Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Ильяшенко, Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 60–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:56:46

Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения*

© 2008. Ю. С. Ильяшенко

*Израилю Моисеевичу Гельфанду с восхищением
и наилучшими пожеланиями ко дню рождения*

§ 1. Введение

Аттрактор Милнора гомеоморфизма метрического пространства с мерой в себя — это минимальное замкнутое множество, которое содержит ω -предельные множества для почти всех начальных условий. Назовем *компонентой* аттрактора Милнора инвариантное подмножество этого аттрактора, имеющее окрестность, не содержащую точек дополнения аттрактора до этого подмножества. Для каждой компоненты аттрактора Милнора бассейн притяжения состоит из всех точек, ω -предельные множества которых принадлежат этой компоненте. Отметим, что мера этого бассейна положительна; в противном случае компоненту следовало бы удалить из аттрактора.

Измеримое подмножество метрического пространства с мерой *метрически плотно*, если мера пересечения этого подмножества с любой областью положительна.

Теорема 1 (основная теорема). *В пространстве диффеоморфизмов прямого произведения диска на двумерный тор существует непустое множество, такое, что каждое отображение f из этого множества обладает следующим свойством. Аттрактор Милнора отображения f состоит из двух компонент A_0 и A_1 , бассейны притяжения которых метрически плотны.*

В силу сделанного выше замечания каждый из этих бассейнов имеет положительную меру.

Мы докажем также, что свойство, установленное в теореме 1, *не сохраняется* при малом возмущении отображений, построенных ниже при доказательстве теоремы.

Наши построения, так же как и рассуждения § 3, следуют замечательной работе Бонифант и Милнора [1]. Работа не опубликована, поэтому вместо ссылок мы приводим (короткие) доказательства, хотя они и получаются простой модификацией соответствующих рассуждений из [1].

Множество, описанное в теореме 1, состоит из специальных косых произведений над соленоидом, построенных в следующем параграфе.

§ 2. Специальные косые произведения над соленоидом

Конструкция, приведенная в разд. 2.3, навеяна построениями Кана [3] и Бонифант и Милнора [1].

*Исследования были частично поддержаны грантами NSF 0700973, РФФИ 07-01-00017-а, РФФИ-CNRS 050102801.

2.1. Отображение соленоида и SRB-меры. Пусть

$$S_Y^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}, \quad B = S_Y^1 \times D, \quad S_X^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z}, \quad X = B \times S_X^1.$$

Пусть

$$h: B \rightarrow B, \quad (y, z) \mapsto (2y, e^{2\pi i y} + \lambda z), \quad \lambda \ll 1, \quad (1)$$

— отображение соленоида. Пусть Λ — собственнo соленоид, т. е. максимальный аттрактор отображения h , $\Lambda = \bigcap_0^\infty h^n B$.

Существует несколько эквивалентных определений SRB-мер (или *естественных*, или *физических* мер). Напомним определение из [4].

Определение 1. Пусть X — гладкое многообразие с мерой Лебега на нем. По определению это мера, согласованная с гладкой структурой. Пусть $f: X \rightarrow X$ — диффеоморфизм, может быть, на собственное подмножество, пространства X . Мера μ на X называется *SRB-мерой* для f , если для любой непрерывной функции $\varphi \in C(X)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x) = \int \varphi d\mu$$

для почти всех $x \in X$ в смысле меры Лебега.

Носитель этой меры называется *аттрактором* отображения f . Это определение не эквивалентно определению аттрактора Милнора. Действительно, в отличие от SRB-меры, аттрактор Милнора существует для любого диффеоморфизма.

Хорошо известно, что отображение соленоида имеет SRB-меру. Опишем ее. Напомним, что Σ^2 — это множество всех двусторонних последовательностей из нулей и единиц. Пусть Σ_0^2 — подмножество множества Σ^2 , состоящее из последовательностей, имеющих бесконечно много нулей справа от любой позиции. Существует биекция $\Phi: \Lambda \rightarrow \Sigma_0^2$, называемая *отображением судьбы*, которая сопрягает $h|_\Lambda$ со сдвигом Бернулли σ и обладает свойствами, описываемыми в разд. 2.2.

Пусть P — вероятностная мера Бернулли на Σ^2 с весами $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Обозначим через Σ_+^2 и Σ_-^2 множества последовательностей, бесконечных вправо и влево соответственно; последовательности, бесконечные вправо, начинаются с нулевой позиции, бесконечные влево — с минус первой. Пусть P^+ , P^- — вероятностные меры Бернулли с весами $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ на Σ_+^2 , Σ_-^2 соответственно. Отметим, что $\Sigma^2 = \Sigma_-^2 \times \Sigma_+^2$, $P = P^- \times P^+$. Следующее утверждение просто и известно, так же как и результаты разд. 2.2: *отображение соленоида имеет SRB-меру $\mu_\Lambda = \Phi^* P$.*

Отображение $(\Lambda, \mu_\Lambda, h)$ эргодично.

