Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кириллов, Семейные алгебры и обобщенные экспоненты для поливекторных представлений простых алгебр Ли типа B_n , *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 72–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:12:51

Семейные алгебры и обобщенные экспоненты для поливекторных представлений простых алгебр Ли типа B_n

© 2008. А. А. Кириллов

К 95-летию моего дорогого учителя И. М. Гельфанда

§ 1. Семейные алгебры

1.1. Основные определения и факты. В [5], [6] автор ввел новый тип ассоциативных алгебр, связанных с простыми комплексными алгебрами Ли (или со связными приведенными системами корней). Здесь мы напомним основные свойства этих алгебр.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли с обычным разложением

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Мы используем стандартные обозначения:

P (соответственно Q) — решетка весов (соответственно корневая решетка) в $\mathfrak{h}^*$;

P_+ (соответственно Q_+) — полугруппа, порожденная фундаментальными весами $\omega_1, \dots, \omega_l$ (соответственно простыми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_l$).

Для каждого веса $\lambda \in P_+$ мы обозначаем через (π_λ, V_λ) неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ , а через $d(\lambda)$ — размерность пространства V_λ .

После выбора базиса в V_λ пространство $\text{End } V_\lambda$ отождествляется с $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$ и представление π_λ становится матричнозначной функцией на $\mathfrak{g}$. Пространство матриц $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$ приобретает структуру $\mathfrak{g}$ -модуля:

$$X \cdot M = [\pi_\lambda(X), M], \quad X \in \mathfrak{g}, \quad M \in \text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C}). \quad (1)$$

Напомним, что симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g})$ и универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ тоже имеют (изоморфные) структуры $\mathfrak{g}$ -модуля, которые продолжают присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть G — связная и односвязная комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Она действует на всех $\mathfrak{g}$ -модулях, описанных выше. Ассоциативные алгебры, введенные в [5], [6], — это два типа *семейных алгебр*:

Определение 1. *Классическая семейная алгебра* — это

$$\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g}) := (\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C}) \otimes S(\mathfrak{g}))^G, \quad (2)$$

квантовая семейная алгебра — это

$$\mathcal{Q}_\lambda(\mathfrak{g}) := (\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C}) \otimes U(\mathfrak{g}))^G. \quad (3)$$

Я надеюсь, что изучение этих алгебр окажется полезным в разных вопросах теории представлений полупростых алгебр Ли и их бесконечномерных аналогов.

1.2. Геометрическая интерпретация. Первоначальная идея, приведшая к определению семейных алгебр, состояла в том, чтобы выделить из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ одну или несколько изотипических компонент, которые бы сами образовывали алгебру (как, например, центр $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$). Нетрудно проверить, что в построении алгебр (2), (3) действительно участвует лишь конечное число изотипических компонент алгебр $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$, а именно те, которые соответствуют детям данного представления π_λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (определение детей см. ниже).

Элемент $F \in \mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как G -эквивариантное полиномиальное отображение из $\mathfrak{g}^*$ в $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C}) \simeq \text{End } V_\lambda$. В самом деле, алгебра $S(\mathfrak{g})$ естественно изоморфна алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$, так что F — полиномиальная матричная функция на $\mathfrak{g}^*$. Из (2) вытекает, что эта функция эквивариантна, т. е.

$$F(\text{Ad } g X) = \pi(g)F(X)\pi(g)^{-1}, \quad g \in G, X \in \mathfrak{g}. \quad (4)$$

Аналогичная интерпретация элементов квантовой семейной алгебры становится возможной, если мы будем рассматривать $U(\mathfrak{g})$ как алгебру полиномиальных функций на некотором квантовом многообразии $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ с некоммутативной алгеброй функций.

1.3. Элементы типа M . Существует простой и красивый способ явного построения некоторых элементов семейных алгебр. Первый пример такого рода был давно известен специалистам по теории представлений и математической физике¹⁾.

Пример 1. Пусть $\{X_i\}$ и $\{X^i\}$ — два дуальных базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ по отношению к какой-нибудь $(\text{Ad } G)$ -инвариантной невырожденной билинейной форме. Тогда матрица

$$M = \pi(X^i) \otimes X_i \quad (\text{суммирование по индексу } i \text{ подразумевается}) \quad (5)$$

принадлежит $\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$ (соответственно $\mathcal{Q}_\lambda(\mathfrak{g})$), если мы рассматриваем X_i как элементы алгебры $S(\mathfrak{g})$ (соответственно $U(\mathfrak{g})$).

