Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s) -кривых, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 24–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:08:33

Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s) -кривых

© 2008. В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН

*Дорогому Израилу Моисеевичу Гельфанду
с восхищением и глубокой благодарностью*

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. В классическом смысле *абелевой функцией* называется мероморфная функция на комплексном абелевом торе $T^g = \mathbb{C}^g/\Gamma$, где $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ — решетка ранга $2g$. Иными словами, мероморфная функция f на $\mathbb{C}^g$ является абелевой тогда и только тогда, когда $f(u) = f(u + \omega)$ для всех $u \in \mathbb{C}^g$ и $\omega \in \Gamma$. Абелевы функции на T^g образуют дифференциальное поле.

Алгебраическая кривая C рода g задает решетку Γ как множество всех периодов базисных голоморфных дифференциалов на C . Пусть ω — вектор, составленный из голоморфных дифференциалов, а γ — цикл на C . Тогда $\oint_{\gamma} \omega \in \Gamma$. Тор, построенный по этой решетке, называется многообразием Якоби (или якобианом) кривой C . Обозначим через $\mathcal{F}$ поле абелевых функций на якобиане кривой рода g .

Дифференциальное поле $\mathcal{F}$ обладает следующими свойствами:

- (1) пусть $f \in \mathcal{F}$; тогда $\partial_{u_i} f \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, g$;
- (2) для любых непостоянных функций $f_1, \dots, f_{g+1}$ из $\mathcal{F}$ существует такой полином P , что $P(f_1, \dots, f_{g+1})(u) = 0$ для всех $u \in T^g$;
- (3) пусть $f \in \mathcal{F}$ — непостоянная функция, тогда любая функция $h \in \mathcal{F}$ может быть выражена как рациональная функция от $(f, \partial_{u_1} f, \dots, \partial_{u_g} f)$;
- (4) существует целая функция $\vartheta: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что $\partial_{u_i, u_j} \log \vartheta \in \mathcal{F}$, $i, j = 1, \dots, g$.

Пусть B — открытое плотное подмножество в $\mathbb{C}^d$. Рассмотрим семейство V алгебраических кривых постоянного рода g , гладко зависящих от параметра $b \in B$. Используя семейство V , зададим над B пространство якобианов U . Пространство U имеет естественную структуру гладкого многообразия и является пространством расслоения $p: U \rightarrow B$, где слоем над точкой $b \in B$ служит якобиан J_b кривой с параметром b .

Обозначим через F поле C^∞ -функций на U , ограничения которых на слои J_b являются абелевыми функциями.

Настоящая работа посвящена следующей задаче:

- (а) найти образующие F -модуля $\text{Der } F$ дифференцирований поля F ;
- (б) найти коммутационные соотношения с коэффициентами из F для образующих F -модуля $\text{Der } F$, т. е. описать соответствующую структуру алгебры $\text{Ли Der } F$ над полем F ;
- (с) описать действие $\text{Der } F$ на F .

1.2. Решение для семейства эллиптических кривых. Рассмотрим семейство плоских алгебраических кривых

$$V = \{(x, y, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2 \times B \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$$

над пространством параметров $B = \{(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2 \mid \Delta \neq 0\}$, $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Род g кривых в этом семействе постоянен и равен 1. Такие кривые называются эллиптическими кривыми Вейерштрасса.

Слой T^1 расслоения U над точкой $b = (g_2, g_3) \in B$ имеет вид $\mathbb{C}^1/\Gamma$, $\Gamma = \{\oint_\gamma \frac{dx}{y}\}$. Здесь Γ — решетка ранга 2 и γ пробегает циклы на кривой $V_b = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$.

Векторное поле $\ell_1 = \partial_u$ касается слоя расслоения U , а векторные поля $\ell_0 = 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3}$, $\ell_2 = 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3}$ касаются дискриминанта семейства $\{(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2 \mid \Delta = 0\}$, поскольку $\ell_0\Delta = 12\Delta$, $\ell_2\Delta = 0$, и задают базис векторных полей на базе B .

Поле послонно абелевых функций F порождается координатными функциями базы g_2 и g_3 и эллиптическими функциями Вейерштрасса $\wp(u, g_2, g_3)$ и $\wp'(u, g_2, g_3) = \partial_u \wp(u, g_2, g_3)$, связанными соотношением $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$.

Оператор $L_1 = \ell_1 = \partial_u$, очевидно, является дифференцированием поля F .

Чтобы найти остальные две образующие F -модуля $\text{Der } F$, соответствующие векторным полям ℓ_0 , ℓ_2 на базе, мы используем следующие свойства сигма-функции Вейерштрасса $\sigma(u, g_2, g_3)$ — целой функции переменных $(u, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^3$:

(а) $\partial_u^2 \log \sigma(u, g_2, g_3) = -\wp(u, g_2, g_3) \in F$;

(б) функция $\sigma(u, g_2, g_3)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений $Q_0\sigma = 0$, $Q_2\sigma = 0$, где

$$Q_0 = 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3} - u\partial_u + 1, \quad Q_2 = 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3} - \frac{1}{2}\partial_u^2 - \frac{1}{24}g_2u^2.$$

Важным свойством операторов Q_0 и Q_2 является полиномиальная зависимость их коэффициентов от переменных $(u, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^3$.

Покажем, как, используя свойства (а) и (б), получить вид операторов дифференцирования поля F . Начнем с уравнения $Q_2\sigma = 0$. Имеем $Q_2 = \ell_2 - \frac{1}{2}\partial_u^2 - \frac{1}{24}g_2u^2$. Разделим $Q_2\sigma$ на σ и перегруппируем слагаемые, используя функции Вейерштрасса $\zeta = \partial_u \log \sigma$ и $\wp = -\partial_u^2 \log \sigma$. Получаем $\ell_2 \log \sigma - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{2}\wp - \frac{1}{24}g_2u^2 = 0$. Применим ∂_u^2 , и тогда, поскольку $[\partial_u, \ell_2] = 0$, имеет место равенство $-\ell_2\wp + \zeta\wp' - \wp^2 + \frac{1}{2}\wp'' - \frac{1}{12}g_2 = 0$, где $\wp'' = \partial_u^2\wp$. Следовательно, $(\ell_2 - \zeta\partial_u)\wp = -\wp^2 + \frac{1}{2}\wp'' - \frac{1}{12}g_2 \in F$. Далее, так как $[\ell_2 - \zeta\partial_u, \partial_u] = -\wp\partial_u$, то $(\ell_2 - \zeta\partial_u)\wp' \in F$. Действие оператора $\ell_2 - \zeta\partial_u$ на функцию, зависящую только от координатных функций базы g_2 и g_3 , очевидно, приводит к функции от g_2 и g_3 . Таким образом, линейный дифференциальный оператор $L_2 = \ell_2 - \zeta\partial_u$, действуя на образующие поля F , переводит их в элементы этого поля. Следовательно, L_2 является дифференцированием поля F .