2.2. Интегрирование по SRB-мере на соленоиде. Упомянутая выше биекция Φ , сопрягающая отображение соленоида со сдвигом Бернулли, обладает следующим свойством. Пусть $\Phi(y, z) = \omega = \omega^- \omega^+$, где $\omega^+ = \omega_0 \omega_1 \cdots \omega_n \cdots$, $\omega^- = \cdots \omega_{-n} \cdots \omega_{-1}$ — правосторонняя и левосторонняя части последовательности ω соответственно. Положим $\Phi^\pm(y, z) = \omega^\pm$. Тогда $\omega^+ = \Phi^+(y, z)$ — это двоичное разложение для y : $y = 0.\omega^+$.

При фиксированном y определим отображение $\Phi_y^-: z \mapsto \Phi^-(y, z)$. Пусть $\Lambda_y = \Lambda \cap (\{y\} \times D)$. Положим

$$\mu_y^-|_{\Lambda_y} = (\Phi_y^-)^* P^-. \quad (2)$$

Для этой меры

$$\int_{\Lambda_y} d\mu_y^- = \int_{\Sigma_-^2} dP^- = 1.$$

Мера Лебега на единичной окружности — это прообраз меры P^+ под действием отображения Φ^+ . Поэтому для любой непрерывной функции φ

$$\int \varphi d\mu_\Lambda = \int_{S_Y^1} dy \int_{\Lambda_y} \varphi d\mu_y^-.$$

В частности, если φ не зависит от z , то

$$\int \varphi d\mu_\Lambda = \int_{S_Y^1} \varphi(y, 0) dy. \quad (3)$$

2.3. Специальные косые произведения. Рассмотрим косое произведение

$$\mathcal{F}: X \rightarrow X, \quad (b, x) \mapsto (h(b), f_b(x)), \quad (4)$$

обладающее следующими свойствами:

1) Для любого $b \in B$, отображение $f_b(x)$ имеет две неподвижные точки, 0 и 1; следовательно, $\mathcal{F}$ имеет два инвариантных множества

$$A_0 = \Lambda \times \{0\}, \quad A_1 = \Lambda \times \{1\}.$$

2) Положим

$$f'_b(x) = \frac{\partial f_b}{\partial x}(x), \quad \log f'_b(j) = \varphi_j(b), \quad j = 0, 1.$$

Тогда

$$I_j = \int_{\Lambda} \varphi_j d\mu_\Lambda < 0, \quad j = 0, 1. \quad (5)$$

3) Для каждого b послонное отображение f_b увеличивает двойные отношения на $[0, 1]$ и на $[-1, 0]$ (все четыре точки, двойное отношение которых будет рассматриваться, принадлежат $[0, 1]$ или $[-1, 0]$). Это эквивалентно предположению, что производная Шварца

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

отрицательна: $Sf_b < 0$ на $(0, 1)$ и на $(-1, 0)$, см [1]. Здесь мы предполагаем, что $f_b \in \text{Diff}^1(S^1)$ и $f \in C^3$ на $S^1 \setminus \{0; 1\}$; более того, f имеет (различные) продолжения класса C^3 с отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 0]$ на $\mathbb{R}$.

2.4. Пример.

Пример 1. Рассмотрим отображение $\mathcal{F}$, определенное в формуле (4); здесь и ниже h — отображение соленоида (1). Пусть f_b — нечетная функция относительно нуля на S^1 ,

$$f_b(x) = x + a(b)x(1-x) \quad \text{для } x \in [0, 1], \quad a(b) = \varepsilon \cos 2\pi y(b). \quad (6)$$

Предложение 1. Косое произведение в примере 1 обладает свойствами 1)–3).

Доказательство. Свойство 1) очевидно.

Свойство 2) следует из (3). Действительно, в нашем случае функции φ_j зависят только от y . Следовательно, по формулам (3), (4) при $j = 0$

$$\int_{\Lambda} \varphi_0 d\mu_{\Lambda} = \int_{S^1_Y} \varphi_0(y, 0) dy = \int_0^1 \log(1 + \varepsilon \cos 2\pi y) dy < 0,$$

поскольку $\cos$ — нечетная относительно $\pi/2$ функция, а $\log$ — функция, выпуклая вверх. Аналогично исследуется интеграл от φ_1 .

Свойство 3) очевидно, поскольку в нашем примере послонное отображение имеет (различные) аналитические продолжения на $\mathbb{R}$ с каждого из отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 0]$; третья производная каждого из продолженных отображений равна нулю. $\square$

§3. Аттрактор Милнора специального косого произведения

Мы докажем усиленную версию теоремы 1 для специальных косых произведений.

3.1. Предположение монотонности. Рассмотрим нечетную функцию $Z: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $Z(x) = x(1 - x)$ на $[0, 1]$. Пусть отображение (4) удовлетворяет следующему предположению:

Предположение монотонности. *Отображение h имеет две периодические орбиты $L^{\pm} = (b_1^{\pm}, \dots, b_n^{\pm})$, такие, что соответствующие послонные отображения Пуанкаре*

$$f_{L^{\pm}} = f_{b_n^{\pm}} \circ \dots \circ f_{b_1^{\pm}} \quad (7)$$

имеют вид

$$f_{L^{\pm}}(x) := x + Z(x)g^{\pm}(x), \quad g^{+} > 0, g^{-} < 0 \text{ на } S^1. \quad (8)$$

Предложение 2. *Отображение (4), (6) удовлетворяет предположению монотонности.*

Доказательство. Пусть $O = (0, z_0)$ — неподвижная точка отображения h ; точное значение z_0 несущественно. Тогда отображение f_O имеет вид (8) при $g^{+} = \varepsilon$.