Более общий факт был отмечен в [6]:

Лемма 1. Пусть P есть G -инвариантный полином на $\mathfrak{g}^*$. Выберем ортонормированный базис $\{X_i\}$ в $\mathfrak{g}$ и будем рассматривать X_i как координаты на $\mathfrak{g}^*$. Пусть ∂^i означает частную производную $\partial/\partial X_i$. Тогда отображение

$$M_P(X) = \pi(X^i) \otimes (\partial_i P)(X) \quad (6)$$

G -эквивариантно. Более того, оно является элементом центра алгебры $\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$.

Предыдущий пример является частным случаем, когда $P = \frac{1}{2}(X_i)^2$.

Эта удобная конструкция не переносится буквально на квантовые семейные алгебры, но взамен можно предложить другую конструкцию. Воспользуемся тем, что $U(\mathfrak{g})$ — алгебра Хопфа, т. е. обладает гомоморфизмом коумножения

$$\Delta: U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g} \ni X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X. \quad (7)$$

Используя Δ , мы можем определить гомоморфизм

$$\varphi = (\pi \otimes \text{Id}) \circ \Delta: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C}) \otimes U(\mathfrak{g}). \quad (8)$$

¹⁾Этот пример был одной из мотиваций введения семейных алгебр.

Поскольку это отображение, очевидно, G -эквивариантно, мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Образ центра $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ относительно φ содержится в квантовой семейной алгебре $\mathcal{Q}_\lambda(\mathfrak{g})$.*

Пример 2. Для элемента $A = \frac{1}{2}X^i X_i \in Z(\mathfrak{g})$ мы получаем $\varphi(A) = \pi(A) \otimes 1 + M_A + 1 \otimes A$.

Элементы, полученные описанными двумя конструкциями, мы называем элементами типа M . Они принадлежат центру семейной алгебры и в «хороших» случаях порождают всю эту алгебру.

1.4. Дети неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим подробнее $\mathfrak{g}$ -модуль $V_\lambda \otimes V_\lambda^* \simeq \text{End } V_\lambda \simeq \text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$. Разложим пространство $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$ на неприводимые относительно действия $\mathfrak{g}$ подпространства $W_1, \dots, W_r$. Обозначим старшие веса этих компонент через $\mu_1, \dots, \mu_r$. Заметим, что вес μ и дуальный вес μ^* входят в этот список с одинаковыми кратностями, поскольку представление $\pi_\lambda \otimes \pi_\lambda^*$ самодвойственно. В дальнейшем нам будет удобно считать, что в пространстве W_k действует представление $\pi_{\mu_k^*}$.

Мы называем представления π_{μ_i} *детьми* представления π_λ . Если некоторый старший вес встречается несколько раз, мы говорим, что имеются *близнецы*.

Заметим также, что если $\lambda = \lambda^*$, то пространство $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$ можно разложить $\mathfrak{g}$ -инвариантным образом в сумму двух подпространств. А именно, если π_λ ортогонально, то инвариантные подпространства суть подпространства симметрических и кососимметрических матриц. Если же π_λ симплектично относительно кососимметрической формы с матрицей J , то инвариантные подпространства суть подпространства J -симметрических и J -кососимметрических матриц. Поэтому множество детей можно разделить на две части: сыновья заполняют пространство (J) -симметрических матриц, а дочери — пространство (J) -кососимметрических матриц. Из самодвойственности каждой части вытекает, что каждому ребенку μ соответствует двойственный ребенок μ^* того же пола (который может и совпадать с μ).

1.5. Представления с простым спектром. Предположим, что все веса представления π_λ простые. Тогда образ картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в $\text{Mat}_{d(\lambda)}(\mathbb{C})$ содержит матрицу D с различными собственными значениями. Выбирая весовой базис в V_λ , мы можем считать эту матрицу диагональной. Поэтому для каждого отображения $F \in \mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$ значения его ограничения на $\mathfrak{h}$ перестановочны с D и, следовательно, диагональны. Мы видим, что коммутатор двух элементов классической семейной алгебры обращается в нуль на (любой) картановской подалгебре $\mathfrak{h}$. Тогда он равен нулю на всех полупростых элементах из $\mathfrak{g}$ и, значит, везде. Таким образом (см. [6], где получен более общий результат), справедлива

Теорема 2. *Если представление (π_λ, V_λ) имеет простой спектр, то алгебра $\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$ коммутативна и порождается элементом (5).*

Для квантовых алгебр $\mathcal{Q}_\lambda(\mathfrak{g})$ это также верно, поскольку они являются полупростыми деформациями классических алгебр.