Аналогичное вычисление для оператора Q_0 , аннулирующего сигма-функцию, приводит к еще одному дифференцированию $L_0 = \ell_0 - u\partial_u$.

Тройка образующих F -модуля $\text{Der } F$

$$L_0 = -u\partial_u + 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3}, \quad L_1 = \partial_u, \quad L_2 = -\zeta(u, g_2, g_3)\partial_u + 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3}$$

была впервые найдена Фробениусом и Штикельбергером (см. [12]). Б. А. Дубровин разъяснил значение этого результата с точки зрения дифференциальной

геометрии универсального расслоения якобианов эллиптических кривых. Связность в этом расслоении он назвал *FS-связностью* (см. [10, добавление С]). Операторы Q_0 и Q_2 , аннулирующие сигма-функцию σ , были открыты Вейерштрассом (см. [14]). Во время написания работы [12] эти операторы еще не были известны, и метод Фробениуса и Штикельбергера использовал значительно более сложные вычисления, чем метод, описанный выше.

F -модуль $\text{Der } F$ с образующими L_0, L_1, L_2 представляет собой алгебру Ли над полем F с коммутационными соотношениями

$$[L_0, L_k] = kL_k, \quad k = 1, 2, \quad [L_1, L_2] = \wp(u, g_2, g_3)L_1.$$

1.3. Цель и план работы. Наша цель — выделить те случаи задачи о дифференцировании поля абелевых функций рода $g > 1$, зависящих от параметров, которые, с одной стороны, являются достаточно общими и, с другой стороны, допускают столь же эффективное решение, как и эллиптический случай. Для достижения этой цели мы

(1) выбираем специальное семейство $V \rightarrow B$ плоских алгебраических кривых постоянного рода g ;

(2) строим базис $\ell_1, \dots, \ell_d$ векторных полей на B , действующих на функции $f \in F$ как линейные дифференциальные операторы первого порядка по координатам базы B ;

(3) строим операторы $H_1, \dots, H_d$, действующие на $f \in F$ как операторы второго порядка вдоль слоев расслоения $U \rightarrow B$, такие, что сигма-функция σ , ассоциированная с семейством кривых V , удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений $(\ell_i - H_i)\sigma = 0$, $i = 1, \dots, d$.

Далее мы опишем семейства (n, s) -кривых и ассоциированные с ними сигма-функции σ и, пользуясь тем же методом, что и в случае семейства эллиптических кривых, найдем образующие модуля $\text{Der}(F)$, используя тот факт, что производные выше первого порядка от логарифма сигма-функции вдоль слоев расслоения $U \rightarrow B$ принадлежат полю F . В заключительном параграфе статьи мы опишем структуру алгебры Ли над полем F , соответствующую этим образующим, и приведем подробно все шаги решения задачи для семейства кривых рода 2. Часть результатов этой работы изложена в [9].

§2. Семейства (n, s) -кривых

2.1. Модель Вейерштрасса алгебраической кривой. Пусть C — неприводимая алгебраическая кривая рода $g > 0$ над $\mathbb{C}$.

Пусть p — точка на C . Рассмотрим кольцо $M(p)$ рациональных функций на кривой C , полюсы которых находятся только в точке p . Построим последовательность $S(p) = (S_1, S_2, \dots)$ по следующему правилу: $S_k = 1$, если в $M(p)$ существует функция с полюсом порядка k , в противном случае положим $S_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Точка p называется *регулярной*, если последовательность $S(p)$ монотонна. Если последовательность $S(p)$ немонотонна, то p называется *точкой Вейерштрасса*.

Пример 2. Пусть p — регулярная точка; тогда $S(p) = (0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots)$. Точки Вейерштрасса классифицируют по числу нарушений монотонности последовательности $S(p)$. Точки только с одним нарушением монотонности называются *нормальными*, а точки с наибольшим числом нарушений монотонности,

равным роду кривой, называются *гиперэллиптическими*. Таким образом, если p — нормальная точка Вейерштрасса, то $S(p) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 1, 1, \dots)$, а если p — гиперэллиптическая точка Вейерштрасса, то $S(p) = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 1, \dots)$.

Пусть $p \in C$ — точка Вейерштрасса. Обозначим через C_p кривую C с выколотой точкой p . Рассмотрим кольцо $\mathcal{O}$ целых рациональных функций на C_p .

Определение 3. Пусть $\phi \in \mathcal{O}$ — непостоянная функция. Полное число нулей функции ϕ на C_p называется ее *порядком* и обозначается через $\text{ord } \phi$. Положим $\text{ord } \phi = 0$, когда ϕ — ненулевая постоянная.

Если $\phi, \varphi \in \mathcal{O}$, то $\text{ord}(\phi\varphi) = \text{ord } \phi + \text{ord } \varphi$.

Заметим, что $\phi \in \mathcal{O}$ продолжается единственным образом до рациональной функции на C с полюсом порядка $\text{ord } \phi$ в точке p .

Лемма 4. Пусть $\phi, \varphi \in \mathcal{O}$ — непостоянные функции. Тогда φ является целой алгебраической функцией от ϕ .

Пусть $x, y \in \mathcal{O}$ — непостоянные функции, такие, что $n = \text{ord } x$ является наименьшим возможным, а $s = \text{ord } y$ является наименьшим возможным при условии $\text{gcd}(n, s) = 1$. С помощью числового множителя функцию y всегда можно нормировать так, чтобы $\text{ord}(y^n - x^s) < ns$. Тогда, поскольку y является целой алгебраической функцией от x , функцию $y^n - x^s$ можно представить как линейную комбинацию мономов $x^i y^j$, таких, что $\text{ord}(x^i y^j) = ni + sj < ns$. Таким образом, мы получаем соотношение

$$y^n - x^s = \sum_{i,j \geq 0}^{q(i,j) > 0} \alpha_{i,j} x^i y^j,$$

где $q(i, j) = (n - j)(s - i) - ij$ и $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$, которое задает *модель Вейерштрасса кривой C* .

Наиболее известный пример модели Вейерштрасса — это кубическое уравнение $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, задающее эллиптическую кривую ($n = 2, s = 3$).

Вывод. Для любой неприводимой алгебраической кривой существует модель Вейерштрасса.

Замечание 5. Для кривой рода $g > 1$ модель Вейерштрасса не является единственной. Модели Вейерштрасса одной кривой бирационально эквивалентны.