Пусть $b_1 = (\frac{1}{3}, z_1)$, $b_2 = (\frac{2}{3}, z_2)$, причем координаты z_1, z_2 выбраны так, что $\{b_1, b_2\}$ — периодическая орбита; их точные значения не важны. Отображения f_{b_1}, f_{b_2} имеют вид (8) с $g^{-} = -\varepsilon/2$; произведение этих отображений также имеет вид (8) с $g^{-} < 0$.

Положим теперь $L^{+} = \{0\}$, $L^{-} = \{b_1, b_2\}$. Мы доказали, что отображения $f_{L^{\pm}}$ удовлетворяют условию (8). $\square$

Теорема 2. *Пусть косое произведение $\mathcal{F}$ вида (4), (1) обладает свойствами 1)–3) из предыдущего параграфа, а также удовлетворяет предположению монотонности. Тогда его аттрактор Милнора равен $A_0 \cup A_1$, а бассейн притяжения $\mathcal{B}_j$ множества A_j , $j = 0, 1$, метрически плотен.*

Эта теорема будет доказана для ограничения отображения $\mathcal{F}$ на инвариантное подмножество $B \times [0, 1]$. Ограничение на «другую половину пространства X », $B \times [-1, 0]$, исследуется аналогично.

3.2. Бассейны притяжения. В этом разделе мы докажем, что множества A_0 и A_1 принадлежат аттрактору Милнора отображения $\mathcal{F}$.

Лемма 1. В условиях теоремы 2 оба бассейна притяжения $\mathcal{B}_j$, $j = 0, 1$, имеют положительную меру.

Доказательство. Отображение $\mathcal{F}$ имеет максимальный аттрактор $Y = \bigcap \mathcal{F}^k X = \Lambda \times S^1$. Определим (неинвариантную) меру $\mu_Y = \mu_\Lambda \times \text{mes}_{S^1}$ на нем.

Докажем сначала, что

$$\mu_Y(\mathcal{B}_j \cap Y) > 0. \quad (9)$$

Центральный показатель Ляпунова положительной полутраектории $\{b_k : k \geq 0\}$ точки $b_0 \in A_j$ имеет вид

$$\lambda(b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(b_k).$$

Поскольку μ_Λ является SRB-мерой для h , этот предел почти всюду в смысле меры Лебега на B равен интегралу I_j из формулы (5). Следовательно, этот предел отрицателен: $\lambda(b_0) < 0$. Значит, последовательность $a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(b_k)$ стремится к $-\infty$ линейно по n . Таким образом, $a_n^+ = a_n + n\nu \rightarrow -\infty$ для некоторого малого положительного ν . Пусть $a(b_0) = \max_{n \geq 0} a_n^+$. Пусть $J_j \subset [0, 1]$ — отрезок с одной из вершин j (напомним, что $j \in \{0, 1\}$), такой, что $\text{osc}_{J_j} f'_b \leq \nu$. Для любой точки $x \in [0, 1]$, удовлетворяющей условию $|x - j| \leq |J_j|e^{-a(b_0)}$, орбита точки (b_0, x) под действием $\mathcal{F}$ стремится к A_j и остается внутри $B \times J_j$.

Функция $b \mapsto a(b)$ положительна μ_Λ -почти всюду на B . Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что $\mu_\Lambda\{b \in \Lambda : a(b) \geq \delta\} > 0$. Это доказывает (9).

Насыщение множества $\mathcal{B}_j \cap Y$ слоями сильно устойчивого слоения отображения $\mathcal{F}$ совпадает с $\mathcal{B}_j$ и имеет положительную меру Лебега в силу (9) и по теореме Фубини. Эта теорема применима в данном контексте, потому что голономия сильно устойчивого слоения абсолютно непрерывна [5]. $\square$

3.3. Аттрактор Милнора.

Лемма 2. Объединение $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ имеет полную меру.

Доказательство (см. [1]). В силу монотонности функции f_b для любой точки $(b, x) \in \mathcal{B}_j$ весь отрезок $\{b\} \times [j, x]$ принадлежит бассейну $\mathcal{B}_j$. Следовательно, существуют две функции $\sigma_j : B \rightarrow I$, такие, что $(b, x) \in \mathcal{B}_j$ при $x \in [j, \sigma_j(b)]$. Мы докажем, что на самом деле $\sigma_0 \equiv \sigma_1$.