§2. Семейные алгебры и обобщенные экспоненты

Строение $S(\mathfrak{g})$ как $\mathfrak{g}$ -модуля описывается известной теоремой Б. Костанта:

$$S(\mathfrak{g}) \simeq I(\mathfrak{g}) \otimes H(\mathfrak{g}), \quad (9)$$

где $I(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ — алгебра G -инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, а $H(\mathfrak{g})$ — пространство гармонических полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$, отождествляемое с алгеброй полиномиальных функций $\mathbb{C}[N]$ на нильпотентном конусе $N \subset \mathfrak{g}$. Таким образом, изотипическая компонента $S_\mu(\mathfrak{g})$ имеет вид $I(\mathfrak{g}) \otimes H_\mu(\mathfrak{g})$, т. е. является свободным модулем над $I(\mathfrak{g})$.

Пространство $H_\mu(\mathfrak{g})$ конечномерно, и кратность представления π_μ в нем равна кратности нулевого веса в представлении (π_μ, V_μ) .

Поскольку $H_\mu(\mathfrak{g})$ наследует из $\mathbb{C}[N]$ градуировку степенями полиномов, $H_\mu(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s \geq 0} H_\mu^s(\mathfrak{g})$, мы можем рассматривать кратность E_μ представления π_μ в $H_\mu(\mathfrak{g})$ не как число, а как полином от q с целыми неотрицательными коэффициентами,

$$E_\mu := \sum_{k=1}^m q^{e_k(\mu)} = \sum_i s_i q^i. \quad (10)$$

Числа $e_1(\mu) \geq \dots \geq e_m(\mu)$ называются *обобщенными экспонентами* представления π_μ . Ясно, что двойственные представления имеют один и тот же набор экспонент.

Пространство $H_\mu^i(\mathfrak{g})$ разлагается (неоднозначно) в сумму s_i неприводимых подпространств $H_{\mu,k}$, для которых $e_k = i$, так что $H_\mu = \bigoplus_{k=1}^m H_{\mu,k}$.

К сожалению, вычисление кратности веса и его q -аналога остается одной из вечных задач теории представлений, для решения которой есть красивая формула, но нет простого общего алгоритма.

В случае присоединенного представления $(\text{Ad}, \mathfrak{g}) = (\pi_\theta, V_\theta)$ обобщенные экспоненты совпадают с обычными экспонентами группы Вейля (или системы корней). Их число равно рангу алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и есть несколько простых алгоритмов их вычисления.

Пользуясь введенными понятиями, мы можем дать явное описание классической семейной алгебры $\mathcal{C}_{\pi_\lambda}(\mathfrak{g})$ в терминах детей π_λ и их обобщенных экспонент. Для этого заметим, что пространство

$$(W_k^* \otimes H_{\mu,p}^i)^G \simeq \text{Hom}_G(W_k, H_{\mu,p}^i) \simeq \text{Hom}_G(W_k, V_\mu)$$

одномерно по лемме Шура. Выберем в нем базисный вектор $\alpha_{i,\mu,p}$.

В результате мы получаем

$$\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{g}) \otimes \left(\sum_k W_k \otimes \sum_{i,\mu,p} H_{\mu,p}^i \right)^G = \bigoplus_{i,\mu,p} I(\mathfrak{g}) \alpha_{i,\mu,p}. \quad (11)$$

Если, кроме того, известно, что π_λ — представление с простым спектром (как это имеет место для спинорных представлений ниже), мы получаем следующий результат:

Теорема 3. Семейная алгебра $\mathcal{C}_\lambda(\mathfrak{g})$ для представления π_λ с простым спектром является коммутативной алгеброй и свободным модулем ранга $d(\lambda)$ над $I(\mathfrak{g})$.

