Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Дискретная серия представлений для модулярного дубля квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 98–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:37:21

УДК 517.98+512.54

Дискретная серия представлений для модулярного дубля квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$

© 2008. Л. Д. Фаддеев*

Дорогому Израилу Моисеевичу Гельфанду

§ 1. Введение

Модулярный дубль квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ — это, грубо говоря, тензорное произведение двух квантовых групп с параметрами деформации $q = e^{i\pi\tau}$ и $\tilde{q} = e^{i\pi/\tau}$. Этот объект, предложенный мной в [1], был открыт в результате поиска регуляризации универсальной R -матрицы для корней из 1. Его значение для конформной теории поля, в особенности с некомпактными полевыми переменными (например, модели Лиувилля), довольно очевидно. В серии работ [2]–[5] использовалась непрерывная серия унитарных представлений модулярного дубля некомпактной вещественной формы $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, параметризованная положительным числом — спином. Было показано, что эти представления не разлагаются в тензорные произведения дуальных факторов.

Представления были построены для двух интервалов параметра деформации:

режим I: $\tau > 0$, $|q| = |\tilde{q}| = 1$;

режим II: $|\tau| = 1$, $\bar{q} = \tilde{q}$.

В этой работе мы предъядвим еще одну серию представлений, которая существует только для режима II. Эта серия параметризуется двумя целыми числами $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, \dots, n$.

Во втором параграфе мы напоминаем известные результаты, упомянутые выше, а в третьем описываем новые представления.

Я благодарен П. П. Кулишу и М. А. Семенову-Тянь-Шанскому за важные замечания.

§ 2. Разминка — непрерывная серия

Набор генераторов модулярного дубля для $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ состоит из двух троек E , F , K и $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{K}$, удовлетворяющих соотношениям

$$KE = q^2 EK, \quad (1)$$

$$KF = q^{-2} FK, \quad (2)$$

$$EF - FE = \frac{1}{q - q^{-1}}(K - K^{-1}) \quad (3)$$

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00638 и программой «Математические проблемы нелинейной динамики» Президиума РАН.

с комплексным параметром $q = e^{i\pi\tau}$ и аналогичным соотношениям для $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{K}$ с параметром $\tilde{q} = e^{i\pi/\tau}$.

Отметим, что мы используем дуальный параметр $1/\tau$ вместо более традиционного $-1/\tau$. Эта подмена не принципиальна и обусловлена только соображениями удобства.

Генераторы E , F , K коммутируют с генераторами $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{K}$. Мы будем использовать выражение для этих генераторов через более простые переменные — по аналогии с переменными Гельфанда–Кириллова для некомпактной универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$. Пусть u , v — пара Вейля с соотношением $uv = q^2vu$ и Z — центральный элемент. Тогда

$$E = i \frac{v + u^{-1}Z}{q - q^{-1}}, \quad F = i \frac{u + v^{-1}Z^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad K = q^{-1}uv$$

удовлетворяют соотношениям (1)–(3). Традиционный центральный элемент

$$C = qK + q^{-1}K^{-1} + (q - q^{-1})^2 FE$$

выражается через Z следующим образом:

$$C = -(Z + Z^{-1}).$$

В [3]–[5] использовалась аналогичная и эквивалентная параметризация.

Дуальные генераторы выражаются аналогичным образом через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{Z}$, где

$$\tilde{u} = u^{1/\tau}, \quad \tilde{v} = v^{1/\tau}, \quad \tilde{Z} = Z^{1/\tau}.$$

Тот факт, что E , F , K коммутируют с $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{K}$, обеспечивается формулой Эйлера $e^{2\pi i} = 1$. Представления [3], [4] реализованы в $L_2(\mathbb{R})$, где пара Вейля действует как умножение и сдвиг. Нам удобно использовать вейерштрассовы параметры ω , ω' вместо τ ,

$$\omega\omega' = -\frac{1}{4}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega};$$

переход к дуальному параметру $1/\tau$ соответствует перестановке ω и ω' .

Операторы u , v действуют на элемент $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, из $L_2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$uf(x) = e^{-i\pi x/\omega} f(x), \quad (4)$$

$$vf(x) = f(x + 2\omega'). \quad (5)$$

Сдвиг $x \mapsto x + 2\omega'$ уводит нас с вещественной оси, и функция $e^{-i\pi x/\omega}$ неограничена при вещественных x ; таким образом, мы должны указать область определения для u и v . Будем считать, что плотная область определения состоит из целых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{C}$, быстро убывающих вдоль контуров, параллельных вещественной оси. Эта область содержит функции вида $f(x) = e^{-x^2} P(x)$, где $P(x)$ — полином.