Предположим, что $\sigma_0 \not\equiv \sigma_1$ на множестве положительной меры. Рассмотрим двойное отношение четырех точек

$$\rho(b) : \quad \rho(0, \sigma_0(b), \sigma_1(b), 1) = \frac{\sigma_1(b)}{\sigma_0(b)} \cdot \frac{1 - \sigma_0(b)}{1 - \sigma_1(b)}.$$

Отображение $\mathcal{F}$ увеличивает двойные отношения; точнее, $\rho(h(b)) > \rho(b)$ при $\rho(b) \neq 1$. Интегрируя это неравенство по Λ , получим $\int \rho(b) d\mu_\Lambda < \int \rho(h(b)) d\mu_\Lambda$. Отметим, что h сохраняет меру μ_Λ ; поэтому два интеграла в предыдущем неравенстве должны совпадать и $\rho(b) \equiv 1$. Следовательно, $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ μ_Λ -почти всюду на Λ . Заметим теперь, что график функции σ_j вместе с каждой точкой содержит проходящий через нее слой сильно устойчивого слоения. Поэтому совпадение σ_0 и σ_1 почти всюду на Λ влечет за собой аналогичное совпадение на B . $\square$

Из лемм 1, 2 следует, что аттрактор Милнора отображения $\mathcal{F}$ равен $A_0 \cup A_1$. Для совпадающих функций σ_0 и σ_1 сохраним обозначение σ_0 .

§4. Перемежающиеся бассейны

В этом параграфе мы доказываем метрическую плотность бассейнов $\mathcal{B}_j$. Мы начинаем с метрической плотности пересечений этих бассейнов с максимальным аттрактором Y .

Лемма 3. Пусть отображение $\mathcal{F}$ вида (4) удовлетворяет условию теоремы 2. Тогда оба бассейна $\mathcal{B}_j \cap Y$ метрически плотны по мере μ_Y .

Доказательство. Доказательство разбито на 5 шагов.

4.1. Новые координаты на центральном слое.

Шаг 1. Пусть $L^\pm = (b_1^\pm, \dots, b_n^\pm)$ — те же орбиты, что в §2. Тогда $\sigma_0|L^+ \equiv 1$, $\sigma_0|L^- \equiv 0$. Это очевидно: орбиты всех точек из интервала $(0, 1)$ под действием отображения f_{L^-} (f_{L^+}) стремятся к нулю (соответственно к 1).

Шаг 2.

Предложение 3. В координате $t = \log \frac{x}{1-x}$, $t: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, для любого $b \in V$ отображение $f_b|(0, 1)$ имеет вид $\tilde{f}_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t + \tilde{g}_b(t)$. Функция $\tilde{g}_b$ равномерно ограничена по b и t . Для $b = b_1^+$ ($b = b_1^-$) функция $\tilde{g}_b$ строго положительна (отрицательна) на $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $f_b: x \mapsto x + x(1-x)g_b(x)$, причем функция g_b гладкая на интервале $(0, 1)$ и непрерывная на $[0, 1]$. Простое вычисление дает:

$$\tilde{g}_b(t) = \log\left(1 + \frac{g_b(x(t))}{1 + e^t}\right) - \log\left(1 - \frac{e^t}{1 + e^t}g_b(x(t))\right).$$

Это доказывает предложение. □

Отображение $\mathcal{F}$, записанное в координатах (y, t) , обозначается через $\widetilde{\mathcal{F}}$.

4.2. Периодические орбиты со свойством монотонности.

Шаг 3. Пусть $\tilde{f}_{L^\pm}$ — отображение $f_{L^\pm}$, записанное в новой координате t , и $\tilde{f}_{L^\pm} = \text{id} \pm \tilde{g}_{L^\pm}$. Пусть

$$|\tilde{g}_b| < C \quad \forall b \in \Lambda, \quad \tilde{g}_{L^\pm} > c > 0. \quad (10)$$

Лемма 4. Существует такая последовательность периодических орбит $L_k^\pm$ отображения h , что объединение $\mathcal{L}^\pm = \bigcup L_k^\pm$ плотно в Λ и все орбиты $L_k^\pm$ обладают свойством (8).

Доказательство. Рассмотрим произвольный цилиндр $C_w \subset \Sigma_0^2$, определяемый словом $w = \alpha_0 \dots \alpha_m$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$. Пусть судьба точки b_1^+ (b_1^-) равна (w^+) (соответственно (w^-)); напомним, что (w) — это периодическая последовательность с периодом w и первой буквой слова w в нулевой позиции. Рассмотрим периодическую точку b_w^+ отображения h с судьбой

$$\omega^+ = (\underbrace{w^+ \dots w^+}_{m \text{ раз}} w) = (w^*).$$

Возьмем m столь большим, что $c_1^+ = mc - C|w| > 0$, где c и C те же, что и в формуле (10). Тогда отображение

$$\tilde{f} := \widetilde{\mathcal{F}}^{w^*}| \{b_w^+\} \times \mathbb{R} \quad (11)$$

имеет вид

$$\tilde{f}: t \mapsto t + \tilde{g}, \quad \tilde{g} > c_1^+. \quad (12)$$

Следовательно, орбита L_w^+ точки b_w^+ обладает свойством монотонности и одновременно пересекает цилиндр C_w . Аналогично строится орбита L_w^- .

Занумеруем теперь параметром $k \in \mathbb{N}$ цилиндры C_w , образующие базу окрестностей в Σ_2^0 . Тем самым занумерованы построенные выше орбиты L_w^+ , L_w^- . Это доказывает лемму 4. $\square$

4.3. Доказательство метрической плотности бассейнов притяжения по модулю леммы 5. Всюду в этом разделе речь идет о точках плотности относительно меры Лебега.