§ 3. Представления алгебры Ли B_n

3.1. Алгебра нечетных дифференциальных операторов. Пусть $\xi^1, \dots, \xi^n$ — нечетные переменные, удовлетворяющие антикоммутиационным соотношениям

$$\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i = 0 \quad \text{для всех } i, j. \quad (12)$$

Обозначим через $\text{Gras}_n := \mathbb{C}\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ комплексную ассоциативную алгебру с единицей, порожденную этими переменными. Ясно, что $\dim \text{Gras}_n = 2^n$. Мы обозначим через ∂_i , $1 \leq i \leq n$, нечетные дифференцирования алгебры Gras_n , действующие на образующие ξ^j по формуле

$$\partial_i \xi^j = \delta_i^j. \quad (13)$$

Ассоциативную алгебру операторов на пространстве Gras_n , порожденную умножениями на ξ^j и дифференцированиями ∂_i , обозначим через W_n и назовем ее элементы нечетными дифференциальными операторами.

Лемма 2. *Алгебра W_n изоморфна полной матричной алгебре $\text{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Мы покажем, что алгебра W_n действует на пространстве Gras_n неприводимо и, следовательно, совпадает с алгеброй всех линейных операторов. Для этого достаточно показать, что для любых двух элементов P, Q из Gras_n найдется оператор $A \in W_n$, такой, что $AP = Q$. В самом деле, пусть $P = \sum_I c_I \xi^I$, где I пробегает все упорядоченные по возрастанию подмножества в $\{1, \dots, n\}$, $\xi^I = \xi^{i_1} \cdots \xi^{i_k}$, а c_I — произвольные комплексные коэффициенты. Выберем одно из J максимальной мощности среди тех, для которых $c_J \neq 0$. Тогда оператор $\partial_J = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m}$ переводит P в ненулевую константу c_J . Теперь достаточно положить $A = c_J^{-1} Q \partial_J$. $\square$

Как и всякая ассоциативная алгебра, W_n является алгеброй Ли относительно операции коммутирования. В этом ее качестве мы обозначаем ее через $\text{Lie}(W_n)$. Обозначим через L_n подалгебру Ли в $\text{Lie}(W_n)$, порожденную умножениями на ξ^j и дифференцированиями ∂_i . Нетрудно проверить, что следующие $2n^2 + n$ элементов образуют базис в L_n :

$$\xi^i, \quad \partial_j, \quad a_j^i := \frac{1}{2}[\xi^i, \partial_j], \quad b^{i,j} := \frac{1}{2}[\xi^i, \xi^j], \quad c_{i,j} := \frac{1}{2}[\partial_i, \partial_j],$$

где i, j пробегают значения от 1 до n , а в двух последних выражениях подразумевается, что $i < j$.

Лемма 3. *Алгебра Ли L_n изоморфна $B_n \simeq \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ определяется как совокупность всех антисимметричных комплексных матриц X порядка $2n+1$. Технически удобно рассматривать матрицы, антисимметричные относительно второй диагонали, образующие алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{g}$. Пусть $e_{i,j}$, $-n \leq i, j \leq n$, — стандартные матричные единицы; тогда матрицы $X_{i,j} := e_{i,j} - e_{-j,-i}$ лежат в $\mathfrak{g}$ и удовлетворяют соотношениям

$$X_{i,j} = -X_{-j,-i}.$$

Матрицы $X_{i,j}$, $i+j > 0$, образуют базис в $\mathfrak{g}$.

Искомый изоморфизм между L_n и $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \xi^i \leftrightarrow X_{i,0}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_j \leftrightarrow X_{0,j}, \quad a_j^i \leftrightarrow X_{i,j}, \quad b^{i,j} \leftrightarrow X_{i,-j}, \quad c_{i,j} \leftrightarrow X_{-i,j}, \quad (14)$$

где $1 \leq i, j \leq n$. □

G -инвариантное скалярное произведение в $\mathbf{B}_n$ мы нормализуем так:

$$(A, B) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB). \quad (15)$$

Мы выберем в качестве картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ подалгебру диагональных матриц. Базис в ней составляют матрицы

$$H_k := X_{k,k} = e_{k,k} - e_{-k,-k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые при изоморфизме с L_n переходят в операторы

$$h_k := a_k^k = \frac{1}{2} [\xi^k, \partial_k] = \xi^k \partial_k - \frac{1}{2}.$$

Отметим, что $\{H_1, \dots, H_n\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{h}$.

Весами определяющего представления π_1 алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются 0 и $\pm H_k$, $1 \leq k \leq n$.