При таком соглашении легко сосчитать оператор, сопряженный с v по отношению к обычному скалярному произведению в $L_2(\mathbb{R})$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(f, vg) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x + 2\omega') dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) g(x + 2\omega') dx \\ &= \int_{-\infty + 2\omega'}^{\infty + 2\omega'} \bar{f}(x - 2\omega') g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x - 2\omega')} g(x) dx = (v^* f, g),\end{aligned}$$

где $v^* f(x) = \bar{f}(x - 2\omega')$. В этой выкладке мы обозначили через $\bar{f}(x)$ аналитическую функцию от x , коэффициенты которой при разложении по степеням x комплексно сопряжены коэффициентам для f .

Мы можем теперь ввести вещественную форму для нашей алгебры. Для этого есть две возможности выбора τ , которые мы назовем режимом I и режимом II.

Режим I: τ — положительное число, ω и ω' чисто мнимые,

$$\bar{\omega} = -\omega, \quad \bar{\omega}' = -\omega'.$$

Операторы u , v и $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ эрмитовы и положительно определенные,

$$u^* = u, \quad v^* = v, \quad \tilde{u}^* = \tilde{u}, \quad \tilde{v}^* = \tilde{v}.$$

Это же верно и для E , F , K и $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{K}$, если Z эрмитов. В неприводимом представлении Z и $\tilde{Z}$ являются вещественными числами. Мы задаем их как

$$Z = e^{i\pi a/\omega}, \quad \tilde{Z} = e^{i\pi a/\omega'}, \quad (7)$$

где a — вещественный параметр — спин. В [3]–[5] приведены все необходимые математические детали.

Режим II: $|\tau| = 1$,

$$\bar{\omega} = -\omega'.$$

Операторы u , v эрмитово сопряжены к $\tilde{u}$, $\tilde{v}$,

$$u^* = \tilde{u}, \quad v^* = \tilde{v},$$

и то же верно для чисел Z и $\tilde{Z}$, если мы используем параметризацию (7) с вещественным a .

Заметим, что третий параметр Вейерштрасса

$$\omega'' = \omega + \omega'$$

является чисто мнимым в обоих режимах.

На этом мы закончим напоминание известных вещей. Ясно, что скалярное произведение (6) использовано исчерпывающим образом. В следующем параграфе мы рассмотрим другую возможность.

§3. Дискретная серия

Мы будем использовать другое скалярное произведение для функций f , на которые действуют вейлевские операторы. Теперь это аналитические функции $f(z)$ и действие операторов u , v , $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ такое же, как в (4), (5), с заменой $x \mapsto z$. Скалярное произведение дается формулой

$$\langle f, g \rangle = \int_D \overline{f(z)} S(\bar{z}, z) g(z) \frac{dz d\bar{z}}{2\pi i}, \quad (8)$$

где интегрирование ведется по некоторой области D на комплексной плоскости. Ядро $S(\bar{z}, z)$ должно быть положительным.

Мы найдем такое ядро и, тем самым, представление в режиме II для дискретных значений спина a , а именно $a = -n\omega''$, где n — положительное число. Такой спин — чисто мнимое число, и условие вещественности представления, в частности, требует соотношения

$$\tilde{Z} = Z^{-1}.$$

Начнем с соотношения

$$\tilde{K}^* = K.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{K}f, g \rangle &= \int \overline{\tilde{q}^{-1}e^{-i\pi z/\omega'}f(z+2\omega)}S(\bar{z}, z)g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q \int \bar{f}(\bar{z}-2\omega')S(\bar{z}, z)e^{-i\pi\bar{z}/\omega}g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q^{-1} \int \overline{f(z)}S(\bar{z}+2\omega', z)e^{-i\pi\bar{z}/\omega}g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle f, Kg \rangle &= \int \overline{f(z)}S(\bar{z}, z)q^{-1}e^{-i\pi z/\omega}g(z+2\omega')\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q \int \overline{f(z)}S(\bar{z}, z-2\omega')e^{-i\pi z/\omega}g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$qS(\bar{z}, z-2\omega')e^{-i\pi z/\omega} = q^{-1}S(\bar{z}+2\omega', z)e^{-i\pi\bar{z}/\omega},$$