Следуя идее Вейерштрасса [15], вместо «кривой общего положения» мы рассматриваем классы моделей плоских алгебраических кривых

$$V = \left\{ (x, y; \lambda) \in \mathbb{C}^{2+d} \mid y^n = x^s + \sum_{i,j \geq 0}^{q(i,j) > 0} \lambda_{q(i,j)} x^i y^j \right\},$$

где $d = \frac{1}{2}(n+1)(s+1) - 1$ и $q(i, j) = (n - j)(s - i) - ij$, занумерованные парами целых чисел (n, s) , таких, что $s > n > 1$ и $\text{gcd}(n, s) = 1$.

Род кривых, заданных моделями Вейерштрасса из (n, s) -класса, не превышает $g = \frac{1}{2}(n-1)(s-1)$. Например, для гиперэллиптических кривых рода не выше g имеем $(n, s) = (2, 2g+1)$.

2.2. Модель Вейерштрасса с точки зрения теории особенностей. Здесь нам потребуются некоторые понятия и результаты теории особенностей [2].

В теории особенностей множество нулей функции вида

$$f(x, y, \lambda) = y^n - x^s - \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{s-2} \lambda_{q(i,j)} x^i y^j \quad (1)$$

возникает как *миниверсальная деформация* так называемой *особенности Фاما* $y^n - x^s = 0$. Миниверсальная деформация зависит от $(n-1)(s-1)$ координат вектора $\lambda = (\lambda_{q(0,0)}, \dots, \lambda_{q(s-2,n-2)})$. Число $m = \#\{\lambda_k \mid k < 0\}$ называется *модальностью* особенности $y^n - x^s = 0$.

Дискриминант $\Sigma \subset \mathbb{C}^{2g}$ миниверсальной деформации f определяется следующим образом:

$$(\lambda \in \Sigma) \iff (\exists (x, y) \in \mathbb{C}^2: f = f_x = f_y = 0 \text{ в точке } (x, y, \lambda)).$$

Следовательно, если $\lambda \notin \Sigma$, то род кривой из семейства, заданного миниверсальной деформацией (1), *не меньше* $\frac{1}{2}(n-1)(s-1)$. (Напомним, что род кривой, заданной моделью Вейерштрасса из (n, s) -класса, *не больше* $\frac{1}{2}(n-1)(s-1)$.)

Наложим условие $\lambda_{q(i,j)} = 0$, когда $q(i, j) < 0$, на миниверсальную деформацию или, эквивалентно, условие $\lambda_{q(s-1,j)} = \lambda_{q(i,n-1)} = 0$ на модель Вейерштрасса. Тогда над множеством $B = \mathbb{C}^{2g-m} \cap (\mathbb{C}^{2g} \setminus \Sigma)$ мы получим семейство кривых постоянного рода $g = (n-1)(s-1)/2$ как пересечение классов миниверсальных деформаций и моделей Вейерштрасса. Такое семейство плоских алгебраических кривых мы будем называть *семейством (n, s) -кривых*.

Ниже мы будем рассматривать семейство (n, s) -кривых $V = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times B \mid f(x, y, \lambda) = 0\}$, заданное с помощью полинома

$$f(x, y, \lambda) = y^n - x^s - \sum_{\substack{q(i,j) > 0 \\ 0 \leq i < s-1 \\ 0 \leq j < n-1}} \lambda_{q(i,j)} x^i y^j, \quad \text{где } q(i, j) = (n-j)(s-i) - ij.$$

Здесь $\dim_{\mathbb{C}} B = d = 2g - m$.

Отметим некоторые свойства семейства (n, s) -кривых. Многоугольник Ньютона полинома f относительно переменных (x, y) представляет собой треугольник. Полином f однороден относительно градуировки $\deg x = n$, $\deg y = s$ и $\deg \lambda_k = k$. Кривая общего положения из семейства V , рассматриваемая как n -листное накрытие над S^2 , имеет $(n-1)s + 1 = 2g + n$ точек ветвления, причем точка в бесконечности имеет число ветвления $n-1$, а числа ветвления остальных $2g + n - 1$ точек ветвления, согласно формуле Римана-Гурвица, равны 1.

2.3. Дискриминант семейства (n, s) -кривых. Обозначим через $M(x, y) = (M_1(x, y), \dots, M_{2g}(x, y))$ упорядоченный по возрастанию весов набор мономов $\{x^i y^j\}$, $i = 1, \dots, s-2$, $j = 1, \dots, n-2$.

Пример 6. Пусть $(n, s) = (2, 2g+1)$; тогда $M(x, y) = (1, x, \dots, x^{2g-1})$.

Пусть $(n, s) = (3, 5)$; тогда $M(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, x^3, yx^2, x^4)$.

Дискриминант миниверсальной деформации (1) и векторные поля, касательные к нему, можно эффективно построить, применив теорему Закалюкина [16]. Пусть полином $f(x, y, \lambda)$ задан формулой (1). Соотношение

$$M_i(x, y) f(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^{2g} T_{i,j}(\lambda) M_j(x, y) \mod (\partial_x, \partial_y) f(x, y, \lambda)$$

однозначно задает голоморфные функции $T_{i,j}(\lambda)$, $i, j = 1, \dots, 2g$. Обозначим $(2g \times 2g)$ -матрицу, составленную из этих функций, через $T(\lambda)$.

Теорема 7. *Дискриминант $\Sigma \subset \mathbb{C}^{2g}$ полинома $f(x, y, \lambda)$, заданного формулой (1), представляет собой множество нулей голоморфной функции $\Delta(\lambda) = \det T(\lambda)$, $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}^{2g} \mid \Delta(\lambda) = 0\}$. Пусть $I = (i_1, \dots, i_{2g})$ — упорядоченный по возрастанию набор весов $\deg \lambda$. Векторные поля $\ell_j = \sum_{k=1}^{2g} T_{2g-j, 2g-k}(\lambda) \partial / \partial \lambda_{i_k}$, $j = 1, \dots, 2g$, касаются гиперповерхности Σ , т.е. $\ell_j \log \Delta(\lambda) \in \mathbb{C}[[\lambda]]$, причем $\ell_1 = \sum_{k=1}^{2g} i_k \lambda_{i_k} \partial / \partial \lambda_{i_k}$ — эйлерово векторное поле.*

Составляя из векторных полей ℓ_i линейные комбинации с голоморфными по λ коэффициентами, голоморфный репер $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_{2g})^t$ можно привести к специальному виду, когда матрица коэффициентов репера становится симметрической (см. [7]). Сохраним для нее то же обозначение $T(\lambda)$. В этом случае $T(\lambda)$ представляет собой матрицу Арнольда (см. [1], [13]) сворачивания инвариантов особенности Фама $y^n - x^s = 0$. Далее мы будем предполагать, что такая симметризация репера $\mathcal{L}$ выполнена.