Корни алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. ненулевые веса представления π_2 , имеют вид $\pm H_k$ и $\pm H_i \pm H_j$, $i < j$.

Хорошо известно, что все фундаментальные представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, за исключением одного, имеют вид $\pi_k = \wedge^k \pi_1$, $1 \leq k < n$, и старший вес $\omega_k = \sum_{i=1}^k H_i$. Представление $\pi_n = \wedge^n \pi_1$ не является фундаментальным, и его старший вес $\sum_{i=1}^n H_i$ вдвое больше, чем последний фундаментальный вес $\omega_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i$ (см. ниже).

3.2. Спинорное представление σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Построенный выше изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и L_n позволяет определить представление σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве Gras_n , которое называется *спинорным* представлением. Оно неприводимо, поскольку образом алгебры $U(\mathfrak{g})$ служит вся алгебра $W_n = \operatorname{End} V_n$.

Лемма 4. *Веса спинорного представления имеют вид*

$$\frac{\pm H_1 \pm \dots \pm H_n}{2} \quad \text{с любым выбором знаков.} \quad (16)$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением $h_j \xi^i = (\delta_j^i - \frac{1}{2}) \xi^i$. По правилу Лейбница (точнее, по его нечетному аналогу)

$$h_j \xi^I = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi^I, & \text{если } j \in I, \\ -\frac{1}{2} \xi^I, & \text{если } j \notin I, \end{cases}$$

откуда и вытекает требуемая формула. □

Мы видим также, что старший вес представления σ совпадает с ω_n и поэтому σ является последним фундаментальным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Заметим, что все 2^n весов представления σ различны, так что теорема 3 применима к семейной алгебре $\mathcal{C}_{\omega_n}(\mathfrak{g})$, которая, следовательно, является свободной коммутативной алгеброй над $I(\mathfrak{g})$ ранга 2^n .

3.3. Дети спинорного представления алгебры Ли $\mathbf{B}_n$. Мы начнем с замечания, что спинорное представление σ самодвойственно, поскольку на пространстве Gras_n существует $\mathfrak{g}$ -инвариантное скалярное произведение. Его

можно задать с помощью так называемого интеграла Березина от полинома от антикоммутирующих переменных. По определению *интеграл Березина* от полинома $P = \sum_I c_I \xi^I$ равен старшему коэффициенту $c_{\{1, \dots, n\}}$:

$$\int_{\text{Ber}} P = c_{\{1, \dots, n\}}.$$

Определим в Gras_n антиинволюцию $P \mapsto \hat{P}$, которая переводит ξ^i в $-\xi^i$ и соответственно $\xi^{i_1} \xi^{i_2} \dots \xi^{i_k}$ в $(-1)^k \xi^{i_k} \xi^{i_{k-1}} \dots \xi^{i_1}$. Искомое скалярное произведение имеет вид

$$(P, Q) = \int_{\text{Ber}} \hat{P}Q = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \int_{\text{Ber}} PQ, \quad \text{где } k = \deg P. \quad (17)$$

Оно обладает следующим свойством:

$$(P, Q) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (Q, P), \quad (18)$$

так что спинорное представление ортогонально при $n = 0, 3 \pmod{4}$ и симплектично при $n = 1, 2 \pmod{4}$.

Веса представления $\sigma \otimes \sigma^* \simeq \sigma \otimes \sigma$ имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k H_k \quad \text{где } \varepsilon_k = 1, 0, -1.$$

Среди них доминантными являются только $\theta_k = \sum_{i=1}^k H_i$, $0 \leq k \leq n$. Кратность веса θ_k равна 2^{n-k} , поскольку именно столькими способами можно записать θ_k в виде суммы (или разности) двух весов представления σ (см. (16)).

Лемма 5. *Представление π_k со старшим весом θ_k содержит вес θ_l только при $l \leq k$, и соответствующая кратность равна $\binom{n-l}{m}$, где $m = \lfloor \frac{k-l}{2} \rfloor$.*

Доказательство. В самом деле, искомая кратность равна числу способов записать вектор θ_l как сумму k различных весов представления π_1 . Если $k-l = 2m$, то такая запись имеет вид

$$\theta_l = H_1 + \dots + H_l + \sum_{s=1}^m (H_{i_s} + (-H_{i_s})).$$

Если же $k-l = 2m+1$, то она выглядит так:

$$\theta_l = H_1 + \dots + H_l + 0 + \sum_{s=1}^m (H_{i_s} + (-H_{i_s})).$$

В обоих случаях множество $\{i_1, \dots, i_m\}$ пробегает все m -точечные подмножества в $\{l+1, \dots, n\}$. Поэтому искомая кратность равна $\binom{n-l}{m}$. $\square$

Утверждение леммы и еще некоторые простые факты относительно кратностей весов θ_k в разных представлениях удобно записать в виде таблицы (см. табл. 1).

