения этой части, а в них — простые подфакторы, получаемые переходом к производным алгебрам и факторизацией по центру. При $\underline{N} = (1, \dots, 1)$ таким образом и методом КШ, примененным к супералгебрам Ли вида (1) над $\mathbb{C}$, получаются все ограниченные простые (супер)алгебры Ли при $p > 2$.*

При любом $\underline{N}$ и вместе с деформациями таким образом получаются все простые конечномерные модулярные (супер)алгебры Ли при $p > 2$.

Наш основной результат — это найденные нами новые примеры простых модулярных супералгебр Ли ($\mathfrak{brj}(2;3)$, $\mathfrak{brj}(2;5)$, $\mathfrak{B}\mathfrak{R}\mathfrak{J}$, $\mathfrak{Bj}(3;\underline{N}|3)$, $\mathfrak{Bj}(3|5)$, $\mathfrak{Me}(3;\underline{N}|3)$), подкрепляющие нашу гипотезу.

2.4. Теорема Ямагучи [24]. Эта теорема, воспроизведенная в [13], [1], гласит, что для почти всех простых конечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ и их $\mathbb{Z}$ -градуировок $\mathfrak{g} = \bigoplus_{-d \leq i} \mathfrak{g}_i$ КТШ-продолжение подалгебры $\mathfrak{g}_{\leq} = \bigoplus_{-d \leq i \leq 0} \mathfrak{g}_i$ изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а редкими исключениями являются две из четырех серий простых бесконечномерных алгебр Ли векторных полей (еще две серии являются частичными продолжениями).

2.5. Аналоги теоремы Ямагучи. В следующих теоремах представлены результаты (полученные с помощью пакета программ SuperLie [11], но доступные непосредственной проверке) вычислений КТШ-продолжений неположительных частей простых конечномерных (супер)алгебр Ли $\mathfrak{g}(A)$ с матрицей Картана A . Мы рассмотрели лишь простейшие $\mathbb{Z}$ -градуировки, отвечающие каждой (а для больших рангов — лишь избранным) из простейших.

Гипотеза. *При $p > 2$ другие $\mathbb{Z}$ -градуировки рассмотренных нами (супер)алгебр Ли вида $\mathfrak{g}(A)$, так же, как и (супер)алгебр Ли $\mathfrak{g}$ больших рангов (любого вида), не дадут новых простых (супер)алгебр Ли в качестве продолжений своих неположительных частей.*

2.6. Теорема. *В следующих случаях КТШ-продолжение неположительной части алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{g}$: если $p = 3$ и алгебра $\mathfrak{g}$ есть $\mathfrak{f}(4)$, $\mathfrak{e}(6)$, $\mathfrak{e}(7)$ или $\mathfrak{e}(8)$, рассматриваемая с $\mathbb{Z}$ -градуировкой, в которой «избран» лишь корень, отвечающий одной из крайних вершин на диаграмме Дынкина.*

Гипотеза. (Доступным нам компьютерам не под силу проверить ее с помощью пакета SuperLie.) *К случаям предыдущей теоремы нужно добавить случай $p = 5$ и алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(5;5)$ (см. [5]) в ее реализации с единственным нечетным простым корнем и с $\mathbb{Z}$ -градуировкой, в которой «избран» лишь один корень, отвечающий одной из крайних вершин на диаграмме Дынкина.*

2.7. Теорема. *Пусть $p = 3$. Для всех известных ранее (мы нашли больше, см. теоремы в разд. 2.8 и 2.9) простых конечномерных супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ ранга ≤ 3 с матрицей Картана и для их простейших градуировок s КТШ-продолжения (неположительной части алгебры $\mathfrak{g}$), отличные от $\mathfrak{g}$, даны в следующей таблице, поясненной в разд. 2.10–2.12.*

$\mathfrak{g}$	Матрица Картана	s	имя продолженной алгебры
$\mathfrak{osp}(2 4)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	(010)	$\begin{cases} \mathfrak{osp}(2 4) & \text{при } p > 3, \\ \mathfrak{Bj}(3; \underline{N} 3) & \text{при } p = 3 \end{cases}$
$\mathfrak{g}(2, 3)$ см. [2]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} (100) \\ (010) \\ (001) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathfrak{Bj}(2 4) \\ \mathfrak{Bj}(3 5) \\ \mathfrak{bj} \end{matrix}$