которое удовлетворяется, если $S(\bar{z}, z)$ представляется в виде

$$S(\bar{z}, z) = \exp i\pi(z^2 - \bar{z}^2)\Phi(\bar{z} - z). \quad (9)$$

Обратимся теперь к условию $E^* = \tilde{E}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \langle f, Eg \rangle &= \frac{i}{q-q^{-1}} \int \overline{f(z)}S(\bar{z}, z)(g(z+2\omega') + Ze^{i\pi z/\omega}g(z))\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= \frac{i}{q-q^{-1}} \int \overline{f(z)}(S(\bar{z}, z-2\omega') + ZS(\bar{z}, z)e^{i\pi z/\omega})g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (\tilde{E}f, g) &= \int \frac{i}{\tilde{q}-\tilde{q}^{-1}} \overline{(f(z+2\omega) + Ze^{i\pi z/\omega'}f(z))}S(\bar{z}, z)g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= \frac{i}{q-q^{-1}} \int \overline{f(z)}(S(\bar{z}+2\omega', z) + \tilde{Z}S(\bar{z}, z)e^{i\pi\bar{z}/\omega})g(z)\frac{dz d\bar{z}}{2\pi i}, \end{aligned}$$

что приводит к уравнению

$$S(\bar{z}, z-2\omega') + Ze^{i\pi z/\omega}S(\bar{z}, z) = S(\bar{z}+2\omega', z) + Z^{-1}e^{i\pi\bar{z}/\omega}S(\bar{z}, z).$$

Используя (9), приходим к уравнению для $\Phi(t)$, $t = \bar{z} - z$,

$$(q^{-1}e^{-i\pi t/\omega} - q)\Phi(t+2\omega') = (Z^{-1} - Ze^{-i\pi t/\omega})\Phi(t).$$

Подставляя $Z = e^{-i\pi a/\omega}$ (замена знака будет полезна ниже) и замечая, что $q = e^{i\pi\omega'/\omega} = -e^{i\pi\omega''/\omega}$, мы можем переписать последнее уравнение в виде

$$\frac{\Phi(t + 2\omega')}{\Phi(t)} = \frac{\sin \pi \frac{t+2a}{2\omega}}{\sin \pi \frac{t+2\omega''}{2\omega}}. \quad (10)$$

Условие

$$(\tilde{F}f, g) = (f, Fg)$$

приводит к такому же уравнению. Условия

$$(Ef, g) = (f, \tilde{E}g), \quad (Ff, g) = (f, \tilde{F}g)$$

приводят к аналогичному уравнению с перестановкой ω и ω' :

$$\frac{\Phi(t + 2\omega)}{\Phi(t)} = \frac{\sin \pi \frac{t+2a}{2\omega'}}{\sin \pi \frac{t+2\omega''}{2\omega'}}. \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) фиксируют $\Phi(t)$ однозначно с точностью до постоянного множителя.

Мы будем искать решение $\Phi(t)$, положительное при мнимом t . Легко проверить, что для дискретных значений спина a ,

$$a = n\omega'', \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

таковы решения $\Phi(t) = 1$ при $n = 1$ и

$$\Phi(t) = \prod_{m=1}^{n-1} \sin \pi \frac{t + 2m\omega''}{2\omega'} \sin \pi \frac{t + 2m\omega''}{2\omega}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (13)$$

Для мнимых t это выражение может быть переписано как

$$\Phi(t) = \prod_{m=1}^{n-1} \left| \sin \pi \frac{t + 2m\omega''}{2\omega'} \right|^2$$

и, таким образом, явно неотрицательно.

Линии нулей функции Φ

$$t = -2m\omega''$$

делят всю комплексную плоскость на n частей: две полуплоскости $y < \mu$ и $y > \mu n$ и $n - 2$ полос конечной ширины

$$\mu m < y < \mu(m + 1), \quad m = 1, \dots, n - 2,$$

где

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \mu = \frac{\omega''}{i}.$$

Каждую из этих частей мы возьмем в качестве области интегрирования в (8). Следует думать, что соответствующие представления неэквивалентны. Если это так, то мы имеем серию представлений, параметризованных дискретным спином из (12) и дополнительным числом $m = 1, \dots, n - 1$. Оставляем это утверждение в виде гипотезы.