Перейдем к семействам (n, s) -кривых. Нам необходимо построить векторные поля, касательные к $\Sigma_0 = \Sigma \cap H$, где $H = \{\lambda \in \mathbb{C}^{2g} \mid (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}) = 0\}$. Ясно, что касательное расслоение $T\Sigma_0$ состоит из тех векторных полей, принадлежащих $T\Sigma$, которые ортогональны TH над H , т.е. во всех точках, где $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}) = 0$. Рассмотрим подробнее случаи $m = 0$ и $m = 1$.

Если $m = 0$ (случай так называемых простых особенностей), то $\Sigma_0 = \Sigma$, и поэтому в качестве базиса в TB можно использовать репер $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_{2g})^t$. В этом случае коэффициенты репера являются полиномами от λ .

Если $m = 1$, то пространство TH имеет одну образующую $\eta_1 = \partial / \partial \lambda_{i_1}$. Эйлерово векторное поле ℓ_1 , очевидно, ортогонально полю η_1 в H . Далее, для любой пары (j, k) , такой, что $1 < j < k \leq 2g$, векторное поле $\xi_{j,k} = T_{k,1}(\lambda) \ell_j - T_{j,1}(\lambda) \ell_k$ касается Σ и ортогонально η_1 в H . Векторные поля $\xi_{j,k}$ удовлетворяют соотношениям $T_{l,1}(\lambda) \xi_{j,k} - T_{k,1}(\lambda) \xi_{j,l} + T_{j,1}(\lambda) \xi_{k,l} = 0$, $1 < j < k < l \leq 2g$. Следовательно, в этом случае для наших целей в качестве базиса в TB можно использовать репер, составленный из $2g - 1$ векторных полей $(\ell_1, \xi_{2,3}, \dots, \xi_{2,2g})^t$. При ограничении на подпространство H коэффициенты репера становятся полиномами от λ .

Аналогичное построение для произвольного m приводит к набору из $2g - m$ полиномиальных векторных полей. В дальнейшем репер пространства TB , составленный из них, мы будем обозначать через $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_{2g-m})^t$. Обозначим через $c_{ij}^h(\lambda)$ структурные функции репера $\mathcal{L}$, т.е.

$$[\ell_i, \ell_j] = \sum_{h=1}^{2g-m} c_{ij}^h(\lambda) \ell_h, \quad i, j = 1, \dots, 2g - m.$$

При $m = 0$ функции $c_{ij}^h(\lambda)$ являются полиномами. Свойства структурных функций при $m \neq 0$ мы опишем в одной из наших ближайших публикаций.

§3. Сигма-функция, ассоциированная с семейством (n, s) -кривых

3.1. Связность Гаусса–Манина на расслоении (n, s) -кривых с выколотой точкой в бесконечности. Уравнение $f(x, y, \lambda) = 0$ в $\mathbb{C}^{2+2g-m}$ задает семейство $V(n, s)$ -кривых над $B = \mathbb{C}^{2g-m} \setminus \Sigma_0$. Рассмотрим расслоение

$\mathring{p}: \mathring{V} \rightarrow B$ со слоем $\mathring{V}_b$, представляющим собой кривую V_b с выколотой точкой в бесконечности.

Пусть $H^1(\mathring{V}_b, \mathbb{C})$ — линейное $2g$ -мерное пространство голоморфных 1-форм на $\mathring{V}_b$.

Рассмотрим ассоциированное с расслоением $\mathring{p}: \mathring{V} \rightarrow B$ локально тривиальное расслоение $\varpi: \Omega^1 \rightarrow B$, слоем которого является $H^1(\mathring{V}_b, \mathbb{C})$. Связность в Ω^1 называется *связностью Гаусса–Манина на $\mathring{V}$* .

Поскольку точка ∞ принадлежит всем кривым семейства V , мы можем построить глобальное сечение расслоения Ω^1 , выбрав на V классический базис абелевых дифференциалов первого и второго типов.

Пусть $D(x, y, \lambda) = (D_1(x, y, \lambda), \dots, D_{2g}(x, y, \lambda))$ — вектор канонических 1-форм из $H^1(\mathring{V}_b, \mathbb{C})$. Его матрица периодов Ω удовлетворяет тождеству Лежандра¹⁾

$$\Omega^t J \Omega = 2\pi i J, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{pmatrix}.$$

Дифференциал $D(x, y, \lambda)$ можно построить методами классической теории абелевых дифференциалов [3].

Коэффициент Кристоффеля связности Гаусса–Манина $\Gamma_j = (\Gamma_{j,i}^k)$, $i, k = 1, \dots, 2g$, соответствующий векторному полю на базе ℓ_j , $j = 1, \dots, 2g - m$, *однозначно определяется* тем, что голоморфная 1-форма $\ell_j D(x, y, \lambda) + D(x, y, \lambda) \Gamma_j$ точна вдоль кривой. Здесь «вдоль кривой» означает, что переменные x и y связаны уравнением $f(x, y, \lambda) = 0$.

Интегрируя точную форму $\ell_j D(x, y, \lambda) + D(x, y, \lambda) \Gamma_j$ по базисным циклам в слое, получаем $\ell_j \Omega + \Omega \Gamma_j = 0$. Из тождества Лежандра следует, что $\det \Omega \neq 0$. Таким образом, мы получаем

Следствие 8. $\Gamma_j = -\Omega^{-1} \ell_j \Omega$.

Применение векторного поля ℓ_j к тождеству Лежандра дает

Следствие 9. $J \Gamma_j + \Gamma_j^t J = 0$.

Этот результат дает возможность непосредственно построить канонический дифференциал $D(x, y, \lambda)$, не используя классических методов. Положим $R(x, y, \lambda) = M(x, y) dx/f_y(x, y, \lambda)$. Дифференциал $R(x, y, \lambda)$, очевидно, задает базис в Ω^1 , однако его периоды не удовлетворяют тождеству Лежандра. Пусть $\chi_j(\lambda)$ — коэффициент Кристоффеля связности Гаусса–Манина для $R(x, y, \lambda)$ вдоль поля ℓ_j , т. е. 1-форма $\ell_j R(x, y, \lambda) + R(x, y, \lambda) \chi_j$ точна вдоль слоев расслоения $\mathring{p}: \mathring{V} \rightarrow B$. Дифференциалы $D(x, y, \lambda)$ и $R(x, y, \lambda)$ связаны соотношением $D(x, y, \lambda) = R(x, y, \lambda) K(\lambda)$, где $K(\lambda)$ — невырожденная голоморфная матрица, причем $K(0)$ — диагональная числовая матрица. Имеем $\Gamma_j = K^{-1}(\chi_j K - \ell_j K)$. Отсюда, согласно следствию 9, получаем для матрицы K систему $2g - m$ уравнений

$$(\chi_j K - \ell_j K) J K^t + K J (\chi_j K - \ell_j K)^t = 0, \quad j = 1, \dots, 2g - m.$$

¹⁾ Частный случай соотношений Римана–Ходжа.