2.8. Супералгебры Меликяна для $p = 3$. Известны две конструкции алгебр Меликяна $\mathcal{Me}(5; \underline{N}) = \bigoplus_{i \geq -2} \mathcal{Me}(5; \underline{N})_i$, определенных при $p = 5$:

1) как КТЩ-продолжения тройки, состоящей из $\mathcal{Me}_0 = \mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(1; \underline{1}))$, где $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ — тривиальное центральное расширение (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с одномерным центром, $\mathcal{Me}_{-1} = \mathcal{O}(1; \underline{1})/\text{const}$ и тривиального модуля $\mathcal{Me}_{-2}$, см. [22]; эта конструкция была бы контрпримером к нашему аналогу КШ-гипотезы, если бы не конструкция, описанная в следующем пункте;

2) как *полное* КТЩ-продолжение неположительной части алгебры $\mathfrak{g}(2)$ в ее градуировке $s = (01)$, а $\mathfrak{g}(2)$ получается при этом как *частичное* продолжение, см. [16], [13].

В [1] мы выделили супералгебру Ли $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$ — простой аналог алгебры $\mathcal{Me}(5; \underline{N})$ для $p = 3$ — в виде частичного КТЩ-продолжения пары (отрицательная часть контактной супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1; \underline{N}|7)$, $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)_0 = \mathfrak{pgl}(3)$), а супералгебру Ли $\mathfrak{bj}$ получили в качестве простого аналога алгебры $\mathfrak{g}(2)$ для $p = 3$ с той же неположительной частью, что и у алгебры $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$. Таким образом, обе эти супералгебры Ли — и $\mathfrak{bj}$, и $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$ — получены нами в [2] с помощью супер-аналога конструкции 2).

Конструкция 1) Меликяна также имеет супер-аналог при $p = 3$ (причем, как следует из классификации $\mathfrak{k}(2n+1|m)$ -инвариантных дифференциальных операторов [20], только в ситуации, описанной в сформулированной ниже в этом разделе теореме), который приводит к новой серии простых супералгебр Ли в качестве полных продолжений, а также к другому простому аналогу алгебры $\mathfrak{g}(2)$ в качестве частичного продолжения; он же — супер-аналог алгебры Брауна $\mathfrak{br}(2)$.

Теорема. При $p = 3$ аналог конструкции 1) Меликяна получается, если положить $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}(\mathfrak{k}(1; \underline{1}|1))$, $\mathfrak{g}_{-1} = \mathcal{O}(1; \underline{1}|1)/\text{const}$ при тривиальном модуле $\mathfrak{g}_{-2}$. Мы обозначим полученную таким образом супералгебру Меликяна символом $\mathcal{Me}(3; \underline{N}|3)$; она не изоморфна супералгебре Меликяна $\mathfrak{Bj}(1; \underline{N}|7)$.

Обозначим символом $\mathfrak{brj}(2; 3)$ *частичное* КТЩ-продолжение с той же неположительной частью, что и у $\mathcal{Me}(3; \underline{N}|3)$. Это новая простая (исключительная) супералгебра Ли. У этой супералгебры три матрицы Картана: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Супералгебра Ли $\mathfrak{brj}(2; 3)$ является супер-аналогом алгебры Брауна $\mathfrak{br}(2)$, составляющей ее четную часть: $\mathfrak{br}(2) = \mathfrak{brj}(2; 3)_{\bar{0}}$.

КТЩ-продолжения супералгебры Ли $1\mathfrak{brj}(2; 3)$ в их простейших градуировках приводят к известным простым супералгебрам Ли, тогда как *частичные* КТЩ-продолжения супералгебр Ли $2\mathfrak{brj}(2; 3)$ и $3\mathfrak{brj}(2; 3)$ в некоторых простейших градуировках дают новую простую супералгебру Ли, которую мы обозначаем через $\mathfrak{B}\mathfrak{R}\mathfrak{J}$.

В отличие от алгебры Ли $\mathfrak{br}(2)$ супералгебра Ли $\mathfrak{brj}(2; 3)$ имеет аналог при $p = 5$, а именно новую простую супералгебру Ли $\mathfrak{brj}(2; 5)$, такую, что $\mathfrak{brj}(2; 5)_0 = \mathfrak{sp}(4)$, с матрицами Картана $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. КТШ-продолжения супералгебры $\mathfrak{brj}(2; 5)$ для всех ее матриц Картана и простейших градуировок s совпадают с самой супералгеброй $\mathfrak{brj}(2; 5)$.