Для общего значения мнимого спина a решение уравнений (10) и (11) можно выразить через «некомпактный квантовый дилогарифм», ясно описанный в [7] и уже зарекомендовавший себя как важнейший объект конформной теории

поля и квантовой теории Тейхмюллера [8], [9]. Эта функция $\gamma(\zeta)$ определяется дуальными функциональными уравнениями

$$\frac{\gamma(\zeta + \omega')}{\gamma(\zeta - \omega')} = 1 + e^{-i\pi\zeta/\omega}, \quad (14)$$

$$\frac{\gamma(\zeta + \omega)}{\gamma(\zeta - \omega)} = 1 + e^{-i\pi\zeta/\omega'}. \quad (15)$$

Решение $\Phi(t)$ может быть явно записано как

$$\Phi(t) = e^{2\pi i(a+\omega'')} \frac{\gamma(t - \omega'' + 2a)}{\gamma(t + \omega'')}. \quad (16)$$

При $a = n\omega''$ (16) сводится к (13) при помощи соотношения

$$\frac{\gamma(\zeta + \omega'')}{\gamma(\zeta - \omega'')} = -4e^{2\pi i\zeta\omega''} \sin \frac{\pi\zeta}{2\omega'} \sin \frac{\pi\zeta}{2\omega},$$

которое следует из (14), (15). Я считаю, что (16) имеет положительные значения при мнимых t только при $a = n\omega''$.

Стоит заметить связь параметров n и m с нулями функции $\gamma(z)$ на верхней полуплоскости, которые даются формулой

$$z_{p,q} = \omega'' + 2p\omega + 2q\omega',$$

где p, q — целые неотрицательные числа. Ясно, что на каждом уровне $\text{Im } z = n\omega''$ мы имеем n нулей в полном соответствии с числом представлений. Это заставляет нас думать о деформированной формуле Планшереля. Мы оставляем это для дальнейшей работы.

§4. Заключение

Представления, найденные здесь, имеют смысл только в режиме II. Действительно, если мы повторим вычисление для режима I, то получим то же уравнение для $\Phi(t)$, однако аргументы синусов станут вещественными при мнимом t и $\Phi(t)$ будет иметь бесконечное число нулей.

Я считаю, что режим II интереснее, чем режим I, как математически, так и в физических приложениях. Действительно, в режиме II числа ω, ω' образуют решетку в $\mathbb{C}$, в то время как в режиме I они вырожденно лежат на мнимой оси. В модели Лиувилля центральный заряд алгебры Вирасоро задается формулой

$$C = 1 + 6\left(\tau + \frac{1}{\tau} + 2\right)$$

(см. [9], [10]), так что $c > 25$ в режиме I и $1 < c < 25$ в режиме II. Именно последний интервал интересен для приложения модели Лиувилля к некритической струне Полякова [11]. Найденные здесь представления открывают возможности для поиска квантования квантовой модели Лиувилля, которое отличается от простого продолжения формул, полученных при $c > 25$ [12]. Отметим еще одно обстоятельство. В недеформированном случае дискретную серию имеет только группа $SL(2, \mathbb{R})$, но не ее алгебра Ли. В нашем случае алгебра $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ соответствует деформированной алгебре Ли, которая, таким образом, похожа более на группу Ли, чем на ее инфинитезимальную алгебру.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. D. Faddeev, *Modular double of a quantum group*, in: Math. Phys. Studies, vol. 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 149–156.
- [2] A. G. Bytsko, J. Teschner, *Quantization of models non-compact quantum group symmetry: modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model*, J. Phys. A: Math. Gen., **39**:41 (2006), 12927–12981.
- [3] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **224**:3 (2001), 613–655.
- [4] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky, *Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains*, Comm. Math. Phys., **225**:3 (2002), 573–609.
- [5] K. Schmüdgen, *Operator representation of $U_q(\mathfrak{sl}(2))$* , Lett. Math. Phys., **37**:2 (1996), 211–222.
- [6] A. Yu. Volkov, *Noncommutative hypergeometry*, Comm. Math. Phys., **258**:2 (2005), 257–273.
- [7] R. M. Kashaev, *Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys., **43**:2 (1998), 105–115.
- [8] В. В. Фок, Л. О. Чехов, *Квантовые пространства Тейхмюллера*, ТМФ, **120**:3 (1999), 511–528.
- [9] J.-L. Gervais, A. Neveu, *The dual string spectrum in Polyakov’s quantization*, I, Nucl. Phys. B, **199**:1 (1982), 59–76.
- [10] T. L. Curtright, C. B. Thorn, *Conformally invariant quantization of the Liouville theory*, Phys. Rev. Lett., **48**:19 (1982), 1309–1313.
- [11] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B, **103**:3 (1981), 207–210.
- [12] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, Comm. Math. Phys., **177**:2 (1996), 381; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9412229>.

Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
28 мая 2008 г.