3.2. Сигма-функция. Рассмотрим множество Sh операторов $W_{a,b,c}$, действующих на функциях по формуле

$$W_{a,b,c}(f(u)) = f(u+a) \exp\left(\frac{1}{2}(2u+a, b) + c\pi i\right),$$

где $u, a, b \in \mathbb{C}^g$, $c \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение. Будем называть $W_{a,b,c}$ *оператором ковариантного сдвига*. Множество Sh замкнуто относительно композиции,

$$W_{a_2, b_2, c_2} W_{a_1, b_1, c_1} = W_{a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2+(2\pi i)^{-1}(\langle b_1, a_2 \rangle - \langle a_1, b_2 \rangle)}.$$

Нам понадобится следующее представление: $\mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g \rightarrow Sh$, $(n, n') \mapsto ((a, b), c) = ((n, n')\Omega, \phi(n, n'))$, где $\Omega = \Omega(\lambda) \in \text{Mat}(2g, C^\infty(B))$, — как и выше, матрица периодов дифференциала $D(x, y, \lambda)$, удовлетворяющая тождеству Лежандра, и $\phi: \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — функция Арфа.

Напомним, что $\phi: \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ называется *функцией Арфа*, если для всех q_1 и q_2 из $\mathbb{Z}^{2g}$ выполняется *тождество Арфа* $\phi(q_1 + q_2) = \phi(q_1) + \phi(q_2) + q_1 J q_2^t \pmod{2}$.

Для того чтобы задать функцию Арфа ϕ , достаточно выбрать пару $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathbb{Z}^{2g}$. Тогда

$$\phi(n, n') = (\langle n + \varepsilon, n' + \varepsilon' \rangle - \langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle) \pmod{2}.$$

Запишем матрицу Ω в блочной форме, $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} \\ \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} \end{pmatrix}$; тогда можно положить $W_{\Omega}^{\varepsilon, \varepsilon'}(n, n') = W_{a,b,c}$, где $a = (n\Omega_{1,1} + n'\Omega_{2,1})$, $b = (n\Omega_{1,2} + n'\Omega_{2,2})$, $c = \langle n + \varepsilon, n' + \varepsilon' \rangle - \langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle$.

Поскольку $D(x, y, \lambda)$ — вектор базисных дифференциалов, матрица $\Omega_{1,1}$ невырожденна и $\tau = \Omega_{2,1}\Omega_{1,1}^{-1}$ — симметрическая матрица, причем, как следует из тождества Лежандра, $\text{Im}(\tau)$ — положительно определенная матрица.

Положим $G_{\Omega}(u) = |\Omega_{1,1}|^{-1/2} \exp(-\frac{\pi i}{2} u \mathcal{K} u^t)$, $i^2 = -1$, где, согласно тождеству Лежандра, $\mathcal{K} = \Omega_{1,1}^{-1}\Omega_{1,2}$ — *симметрическая матрица*. Рассмотрим функцию

$$\sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon') = \sum_{(n, n') \in \mathbb{Z}^{2g}} W_{\Omega}^{\varepsilon, \varepsilon'}(n, n') G_{\Omega}(u).$$

Теорема 10. *Функция $\sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')$ является целой функцией от $u \in \mathbb{C}^g$.*

Мероморфные функции $\wp_{i,j}(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon') = -\partial_{u_i, u_j} \log \sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')$ являются абелевыми относительно решетки, порожденной строками матриц $\Omega_{1,1}$ и $\Omega_{2,1}$, т. е. $\wp_{i,j}(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon') = \wp_{i,j}(u + n\Omega_{1,1} + n'\Omega_{2,1}, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')$, $(n, n') \in \mathbb{Z}^{2g}$.

Доказательство. По построению функция $\sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')$ является собственной функцией оператора ковариантного сдвига $W_{\Omega}^{\varepsilon, \varepsilon'}(n, n')$ с собственным значением $+1$ или -1 . Следовательно, функция $\sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')/G_{\Omega}(u)$ разлагается в ряд Фурье с не зависящими от u коэффициентами. Этот ряд сходится, так как мнимая часть матрицы τ положительно определена. С другой стороны, разность $\log \sigma(u, \Omega; \varepsilon, \varepsilon') - \log \sigma(u + n\Omega_{1,1} + n'\Omega_{2,1}, \Omega; \varepsilon, \varepsilon')$ представляет собой линейную функцию от u . $\square$

Далее мы будем предполагать, что пара $(\varepsilon, \varepsilon')$ выбрана равной характеристике вектора римановых констант, которую можно считать одинаковой для всех кривых из семейства V .

Определение 11. Функцию $\sigma(u, \lambda) = \Delta(\lambda)^{1/8} \sigma(u, \Omega(\lambda); \varepsilon, \varepsilon')$ будем называть *сигма-функцией, ассоциированной с семейством кривых V* .

Ясно, что утверждение теоремы 10 остается в силе, если в ее формулировке заменить функцию $\sigma(u, \Omega(\lambda); \varepsilon, \varepsilon')$ функцией $\sigma(u, \lambda)$.

Замечание 12. Функция $\sigma(u, \lambda)$ в отличие от $\sigma(u, \Omega(\lambda); \varepsilon, \varepsilon')$ голоморфно зависит от λ . В частности, для нее существует так называемый *рациональный предел* при $\lambda \rightarrow 0$. Функция $\sigma(u, 0)$ является полиномом, который полностью определяется парой чисел (n, s) и представляет собой так называемый полином Шура–Вейерштрасса (см. [6]).

3.3. Линейные операторы, аннулирующие сигма-функцию. Зададим матрицы $\alpha_j = (\alpha_j^{kl})$, $\beta_j = (\beta_j^{lk})$ и $\gamma_j = (\gamma_{jkl})$, где $k, l = 1, \dots, g$ и $j = 1, \dots, 2g - m$, по формуле

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & (\beta_j)^t \\ \beta_j & \gamma_j \end{pmatrix} = -J\Gamma_j,$$

где Γ_j — символ Кристоффеля связности Гаусса–Манина, и положим

$$H_j = \frac{1}{2} \alpha_j^{kl}(\lambda) \partial_{u_k} \partial_{u_l} + \beta_j^{lk}(\lambda) u_k \partial_{u_l} + \frac{1}{2} \gamma_{jkl}(\lambda) u_k u_l + \frac{1}{8} \ell_j(\log \Delta(\lambda)) + \frac{1}{2} \beta_{jk}^k(\lambda).$$

Здесь и ниже подразумевается суммирование от 1 до g по повторяющимся индексам.