Шаг 4. Мы доказали, что существует плотное множество $\mathcal{L}^+ \subset \Lambda$, такое, что каждая орбита $L^+ \subset \mathcal{L}^+$ обладает свойством (8). Аналогичное множество $\mathcal{L}^-$ соответствует знаку $<$. Следовательно, оба бассейна притяжения $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ плотны в $\Lambda \times S^1$. Остается доказать их метрическую плотность. Это наиболее тонкая часть рассуждения.

Пусть $p_B: X \rightarrow B$ — естественная проекция вдоль слоя S_X^1 .

Лемма 5. Для любой периодической точки $b \in \mathcal{L}^-$ неустойчивое многообразие W_b^u точки b под действием отображения h содержит проекции точек плотности бассейна $\mathcal{B}_1$. Аналогичное утверждение верно для $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{B}_0$.

Эта лемма доказана в конце параграфа.

Мы выведем метрическую плотность бассейна $\mathcal{B}_1$ из леммы 5. Пусть $b \in L_m^+ \subset \mathcal{L}^+$, где L_m^+ — периодическая орбита периода l . Пусть (b^*, x) — точка плотности бассейна $\mathcal{B}_1$ и $b^* \in W_b^u$. Такая точка существует по лемме 5.

Пусть $(b_k, x_k) = \mathcal{F}^{-kl}(b^*, x)$. Поскольку бассейн $\mathcal{B}_1$ является $\mathcal{F}$ -инвариантным, (b_k, x_k) — точка плотности бассейна $\mathcal{B}_1$. С другой стороны, $b_k \rightarrow b$, поскольку $b^* \in W_b^u$. В силу (11) и (12) имеем $\widetilde{\mathcal{F}}^l| \{b\} \times \mathbb{R} = \text{id} + \tilde{g}_b$, $\tilde{g}_b > 0$. В силу C^1 -гладкости отображения $\mathcal{F}$ это неравенство сохранится, если b заменить на b_k при достаточно большом k . Следовательно, $(b_k, x_k) \rightarrow (b, 0)$ при $k \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $\text{mes } V \cap \mathcal{B}_1 > 0$ для любого $x \in (0, 1)$ и любой окрестности V точки (b, x) . Следовательно, множество точек плотности бассейна $\mathcal{B}_1$, принадлежащих Y , плотно в Y . Абсолютная непрерывность сильно устойчивого слоения влечет за собой метрическую плотность бассейна $\mathcal{B}_1$ в X . Доказательство для $\mathcal{B}_0$ аналогично.

4.4. Точки плотности бассейнов на неустойчивых многообразиях.

Шаг 5. Ниже мы опишем пересечения проекции $P_B(\mathcal{B}_j)$ с неустойчивыми многообразиями периодических орбит соленоида и докажем лемму 5. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию φ , для которой $I = \int \varphi d\mu_\Lambda < 0$. Пусть

$$M_\varphi = \{b \in \Lambda : \bar{\varphi}(b) < 0\},$$

где $\bar{\varphi}$ — верхнее временное среднее функции φ , т. е. верхний предел выписанных ниже (см. формулу (14)) частных временных средних функции φ . Множество M_φ имеет полную меру μ_Λ в силу эргодической теоремы Биркгофа. Мы опишем явно подмножество $M_\varphi^* \subset M_\varphi$, также имеющее полную меру.

Разобьем Λ на N цилиндров Δ_j с попарно не пересекающимися внутренностями, μ_Λ -мера которых равна $1/N$; пусть эти цилиндры столь малы, что соответствующая верхняя интегральная сумма Σ^+ отрицательна:

$$\Sigma^+ = \frac{1}{N} \sum_{\Delta_j} \sup \varphi_j = -\delta < 0. \quad (13)$$

Предложение 4. Пусть M_φ^* — множество всех $b \in \Lambda$, таких, что положительная орбита b попадает в каждый из цилиндров Δ_j со средней частотой $1/N$. Тогда $M_\varphi^* \subset M_\varphi$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $b \in M_\varphi^*$. Пусть k столь велико, что число попаданий x в Δ_j под действием первых Nk итераций отображения h равно $k + R_j$, причем $|R_j|/k < \delta'$, малое δ' выбирается ниже. Частное временное среднее функции φ имеет вид

$$\varphi_{Nk} = \frac{1}{Nk} \sum_0^{Nk-1} \varphi(h^m b). \quad (14)$$

Для любого j $k + R_j$ точек множества $\{h^m b : 0 \leq m \leq Nk - 1\}$ попадает в Δ_j . Если $R_j = 0$ для всех j , то сумма (14) является средним арифметическим k интегральных сумм для φ и разбиения $\{\Delta_j\}$. Предположим теперь, что $R_j \neq 0$. Тогда $\varphi_{Nk} - \Sigma^+ \leq \delta' \max \varphi$. Выберем δ' столь малым, что $\delta' \max \varphi < \delta$. Тогда верхний предел частных временных средних функции φ будет строго отрицательным. Следовательно, $b \in M_\varphi$. $\square$

Положим теперь $\varphi = \varphi_1$. Разобьем Σ_0^2 на $N = 2^n$ цилиндров C_j , имеющих одинаковый объем $1/N$. Пусть n столь велико, что прообразы $\Delta_j = \Phi^{-1}(C_j)$ удовлетворяют наложенным выше требованиям малости. Пусть цилиндр C_j соответствует слову w_j . Мера P на Σ_0^2 — это вероятностная мера Бернулли с весами $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Тогда $P(C_j) = 2^{-|w_j|}$, где $|w_j|$ — длина слова w_j . С другой стороны, $P(C_j) = 1/N$. Следовательно, $|w_j| = n$ и в типичной последовательности $\omega \in \Sigma_0^2$ слово w_j встречается со средней частотой $1/N$.