	θ_n	θ_{n-1}	θ_{n-2}	θ_{n-3}	θ_{n-s}	θ_1	θ_0
$S^2(\sigma)$	1	1	2	4	2^{s-1}	2^{n-2}	2^{n-1}
$\wedge^2(\sigma)$	0	1	2	4	2^{s-1}	2^{n-2}	2^{n-1}
π_n	1	1	1	1	1	1	1
π_{n-1}	0	1	2	3	s	$n-1$	n
π_{n-2}	0	0	1	3	$\binom{s}{2}$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n}{2}$
π_{n-3}	0	0	0	1	$\binom{s}{3}$	$\binom{n-1}{3}$	$\binom{n}{3}$
π_{n-t}	0	0	0	0	$\binom{s}{t}$	$\binom{n-1}{t}$	$\binom{n}{t}$
π_1	0	0	0	0	0	1	n
π_0	0	0	0	0	0	0	1

Табл. 1

Анализируя эту таблицу, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 4. *Разложения представлений $\sigma \otimes \sigma$, $S^2\sigma$ и $\wedge^2\sigma$ на неприводимые компоненты имеют следующий вид:*

$$(a) \sigma \otimes \sigma = \bigoplus_{k=0}^n \pi_k;$$

$$(b) S^2(\sigma) = \pi_n \oplus \pi_{n-3} \oplus \pi_{n-4} \oplus \pi_{n-7} \oplus \cdots = \sum_{s \equiv 0, 3 \pmod{4}} \pi_{n-s};$$

$$(c) \wedge^2(\sigma) = \pi_{n-1} \oplus \pi_{n-2} \oplus \pi_{n-5} \oplus \pi_{n-6} \oplus \cdots = \sum_{s \equiv 1, 2 \pmod{4}} \pi_{n-s}.$$

3.4. Обобщенные экспоненты детей спинорного представления. Из леммы 5 мы уже знаем число обобщенных экспонент для всех представлений π_k , $0 \leq k \leq n$, т.е. для всех детей спинорного представления. А именно, π_k имеет $\binom{n}{m}$ экспонент, где $m = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Наша задача теперь — найти правильный q -аналог этого выражения. Напрашивающийся ответ — гауссов биномиальный коэффициент $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ — оказывается в этом случае неверным! Правильный ответ дается следующей неожиданной (по крайней мере, для меня) формулой.

Теорема 5. *Производящая функция для обобщенных экспонент представления π_k со старшим весом θ_k в зависимости от четности k есть*

$$E_{\theta_{2m}}(q) = q^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{q^2} \quad \text{или} \quad E_{\theta_{2m+1}}(q) = q^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{q^2}. \quad (19)$$

Доказательство теоремы будет приведено ниже, и при этом мы получим также полезную информацию о соответствующей классической семейной алгебре $\mathcal{C}_{\omega_n}(\mathbf{B}_n)$.

§4. Ограничение на картановскую подалгебру

Для доказательства основной теоремы мы рассмотрим подробнее ограничение элемента $F \in \mathcal{C}_{\omega_n}(\mathfrak{g})$ на $\mathfrak{h}^*$. Это ограничение является полиномиальной функцией от координат $H_1, \dots, H_n$, значения которой — диагональные матрицы порядка 2^n . Элементы этих матриц, как и базис в Gras_n , удобно нумеровать последовательностями $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$.

Пусть f — полином, стоящий в первой клетке, где все ε_k равны 1. Условие ковариантности (4) показывает, что полином, стоящий в клетке ε , равен $f(\varepsilon_1 H_1, \dots, \varepsilon_n H_n)$. Таким образом, элемент F полностью определяется полиномом f . Мы получаем таким образом вложение α классической семейной алгебры $\mathcal{C}_{\omega_n}(\mathfrak{g})$ в алгебру полиномов от $H_1, \dots, H_n$.