Теорема 13. Сигма-функция $\sigma(u, \lambda)$ удовлетворяет системе из $2g - m$ линейных дифференциальных уравнений $(\ell_j - H_j)\sigma(u, \lambda) = 0$, $j = 1, \dots, 2g - m$.

Доказательство. Используя соотношения $\Gamma_j = -\Omega^{-1} \ell_j \Omega$, см. следствие 8, получаем, что $(\ell_j - H_j)G_\Omega(u) = 0$ и $[\ell_j - H_j, W_\Omega^{\varepsilon, \varepsilon'}(n, n')] = 0$ для всех $j = 1, \dots, 2g - m$ и $(n, n') \in \mathbb{Z}^{2g}$. Детали этого доказательства см. в [8]. $\square$

§ 4. Дифференцирования поля F

4.1. Основной результат. Теперь, опираясь на теоремы 10 и 13, мы можем применить к полям послойно абелевых функций, ассоциированных с (n, s) -кривыми, метод решения нашей задачи, который мы описали в разд. 1.2 для случая $n = 2$ и $s = 3$.

Пусть $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_{2g-m})^t$ — репер со структурными функциями c_{ij}^h , описанный в разд. 2.3, и $\alpha_j = (\alpha_j^{kl})$, $\beta_j = (\beta_j^{lk})$, $\gamma_j = (\gamma_{jkl})$ — матрицы, описанные в разд. 3.3.

Теорема 14. Рассматриваемая задача для семейств (n, s) -кривых имеет следующее решение:

- (a) F -модуль $\text{Der } F$ порождается $3g - m$ образующими $d_i = \partial_{u_i}$, $i = 1, \dots, g$, $L_j = \ell_j - (\alpha_j^{kl} \zeta_k(u, \lambda) + \beta_j^{lk} u_k) \partial_{u_l}$, $j = 1, \dots, 2g - m$, где $\zeta_k(u, \lambda) = \partial_{u_k} \log \sigma(u, \lambda)$;
- (b) структура алгебры Ли $\text{Der } F$ над полем F определяется соотношениями

$$[d_i, d_k] = 0, \quad [L_j, d_i] = -(\alpha_j^{kq} \wp_{iq}(u, \lambda) - \beta_{ji}^k) d_k,$$

$$[L_i, L_j] = \frac{1}{2} (\alpha_i^{kl} \alpha_j^{qr} - \alpha_j^{kl} \alpha_i^{qr}) \wp_{klq}(u, \lambda) d_r + \sum_{h=1}^{2g-m} c_{ij}^h L_h;$$

(с) действие $\text{Der } F$ на F определяется соотношениями

$$d_i \lambda = 0, \quad d_i \wp_{qr}(u, \lambda) = \wp_{iqr}(u, \lambda),$$

$$L_j \lambda = \ell_j \lambda, \quad L_j \wp_{qr}(u, \lambda) = \frac{1}{2} \alpha_j^{kl} (\wp_{klqr} - 2 \wp_{kq} \wp_{lr}) + \beta_{jq}^k \wp_{kr} + \beta_{jr}^k \wp_{kq} - \gamma_{jqr}.$$

4.2. Пример 15. Случай $(n, s) = (2, 5)$ соответствует семейству кривых рода 2. Имеем $V = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^6 \mid f(x, y, \lambda) = 0, \Delta(\lambda) \neq 0\}$, где $f(x, y, \lambda) = y^2 - (x^5 + \lambda_4 x^3 + \lambda_6 x^2 + \lambda_8 x + \lambda_{10})$. Полином $f(x, y, \lambda)$ однороден в градуировке $\deg x = 2, \deg y = 5, \deg \lambda_k = k$ и $m = 0$. Дискриминант $f(x, y, \lambda)$ задан нулями полинома

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & 3125\lambda_{10}^4 + 2(128\lambda_8^5 - 800\lambda_6\lambda_{10}\lambda_8^3 + 1000\lambda_4\lambda_{10}^2\lambda_8^2 + 1125\lambda_6^2\lambda_{10}^2\lambda_8 - 1875\lambda_4\lambda_6\lambda_{10}^3) \\ & + 108\lambda_{10}\lambda_6^5 - 27\lambda_8^2\lambda_6^4 - 630\lambda_4\lambda_8\lambda_{10}\lambda_6^3 + 144\lambda_4\lambda_8^3\lambda_6^2 + 825\lambda_4^2\lambda_{10}^2\lambda_6^2 + 560\lambda_4^2\lambda_8^2\lambda_{10}\lambda_6 \\ & - 128\lambda_4^2\lambda_8^4 - 900\lambda_4^3\lambda_8\lambda_{10}^2 + 4\lambda_4^3(4\lambda_{10}\lambda_6^3 - \lambda_8^2\lambda_6^2 - 18\lambda_4\lambda_8\lambda_{10}\lambda_6 + 4\lambda_4\lambda_8^3 + 27\lambda_4^2\lambda_{10}^2), \end{aligned}$$

который можно вычислить непосредственно, взяв результат по x полиномов $f(0, x, \lambda)$ и $\partial_x f(0, x, \lambda)$.

Векторные поля $(\ell_0, \ell_2, \ell_4, \ell_6)^t = T(\lambda)(\partial_{\lambda_4}, \partial_{\lambda_6}, \partial_{\lambda_8}, \partial_{\lambda_{10}})^t$, $\deg \ell_j = j$, заданные симметрической матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 4\lambda_4 & 6\lambda_6 & 8\lambda_8 & 10\lambda_{10} \\ * & 8\lambda_8 - \frac{12}{5}\lambda_4^2 & 10\lambda_{10} - \frac{8}{5}\lambda_4\lambda_6 & -\frac{4}{5}\lambda_4\lambda_8 \\ * & * & 4\lambda_4\lambda_8 - \frac{12}{5}\lambda_6^2 & 6\lambda_4\lambda_{10} - \frac{6}{5}\lambda_6\lambda_8 \\ * & * & * & 4\lambda_6\lambda_{10} - \frac{8}{5}\lambda_8^2 \end{pmatrix},$$

причем $\det T(\lambda) = \frac{16}{5}\Delta(\lambda)$, касаются дискриминанта, поскольку

$$(\ell_0, \ell_2, \ell_4, \ell_6) \log \Delta(\lambda) = (40, 0, 12\lambda_4, 4\lambda_6).$$