2.9. Простые супералгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. Когда мы обнаружили супералгебры Ли $\mathfrak{brj}$ и чуть не упустили реализацию $3\mathfrak{brj}(2; 3)$, мы решились классифицировать простые супералгебры вида $\mathfrak{g}(A)$. Вся классификация, в том числе при $p = 2$, приведена в [5], а ниже — ее начало.

Теорема. При $p > 5$ каждая простая конечномерная супералгебра Ли, не являющаяся алгеброй Ли, с матрицей Картана размера 2×2 изоморфна одной из следующих: $\mathfrak{osp}(1|4)$, $\mathfrak{osp}(3|2)$ или $\mathfrak{sl}(1|2)$. При $p = 5$ к этому списку следует добавить супералгебру Ли $\mathfrak{brj}(2; 5)$, а при $p = 3$ — супералгебру Ли $\mathfrak{brj}(2; 3)$.

2.10. Описание супералгебры $\mathfrak{Bj}(3; \underline{N}|3)$. Вот реализация ее неположительной части:

$\mathfrak{g}_i$	образующие (четные нечетные)
$\mathfrak{g}_{-2}$	$Y_6 = \partial_1 \mid Y_8 = \partial_4$
$\mathfrak{g}_{-1}$	$Y_2 = \partial_2, Y_5 = x_2\partial_1 + x_5\partial_4 + \partial_3 \mid$ $Y_4 = \partial_5, Y_7 = 2x_2\partial_4 + \partial_6$
$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}(1 1) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{K}$	$Y_3 = x_2^2\partial_1 + x_2x_5\partial_4 + x_2\partial_3 + 2x_5\partial_6,$ $Z_3 = x_3^2\partial_1 + 2x_3x_6\partial_4 + x_3\partial_2 + 2x_6\partial_5,$ $H_2 = 2x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + x_4\partial_4 + x_5\partial_5 + 2x_6\partial_6,$ $H_1 = [Z_1, Y_1], H_3 = [Z_3, Y_3] \mid$ $Y_1 = x_1\partial_4 + 2x_2\partial_5 + x_3\partial_6,$ $Z_1 = 2x_4\partial_1 + 2x_5\partial_2 + x_6\partial_3$

Здесь $\mathfrak{g}_{-1}$ — неприводимый над $\mathfrak{g}_0$ модуль с вектором старшего веса Y_2 . В векторе $\underline{N} = (N_1, N_2, N_3)$ лишь N_1 может меняться, а $N_2 = N_3 = 1$.

2.11. Описание супералгебры $\mathfrak{Bj}(2|4)$. В этом и следующем разделах мы рассматриваем различные градуировки супералгебры Ли $\mathfrak{g}(2, 3)$ с матрицей Картана, указанной в таблице из разд. 2.7. Эту супералгебру с $\mathbb{Z}$ -градуировкой s мы обозначим через $\mathfrak{g}(2, 3; s)$. В этом разделе $s = (100)$ и $\text{sdim}(\mathfrak{g}(2, 3; s)_-) = 2|4$. Поскольку $\mathfrak{g}(2, 3; s)_0$ -действие в модуле $\mathfrak{g}(2, 3; s)_{-1}$ не точно, мы рассмотрим факторалгебру $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(2, 3; s)_0 / \text{ann}(\mathfrak{g}_{-1})$ и вложение $(\mathfrak{g}(2, 3; s)_-, \mathfrak{g}_0) \subset \text{vect}(2|4)$. Вот эта реализация:

$\mathfrak{g}_i$	образующие (четные нечетные)
$\mathfrak{g}_{-1}$	$Y_6 = \partial_2, Y_8 = \partial_1 \mid Y_{11} = \partial_3, Y_{10} = \partial_4, Y_4 = \partial_5, Y_1 = \partial_6$
$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{osp}(3 2)$	$Y_3 = x_2\partial_1 + 2x_4\partial_3 + x_6\partial_5, Y_9 = [Y_2, [Y_3, Y_5]],$ $Z_3 = x_1\partial_2 + 2x_3\partial_4 + x_5\partial_6, Z_9 = [Z_2, [Z_3, Y_5]],$ $H_2 = [Z_2, Y_2], H_3 = [Z_3, Y_3] \mid$ $Y_2 = x_1\partial_4 + x_5\partial_2, Y_5 = [Y_2, Y_3], Y_7 = [Y_3, [Y_2, Y_3]],$ $Z_2 = x_2\partial_5 + 2x_4\partial_1, Z_5 = [Z_2, Z_3], Z_7 = [Z_3, [Z_2, Z_3]]$