Обозначим через Σ_Δ подмножество в Σ_+^2 , состоящее из тех последовательностей, в которых слово w_j встречается с частотой $1/N$ для всех j . Очевидно, что

$$M_\varphi^* = \Phi^{-1}(\Sigma_-^2 \times \Sigma_\Delta).$$

Заметим, что $\mu_\Lambda = \Phi_*^{-1}P$. Следовательно, p является точкой плотности множества M_φ^* тогда и только тогда, когда $p \in \Phi^{-1}(\Sigma_-^2 \times \{\omega^+\})$, где ω^+ — точка плотности множества Σ_Δ .

Рассмотрим теперь периодическую орбиту L_k^- , см. шаг 3. Пусть слово w^* — период орбиты L_k^- , $L_k^- = (b_1^-, \dots, b_{|w^*|}^-)$, $\Phi(b_1^-) = (w^*)$. Пусть для простоты $b_1^- = c$. Рассмотрим последовательность

$$\omega^- = (w^*)^-; \quad (15)$$

правая часть — это левосторонняя периодическая последовательность с периодом w^* . Пусть ω^- — последовательность (15), $\omega^+ \in \Sigma_\Delta$, $\omega = \omega^- \omega^+$. Тогда $\Phi^{-1}(\omega) \in p_B(\mathcal{B}_1) \cap W_c^u$. Тем самым описано пересечение проекции бассейна $\mathcal{B}_1$ с неустойчивым многообразием точки c .

Докажем теперь, что для почти всех $\omega^+ \in \Sigma_\Delta$ и $\omega = \omega^- \omega^+$ точка $\Phi^{-1}(\omega)$ — проекция точки плотности бассейна $\mathcal{B}_1$. Рассмотрим кривую

$$\gamma = \Phi^{-1}\{\omega = \omega^- \omega^+ : \omega^+ \in \Sigma^+\}.$$

Это дуга на W_c^u , проектирующаяся в S_Y^1 вдоль z -плоскости и проходящая через c . Пусть

$$S_\Delta = \{\Phi^{-1}(\omega) : \omega = \omega^- \omega^+, \omega^+ \in \Sigma_\Delta\}.$$

Тогда $S_\Delta \subset \gamma$ и $\text{mes}_1 \gamma \setminus S_\Delta = 0$.

Здесь для любого k mes_k есть k -мерная мера Лебега. Рассмотрим функцию σ_0 , график которой является «границей» бассейнов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0$. Имеем $\sigma_0|_{S_\Delta} < 1$. Следовательно, существует $\delta > 0$, для которого подмножество

$$S_\delta = \{b \in S_\Delta : \sigma_0(b) < 1 - \delta\}$$

имеет положительную меру. Тогда

$$S'_\delta := S_\delta \times [1 - \delta, 1] \subset \mathcal{B}_1, \quad \text{mes}_2 S'_\delta > 0.$$

Насыщение множества S'_δ слоями сильно устойчивого слоения принадлежит бассейну $\mathcal{B}_1$. Пусть $q \in S'_\delta$ — точка плотности множества S'_δ в смысле двумерной меры Лебега. Тогда в силу абсолютной непрерывности голономии сильно устойчивого слоения q — точка плотности бассейна $\mathcal{B}_1$ в смысле меры Лебега на X . Но $p_B q \in W_c^u$. Это доказывает лемму 5 для $\mathcal{B}_1$. Аналогичные рассуждения доказывают лемму для $\mathcal{B}_0$. Это завершает доказательство теоремы 2, а значит, и теоремы 1. $\square$

§5. Разрушение перемежающихся бассейнов

Оказывается, что малое возмущение специального косо го произведения, рассмотренного в §2, разрушает свойства, описанные в теореме 2. Ниже приводится набросок доказательства этого утверждения.

5.1. Описание разрушения.

Теорема 3. *Рассмотрим косо го произведение $\mathcal{F}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Тогда аттрактор Милнора любого отображения $\mathcal{G}$, которое обладает свойством Купки–Смейла и принадлежит достаточно малой C^1 -окрестности отображения $\mathcal{F}$, не имеет компоненты, принадлежащей множеству $B \times \{|x| \leq \alpha\}$. Здесь α зависит только от $\mathcal{F}$.*

В частности, аттрактор Милнора отображения $\mathcal{G}$ не может быть разбит на две компоненты, близкие к A_0 и A_1 .