Структурные функции этого репера — полиномы:

$$\begin{aligned} [\ell_0, \ell_k] &= k\ell_k, \quad k = 2, 4, 6, \quad [\ell_2, \ell_4] = 2\ell_6 - \frac{8}{5}\lambda_4\ell_2 + \frac{8}{5}\lambda_6\ell_0, \\ [\ell_2, \ell_6] &= -\frac{4}{5}\lambda_4\ell_4 + \frac{4}{5}\lambda_8\ell_0, \quad [\ell_4, \ell_6] = 2\lambda_4\ell_6 - \frac{6}{5}\lambda_6\ell_4 + \frac{6}{5}\lambda_8\ell_2 - 2\lambda_{10}\ell_0. \end{aligned}$$

В этом случае $M(x, y) = (1, x, x^2, x^3)$ и $R(x, y) = M(x, y) \frac{dx}{2y}$. Имеем

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \text{diag}(3, 1, -1, -3), \\ \chi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5}\lambda_4 & 0 & \lambda_8 \\ 1 & 0 & -\frac{8}{5}\lambda_4 & 2\lambda_6 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{5}\lambda_4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_4 = \begin{pmatrix} \lambda_4 & -\frac{6}{5}\lambda_6 & \lambda_8 & 2\lambda_{10} \\ 0 & -\lambda_4 & -\frac{2}{5}\lambda_6 & 3\lambda_8 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\lambda_6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_6 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5}\lambda_8 & 2\lambda_{10} & 0 \\ -\lambda_4 & 0 & -\frac{1}{5}\lambda_8 & 4\lambda_{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\lambda_8 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общее решение системы уравнений на матрицу $K(\lambda)$, удовлетворяющее условиям голоморфности и однородности, имеет вид

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a\lambda_6 & b\lambda_4 \\ 0 & 1 & (b-1)\lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ — свободные параметры. Положим $(a, b) = (0, 0)$, что соответствует классическому построению [3]. Тогда

$$\Gamma_0 = \text{diag}(3, 1, -3, -1), \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5}\lambda_4 & \frac{4}{5}\lambda_4^2 - 3\lambda_8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5}\lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}\lambda_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \lambda_4 & -\frac{6}{5}\lambda_6 & \frac{6}{5}\lambda_4\lambda_6 - 6\lambda_{10} & -\lambda_8 \\ 0 & 0 & -\lambda_8 & \frac{2}{5}\lambda_6 \\ 0 & 1 & -\lambda_4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{6}{5}\lambda_6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5}\lambda_8 & \frac{3}{5}\lambda_4\lambda_8 & -2\lambda_{10} \\ 0 & 0 & -2\lambda_{10} & \frac{1}{5}\lambda_8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}\lambda_8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\deg u_i = -i$. Тогда операторы H_j однородны и $\deg H_j = j$:

$$H_0 = u_1\partial_{u_1} + 3u_3\partial_{u_3} - 3,$$

$$10H_2 = 5\partial_{u_1}^2 + 10u_1\partial_{u_3} - 8\lambda_4u_3\partial_{u_1} - 3\lambda_4u_1^2 + (15\lambda_8 - 4\lambda_4^2)u_3^2,$$

$$5H_4 = 5\partial_{u_1}\partial_{u_3} + 5\lambda_4u_3\partial_{u_3} - 6\lambda_6u_3\partial_{u_1} - \lambda_6u_1^2 + 5\lambda_8u_1u_3 + 3(5\lambda_{10} - \lambda_4\lambda_6)u_3^2 - 5\lambda_4,$$

$$10H_6 = 5\partial_{u_3}^2 - 6\lambda_8u_3\partial_{u_1} - \lambda_8u_1^2 + 20\lambda_{10}u_1u_3 - 3\lambda_4\lambda_8u_3^2 - 5\lambda_6.$$

Образующие F -модуля $\text{Der } F$:

$$L_0 = \ell_0 - u_1\partial_{u_1} - 3u_3\partial_{u_3}, \quad L_1 = \partial_{u_1},$$

$$L_2 = \ell_2 - \zeta_1\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_3} - \frac{4}{5}\lambda_4u_3\partial_{u_1}, \quad L_3 = \partial_{u_3},$$

$$L_4 = \ell_4 - \zeta_3\partial_{u_1} - \zeta_1\partial_{u_3} + \lambda_4u_3\partial_{u_3} - \frac{6}{5}\lambda_6u_3\partial_{u_1}, \quad L_6 = \ell_6 - \zeta_3\partial_{u_3} - \frac{3}{5}\lambda_8u_3\partial_{u_1}.$$

Структурные соотношения в алгебре Ли $\text{Der } F$ над полем F :

$$[L_0, L_k] = kL_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 6,$$

$$[L_1, L_2] = \wp_{1,1}L_1 - L_3, \quad [L_1, L_3] = 0, \quad [L_1, L_4] = \wp_{1,3}L_1 + \wp_{1,1}L_3,$$

$$[L_1, L_6] = \wp_{1,3}L_3, \quad [L_2, L_4] = 2L_6 - \frac{1}{2}\wp_{1,1,1}L_3 - \frac{8}{5}\lambda_4L_2 + \frac{1}{2}\wp_{1,1,3}L_1 + \frac{8}{5}\lambda_6L_0,$$

$$[L_2, L_3] = -(\wp_{1,3} - \frac{4}{5}\lambda_4)L_1, \quad [L_2, L_6] = -\frac{4}{5}\lambda_4L_4 - \frac{1}{2}\wp_{1,1,3}L_3 + \frac{1}{2}\wp_{1,3,3}L_1 + \frac{4}{5}\lambda_8L_0,$$

$$[L_3, L_4] = (\wp_{1,3} + \lambda_4)L_3 + (\wp_{3,3} - \frac{6}{5}\lambda_6)L_1, \quad [L_3, L_6] = \wp_{3,3}L_3 - \frac{3}{5}\lambda_8L_1,$$

$$[L_4, L_6] = 2\lambda_4L_6 - \frac{6}{5}\lambda_6L_4 - \frac{1}{2}\wp_{1,3,3}L_3 + \frac{6}{5}\lambda_8L_2 + \frac{1}{2}\wp_{3,3,3}L_1 - 2\lambda_{10}L_0.$$

Выпишем формулы, задающие действие операторов L_j на F . Действие на координатные функции базы определяется с помощью соотношения $(L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_6)\lambda = (\ell_0, 0, \ell_2, 0, \ell_4, \ell_6)\lambda$. Согласно пп. (2) и (3) из разд. 1.1, достаточно

выписать формулы для $L_j \wp_{1,1}$:

$$\begin{aligned} L_0 \wp_{1,1} &= 2\wp_{1,1}, & L_1 \wp_{1,1} &= \wp_{1,1,1}, & L_2 \wp_{1,1} &= \frac{1}{2}\wp_{1,1,1,1} - \wp_{1,1}^2 + \wp_{1,3} + \frac{3}{5}\lambda_4, \\ L_3 \wp_{1,1} &= \wp_{1,1,3}, & L_4 \wp_{1,1} &= \wp_{1,1,1,3} - 2\wp_{1,1}\wp_{1,3} + \frac{2}{5}\lambda_6, \\ L_6 \wp_{1,1} &= \frac{1}{2}\wp_{1,1,3,3} - \wp_{1,3}^2 + \frac{1}{5}\lambda_8. \end{aligned}$$

Замечание 16. Все кривые рода 2 гиперэллиптические. Универсальные расслоения якобианов гиперэллиптических кривых рода g рациональны. Этот факт был открыт Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в работе [11]. Слой универсального расслоения в [11] рассматривается как поверхность уровня интегралов движения g -го стационарного потока системы Кортевега–де Фриза, т. е. задается системой $2g$ алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^{3g}$, степень которых растет с ростом рода. В работах [4], [5] предложены координаты, в которых слой задается системой $2g$ уравнений степени не выше 3.