Здесь $\mathfrak{g}_{-1}$ — неприводимый над $\mathfrak{g}_0$ модуль с вектором старшего веса Y_1 . КТШ-продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ приводит к супералгебре Ли суперразмерности $13|14$. У этой супералгебры Ли есть три идеала $I_1 \subset I_2 \subset I_3$ с одной и той же неположительной частью, но разными положительными частями: $\text{sdim}(I_1) = 10|14$, $\text{sdim}(I_2) = 11|14$, $\text{sdim}(I_3) = 12|14$. Идеал I_1 и есть наша супералгебра Ли $\mathfrak{bj}$, см. [1], [2].

2.12. Описание супералгебры $\mathfrak{Bj}(3|5)$. Здесь $s = (010)$ и $\text{sdim}(\mathfrak{g}(2, 3; s)_-) = 3|5$. Поскольку $\mathfrak{g}(2, 3; s)_0$ -действие в модуле $\mathfrak{g}(2, 3; s)_{-1}$ не точно, мы рассматриваем факторалгебру $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(2, 3; s)_0 / \text{ann}(\mathfrak{g}_{-1})$ и вложение $(\mathfrak{g}(2, 3; s)_-, \mathfrak{g}_0) \subset \text{vect}(3; \underline{N}|5)$:

$\mathfrak{g}_i$	образующие (четные нечетные)
$\mathfrak{g}_{-2}$	$Y_9 = \partial_1 \mid Y_{10} = \partial_3, Y_{11} = \partial_2$
$\mathfrak{g}_{-1}$	$Y_8 = \partial_4, Y_6 = \partial_5 \mid Y_5 = 2x_4\partial_2 + 2x_5\partial_3 + 2x_7\partial_1 + \partial_7,$ $Y_2 = x_4\partial_3 - 2x_6\partial_1 + \partial_8, Y_7 = x_5\partial_2 + \partial_6$
$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}(1 2)$	$H_1 = [Z_1, Y_1], H_3 = [Z_3, Y_3],$ $Y_3 = 2x_3\partial_2 + 2x_7x_8\partial_1 + x_5\partial_4 + 2x_7\partial_6 + x_8\partial_7,$ $Z_3 = 2x_2\partial_3 + 2x_6x_7\partial_1 + x_4\partial_5 + x_6\partial_7 + 2x_7\partial_8 \mid$ $Y_1 = 2(2x_1\partial_3 + 2x_6x_7\partial_2 + x_6\partial_4 + x_7\partial_5),$ $Z_1 = 2(x_3\partial_1 + 2x_4x_5\partial_2 + 2x_5^2\partial_3 + 2x_5x_7\partial_1 + 2x_4\partial_6 + x_5\partial_7),$ $Y_4 = [Y_1, Y_3], Z_4 = [Z_1, Z_3]$

Здесь $\mathfrak{g}_{-1}$ — неприводимый над $\mathfrak{g}_0$ модуль с вектором старшего веса Y_2 . Имеем $\text{sdim}(\mathfrak{g}_1) = 6|4$. У $\mathfrak{g}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_1$ есть два вектора младшего веса:

V'_1	$x_1x_5\partial_2 + 2x_5x_6x_8\partial_2 + x_5x_7x_8\partial_3 + 2x_1\partial_6 + 2x_3\partial_4 + x_5x_7\partial_4 + x_5x_8\partial_5 + 2x_7x_8\partial_7$
V''_1	$x_6x_7x_8\partial_2 + 2x_1\partial_4 + x_7x_8\partial_5$