Проблема 1. *Описать аттрактор Милнора отображения $\mathcal{G}$ из теоремы 3.*

Мы ожидаем, что этот аттрактор — все фазовое пространство.

5.2. Структура косо го произведения для возмущенного отображения. Послойные отображения косо го произведения $\mathcal{F}$ в примере 1 C^1 -близки к тождественному при достаточно малом ε . В общем случае, если послойные отображения косо го произведения (4) C^1 -близки к тождественному, то к возмущению отображения $\mathcal{F}F$ применима частично гиперболическая теория.

Теорема 4. *Пусть послойные отображения косо го произведения $\mathcal{F}$ из теоремы 2 C^1 -близки к тождественному. Тогда любое отображение $\mathcal{G}: X \rightarrow X$, достаточно близкое к $\mathcal{F}$ в метрике C^1 , имеет максимальный аттрактор $Y_{\mathcal{G}}$, гомеоморфный $Y = \Lambda \times S^1$. Кроме того, существует полусопряжение $\Pi: Y_{\mathcal{G}} \rightarrow \Lambda$, такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & Y_{\mathcal{G}} \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\ \Lambda & \xrightarrow{h} & \Lambda \end{array} \quad (16)$$

коммутативна, причем слои $\pi^{-1}b$ C^1 -близки к $\{b\} \times S^1$.

Эта теорема при малых ε в формуле (6) для $\mathcal{F}$ следует из результатов [2]. В общем случае полное доказательство содержится в работе А. Негута и автора, которая находится в стадии подготовки.

Гомеоморфизм $H: (b, x) \mapsto (\Pi(b, x), x)$ отображает $Y_{\mathcal{G}}$ на Y . Отображение

$$G = H \circ \mathcal{G} \circ H^{-1}: Y \rightarrow Y$$

имеет структуру косого произведения над соленоидом:

$$G: (b, x) \mapsto (h(b), g_b(x)).$$

Отображения g_b C^1 -близки к f_b .

5.3. Периодические орбиты возмущенного отображения. Пусть периодические орбиты $L^{\pm}$ и отображения $f_{L^{\pm}}$ те же, что в разд. 3.1. Пусть $g_{L^{\pm}} = g_{b_0^{\pm}} \circ \dots \circ g_{b_1^{\pm}}$ — аналогичные отображения для косого произведения G . Напомним, что отображение g_{L^+} (g_{L^-}) называется *послойным отображением Пуанкаре, соответствующим* (G, b_1^+) (*соответственно* (G, b_1^-)). Аналогичная терминология применяется для любого косого произведения и периодической точки в его базе.

Отображение f_{L^+} (f_{L^-}) является северо-южным диффеоморфизмом окружности, т. е. имеет ровно две неподвижные точки 0 и 1, обе гиперболические. Для f_{L^+} точка 0 — репеллер, а 1 — аттрактор; для f_{L^-} точки 0 и 1 меняются ролями. Пусть $(b_1^{\pm}, 0) = S^{\pm}$, $(b_1^{\pm}, 1) = N^{\pm}$. Эти точки являются периодическими для $\mathcal{F}$.

Отображения $g_{L^{\pm}}$ близки к отображениям $f_{L^{\pm}}$ и, следовательно, тоже имеют северо-южную динамику. Пусть $S_*^{\pm}$, $N_*^{\pm}$ — неподвижные точки этих отображений, близкие к $S^{\pm}$, $N^{\pm}$. Эти точки — периодические для G .

Отметим, что описанные выше периодические точки — гиперболические. Напомним, что индекс такой точки (обозначаемый через $\text{ind}(\cdot)$) — это размерность ее неустойчивого многообразия. Индекс всех периодических точек отображения соленоида равен 1. Индекс соответствующих периодических точек косых произведений $\mathcal{F}$ и G зависит от соответствующего послойного отображения Пуанкаре для $\mathcal{F}$ (или для G). Если неподвижная точка этого отображения Пуанкаре является притягивающей, то индекс равен 1, если отталкивающей, то 2. Это доказывает, что

$$\text{ind } S^- = \text{ind } S_*^- = \text{ind } N^+ = \text{ind } N_*^+ = 1,$$

$$\text{ind } S^+ = \text{ind } S_*^+ = \text{ind } N^- = \text{ind } N_*^- = 2.$$

Ограничения отображения $\mathcal{F}$ на A_0 (и на A_1) сопряжены отображению h . Поэтому одномерные неустойчивые многообразия точек S^- , N^+ пересекают двумерные устойчивые многообразия точек S^+ и N^- соответственно. Но $\dim X = 4$. Значит, указанное выше пересечение трансверсально внутри A_j , но не внутри X . Следовательно, свойство Купки–Смейла нарушено для орбит периодических точек $S^{\pm}$, $N^{\pm}$ под действием отображения $\mathcal{F}$.