Для универсального пространства кривых рода 1 координаты Дубровина–Новикова и координаты из [4], [5] совпадают. А именно, в $\mathbb{C}^3$ с координатами (x_2, x_3, x_4) , $\deg x_i = i$, слой над точкой $b = (g_2, g_3) \in B$, см. разд. 1.2, задается уравнениями $g_2 = 12x_2^2 - 2x_4$, $g_3 = -8x_2^3 + 2x_4x_2 - x_3^2$ и параметризуется эллиптическими функциями $(x_2, x_3, x_4) = (\wp(u, b), \wp'(u, b), \wp''(u, b))$, где u пробегает якобиан J_b — слой расслоения $U \rightarrow B$, см. разд. 1.1. Далее, в этих координатах $\Delta = -432x_2^3x_3^2 - 27x_4^3 + 108x_2x_3^2x_4 + 36x_2^2x_4^2 - 8x_4^3$, а дифференцирования L_0, L_1 и L_2 поля F представляются векторными полями с полиномиальными коэффициентами

$$\begin{aligned} L_0 &= 2x_2\partial_{x_2} + 3x_3\partial_{x_3} + 4x_4\partial_{x_4}, & L_1 &= x_3\partial_{x_2} + x_4\partial_{x_3} + 12x_2x_3\partial_{x_4}, \\ L_2 &= \frac{2}{3}(x_4 - 3x_2^2)\partial_{x_2} + 3x_2x_3\partial_{x_3} + (3x_3^2 + 2x_2x_4)\partial_{x_4} \end{aligned}$$

касательными к множеству нулей функции Δ .

Для универсального пространства кривых рода 2, согласно [4], [5], в $\mathbb{C}^6$ с координатами $(x_2, x_3, x_4, z_4, z_5, z_6)$, $\deg x_i = i$ и $\deg z_j = j$, слой над точкой $b = (\lambda_4, \lambda_6, \lambda_8, \lambda_{10}) \in B$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} 6x_2^2 - x_4 + 4z_4 + 2\lambda_4 &= 0, & 8x_2^3 - 2x_2(x_4 + 4z_4) + x_3^2 + 2z_6 - 4\lambda_6 &= 0, \\ 8x_2^2z_4 - x_2z_6 + 2z_4^2 - x_4z_4 + x_3z_5 - 2\lambda_8 &= 0, & 8x_2z_4^2 - 2z_4z_6 + z_5^2 - 4\lambda_{10} &= 0 \end{aligned}$$

и параметризуется гиперэллиптическими абелевыми функциями

$$(x_1, x_2, x_4) = (1, L_1, L_1^2)_{\wp_{1,1}}(u, b), \quad (z_4, z_5, z_6) = (1, L_1, L_1^2)_{\wp_{1,3}}(u, b),$$

где $u = (u_1, u_3)$ пробегает якобиан J_b — слой расслоения $U \rightarrow B$. Отметим, что найденные выше дифференцирования поля F , как и в случае эллиптических функций, переходят в векторные поля с полиномиальными коэффициентами, касающиеся «дискриминанта». Возникающие таким образом алгебраические динамические системы будут описаны в наших ближайших публикациях.

Координаты Дубровина–Новикова $(U_2, U_3, \dots, U_7)$, где $\deg U_i = i$, выражаются через координаты $(x_2, x_3, x_4, z_4, z_5, z_6)$ по формулам

$$\begin{aligned} U_2 &= x_2, & U_3 &= x_3, & U_4 &= x_4, & U_5 &= 4(3x_2x_3 + z_5), \\ U_6 &= 4(3x_3^2 + 3x_2x_4 + z_6), & U_7 &= 4(36x_3x_2^2 + 20x_2z_5 + 9x_3x_4 + 4x_3z_4). \end{aligned}$$

Этим координатам соответствует следующая параметризация слоя над точкой $b \in B$:

$$(U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7) = (1, L_1, L_1^2, L_1^3, L_1^4, L_1^5)_{\wp_{1,1}}(u, b).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, ФАЗИС, Москва, 1996.
- [2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, МЦНМО, М., 2004.
- [3] Г. Бейкер, *Абелевы функции*, МЦНМО, М., 2008.
- [4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, *Hyperelliptic Kleinian functions and applications*, in: Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroad, Adv. Math. Sci., Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–34.
- [5] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Rev. Math. Math. Phys., **10**:2 (1997), 3–120.
- [6] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, *Рациональные аналоги абелевых функций*, Функц. анализ и его прил., **33**:2 (1999), 1–15.
- [7] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Полиномиальные алгебры Ли*, Функц. анализ и его прил., **36**:4 (2002), 18–34.
- [8] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Уравнения теплопроводности в неголономном репере*, Функц. анализ и его прил., **38**:2 (2004), 12–27.
- [9] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Дифференцирование абелевых функций по параметрам*, УМН, **62**:4 (2007), 153–154.
- [10] В. А. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, in: Lecture Notes in Math., vol. 1620, 1994, 120–348.
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией*, Докл. АН СССР, **219**:3 (1974), 531–534.
- [12] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., **92** (1882), 311–337.
- [13] А. Б. Гивенталь, *Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанным с простыми особенностями функций*, Функц. анализ и его прил., **14**:2 (1980), 4–14.
- [14] K. Weierstrass, *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, in: Mathematische Werke, Bd. 2, Teubner, Berlin, 1894, 245–255.
- [15] K. Weierstrass, *Abelschen Functionen*, Gesammelte Werke, Bd. 4, 1904.
- [16] В. М. Закалюкин, *Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра*, Функц. анализ и его прил., **10**:2 (1976), 69–70.

Математический институт им. В. А. Стеклова
e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Институт магнетизма, Киев, Украина
e-mail: dile@imag.kiev.ua

Поступило в редакцию
3 сентября 2008 г.