Оказывается, что $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}''_1$, порожденный векторами V'_1 и V''_1 , строго меньше чем $\mathfrak{g}_1$ и $\text{sdim} \mathfrak{g}''_1 = 4|4$. Полное КТШ-продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)_*$ не просто, а вот частичное продолжение — подсупералгебра $\mathfrak{Bj}(3|5) := (\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}''_1)_*$ проста. Отметим еще, что хотя $\mathfrak{Bj}(3|5)$ и является подсупералгеброй Ли в $\text{vect}(3; \underline{N}|5)$, сама она не зависит от $\underline{N}$. Поскольку ни у одной из известных простых конечномерных супералгебр Ли при $p = 0$ или $p > 3$ нет такой неположительной части ни в одной из $\mathbb{Z}$ -градуировок, $\mathfrak{Bj}(3|5)$ — новая (видимо, исключительная) супералгебра Ли.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. Bouarroudj, D. A. Leites, *Simple Lie superalgebras and nonintegrable distributions in characteristic p* [Простые супералгебры Ли и неинтегрируемые распределения в характеристике p], Зап. научн. сем. ПОМИ, **331** (2006), 15–29; <http://arxiv.org/abs/math/0606682>.
- [2] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Cartan matrices and presentations of Elduque and Cunha simple Lie superalgebras*, arXiv: <http://arxiv.org/abs/math.RT/0611391>.
- [3] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Cartan matrices and presentations of the exceptional simple Elduque Lie superalgebra*, <http://arxiv.org/abs/math.RT/0611392>.

- [4] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Infinitesimal deformations of symmetric simple modular Lie algebras and Lie superalgebras*, <http://arxiv.org/abs/0807.3054>.
- [5] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Classification of simple finite dimensional modular Lie superalgebras with Cartan matrix*, <http://arxiv.org/abs/0710.5149>.
- [6] I. Cunha, A. Elduque, *An extended Freudenthal magic square in characteristic 3*, <http://arxiv.org/abs/math.RA/0605379>.
- [7] I. Cunha, A. Elduque, *The extended Freudenthal Magic Square and Jordan algebras*, <http://arxiv.org/abs/math.RA/0608191>.
- [8] A. Elduque, *New simple Lie superalgebras in characteristic 3*, J. Algebra, **296**:1 (2006), 196–233.
- [9] A. Elduque, *Some new simple modular Lie superalgebras*, <http://arxiv.org/abs/math.RA/0512654>.
- [10] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Math., vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] P. Grozman, *SuperLie*, <http://www.equaonline.com/math/SuperLie>.
- [12] P. Grozman, D. Leites, *Defining relations for classical Lie superalgebras with Cartan matrix*, Czech. J. Phys., **51**:1 (2001), 1–22; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9702073>.
- [13] P. Grozman, D. Leites, *Structures of $G(2)$ type and nonintegrable distributions in characteristic p* , Lett. Math. Phys., **74**:3 (2005), 229–262; <http://arxiv.org/abs/math.RT/0509400>.
- [14] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [15] А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич, *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*, Изв. АН СССР, сер. матем., **33**:2 (1969), 251–322.
- [16] M. I. Kuznetsov, *The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2* , Comm. Algebra, **19**:4 (1991), 1281–1312.
- [17] A. Lebedev, *Presentations of finite dimensional symmetric simple modular Lie algebras and superalgebras*, PhD, Leipzig University, 2008.
- [18] A. Lebedev, D. Leites (with Appendix by P. Deligne), *On realizations of the Steenrod algebras*, J. Prime Res. Math., **2**:1 (2006), 101–112.
- [19] D. Leites, *Towards classification of simple finite dimensional modular Lie superalgebras in characteristic p* , J. Prime Res. Math., **3** (2007), 101–110; MPIMiS preprint 132/2006 (www.mis.mpg.de).
- [20] Д. Лейтес, *Супералгебры Ли*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 25, ВИНТИ, М., 1984, 3–49.
- [21] И. М. Щепочкина, *Как реализовать алгебру Ли векторными полями*, ТМФ, **147**:3 (2006), 450–469; <http://arxiv.org/abs/math.RT/0509472>.
- [22] H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I. Structure theory*, de Gruyter Expositions in Math., vol. 38, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004.
- [23] F. Viviani, *Restricted simple Lie algebras and their infinitesimal deformations*, <http://arxiv.org/abs/math.RA/0702755>.
- [24] K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras*, in: Progress in differential geometry. Adv. Stud. Pure Math., vol. 22, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, 413–494.

Department of Mathematics, United Arab Emirates University

e-mail: Bouarroudj.sofiane@uaeu.ac.ae

Equa Simulation AB, Stockholm

e-mule: pavel@rixtele.com

Department of Mathematics, University of Stockholm

e-mail: mleites@math.su.se

Поступило в редакцию

9 декабря 2006 г.