Периодические точки S^+ (S_*^+) имеют трехмерное центрально-устойчивое многообразие $W_{S^+}^{cs}$, равное произведению диска D^+ с центром S^+ (S_*^+) на устойчивом многообразии $W_{S^+}^s$ ($W_{S_*^+}^s$) и всей окрестности S^1 :

$$W_{S^+}^{cs} = D^+ \times S^1.$$

Пусть n — период орбиты L^+ . Динамика ограничения $\mathcal{G}^n|W_+^{cs}$ такова: все точки вне $W_{S_*^+}^s$ стремятся к N_*^+ при положительных итерациях. Поскольку $\mathcal{G}$ обладает свойством Купки–Смейла, пересечение $W_{S_*^-}^u \cap W_+^{cs}$ стремится к N_*^+ при итерациях $\mathcal{G}^n$, см. рис. 1. Следовательно, неустойчивое многообразие точки S_*^- покидает «нижнюю половину» $\{|x| < 1/2\}$ пространства X .

5.4. Части аттрактора Милнора.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{G}, G, S_*^-, H: Y_{\mathcal{G}} \rightarrow Y$ те же, что и выше. Пусть аттрактор Милнора отображения $\mathcal{G}$ имеет компоненту связности A^* в области $|x| < \varepsilon$ для некоторого ε , зависящего от $\mathcal{F}$. Тогда

$$W = W_{S_*^-}^u \subset H(A^*).$$

Доказательство этой леммы длинно и деликатно, и мы опускаем его за недостатком места.

Рис. 1. Свойство Купки–Смейла для $\mathcal{G}$

Теорема 3 следует из этой леммы и предыдущих рассуждений. Действительно, оба множества W и $H(A_*)$ инвариантны относительно действия $\mathcal{G}$. Но A_* расположено в «нижней половине» пространства X , а W покидает ее — противоречие. Это доказывает теорему 3.

5.5. Коразмерность бесконечность.

Замечание 1. Рассмотрим косое произведение $\mathcal{F}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Рассмотрим множество всех отображений $\mathcal{G}$ из достаточно малой C^1 -окрестности отображения $\mathcal{F}$, для которых множество $B \times \{|x| \leq \varepsilon\}$ содержит компоненту аттрактора Милнора; здесь $\varepsilon < 1/2$ зависит только от $\mathcal{F}$. Тогда это множество отображений имеет коразмерность бесконечность.

Действительно, отображение h имеет более, чем две периодические орбиты, для которых послойное отображение Пуанкаре отображения $\mathcal{G}$ обладает свойством монотонности. Имеется счетное число периодических орбит $L_k^\pm$ отображения h , обладающих этим свойством. Для отображения $\mathcal{G}$ это доказывается так же, как и для отображения $\mathcal{F}$. Для всех этих орбит свойство Купки–Смейла должно быть нарушено; иначе мы приходим к противоречию, как в предыдущем разделе.

5.6. Заключение. Рассмотрим более узкий, чем выше, класс возмущений косых произведений $\mathcal{F}$ (см. (4)), а именно, класс диффеоморфизмов, *сохраняющих множества* A_0 и A_1 . Этот класс становится более естественным, если пространство $X = B \times S^1$ заменить произведением $X' = B \times I$ и рассматривать диффеоморфизмы многообразия с краем, сохраняющие край.

В этом пространстве множество диффеоморфизмов с перемежающимися бассейнами притяжения открыто.

Аналогичный результат сформулирован Каном [3], но его доказательство, насколько нам известно, не опубликовано. Мы предполагаем доказать эту теорему, опираясь на технику, развитую в неопубликованной работе Негута и автора, и на результаты настоящей статьи¹⁾. В частности, мы предполагаем использовать следующую теорему:

Теорема 5. *Рассмотрим отображение (4) прямого произведения $Y = \Lambda \times S^1$ на себя; в формуле (4) b лежит в Λ , а не в B . Пусть это отображение обладает всеми свойствами 1)–3) из разд. 2.3, а также удовлетворяет предположению монотонности. Пусть посылонные отображения f_b непрерывно зависят от $b \in \Lambda$ как элементы пространства $C^1(S^1)$. Пусть μ_Y — та же мера, что в разд. 3.2. Тогда аттрактор Милнора этого отображения относительно меры μ_Y состоит из двух компонент A_0 и A_1 , и их бассейны притяжения метрически плотны в Y .*

Доказательство этой теоремы получается из доказательства основной теоремы 1 с помощью незначительных упрощений.

Автор благодарен Джону Милнору, увлекшему его тематикой перемежающихся аттракторов и познакомившему с препринтом [1], а также Филиппу Быкову и рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bonifant, J. Milnor, *Schwarzian Derivatives and Cylinder Maps*, Preprint, 2007.
- [2] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 583, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
- [3] I. Kan, *Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin*, Bull. Amer. Math. Soc., **31**:1 (1994), 68–74.
- [4] J. Palis, *A global perspective for non-conservative dynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **22**:4 (2005), 485–507.
- [5] Ya. Pesin, *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*, Zurich Lectures in Advanced Math., European Math. Soc., Zürich, 2004.
- [6] Yu. Plyashenko, V. Kleptsyn, P. Saltykov, *Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins*, J. Fixed Point Theory Appl., 2008 (в печати).

Cornell University
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 Независимый московский университет
 Математический институт им. В. А. Стеклова
 e-mail: yulij@gmail.com

Поступило в редакцию
 31 января 2008 г.

¹⁾Примечание при корректуре. См. [6].