Лемма 6. *Образ вложения α совпадает с алгеброй $\mathcal{A}_n$ всех симметрических полиномов от $H_1, \dots, H_n$.*

В самом деле, из условия ковариантности следует, что полином $f = \alpha(F)$ инвариантен относительно группы S_n перестановок переменных. Остается показать, что любой симметрический полином получается из какого-нибудь элемента семейной алгебры.

Сначала проверим утверждение леммы для подалгебры $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$, состоящей из симметрических полиномов от $H_1^2, \dots, H_n^2$. Алгебра $\mathcal{B}_n$ является алгеброй инвариантов для группы Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что эта группа порождается перестановками переменных и изменениями их знаков. Образующими алгебры $\mathcal{B}_n$ являются ограничения на $\mathfrak{h}^*$ полиномов

$$\Delta_k := \text{tr } M^{2k}. \quad (20)$$

Легко видеть, что скалярные матрицы вида $\Delta_k \cdot 1$ принадлежат семейной алгебре и $\alpha(\Delta_k \cdot 1) = \Delta_k|_{\mathfrak{h}^*}$.

Далее, алгебра $\mathcal{A}_n$ как градуированный модуль над $\mathcal{B}_n$ имеет полином Пуанкаре

$$P(q) = \frac{\prod_{k=1}^n (1 - q^{2k})}{\prod_{k=1}^n (1 - q^k)} = \prod_{k=1}^n (1 + q^k). \quad (21)$$

В частности, ранг этого модуля равен 2^n .

С другой стороны, ранг семейной алгебры над $\mathcal{B}_n$ равен общему числу экспонент всех детей спинорного представления, которое также равно 2^n как размерность пространства векторов нулевого веса в $\text{End}(\text{Gras}_n)$. Лемма доказана. $\square$

Вернемся теперь к разбиению пространства $\text{Mat}_{2^n}(\mathbb{C}) \simeq \text{End}(\text{Gras}_n)$ на неприводимые относительно $\sigma(G)$ подпространства W_k , $0 \leq k \leq n$, в которых действуют представления π_k . Каждое W_k имеет нетривиальное пересечение с пространством D диагональных матриц. Более точно, размерность этого пересечения равна числу экспонент представления π_k . Каждой такой экспоненте e соответствует элемент $F_{e,k}$ степени e семейной алгебры, связанный с ребенком π_k . Симметрические полиномы $f_{e,k} = \alpha(F_{e,k})$ образуют однородный базис в алгебре $\mathcal{A}_n$ как $\mathcal{B}_n$ -модулю.

Окончательно вопрос о вычислении экспонент сводится к нахождению однородного базиса $\mathcal{B}_n$ -модуля $\mathcal{A}_n$. Как известно, одним из базисов $\mathcal{A}_n$ как комплексного векторного пространства является набор мономиальных симметрических функций $m_a = m_{a_1 \dots a_n}$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$. По определению m_a является суммой всех различных мономов вида $H_1^{a_1} \dots H_n^{a_n}$. Назовем типом такой функции число $t(m_a)$ нечетных индексов среди $\{a_1, \dots, a_n\}$. Линейную оболочку всех мономиальных функций типа t обозначим через $\mathcal{A}_n^{(t)}$. Ясно, что $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{t=0}^n \mathcal{A}_n^{(t)}$.

Теорема 6. (а) Пространство $\mathcal{A}_n^{(t)}$ — свободный градуированный модуль над градуированной алгеброй $\mathcal{B}_n$. Многочлен Пуанкаре этого модуля имеет вид

$$P_t(q) = q^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}_{q^2}. \quad (22)$$

(b) Наименьшая экспонента представления π_k равна

$$s(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{если } k \text{ четно,} \\ n - \frac{k-1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

(с) Пусть t — мономиальная функция типа t . Тогда совокупность векторов

$$\vec{m} := \{m(\varepsilon_1 H_1, \dots, \varepsilon_n H_n)\} \quad (23)$$

для всевозможных значений $H_1, \dots, H_n$ заполняет пространство $W_k \cap D$, где k определяется из равенства $s(k) = t(m)$.

(d) Производящая функция для обобщенных экспонент представления π_k совпадает с градуированным рангом модуля $\mathcal{A}_n^{(s(k))}$.

Схема доказательства. Первое утверждение теоремы вместе с вычислением полинома Пуанкаре получается с помощью прямого вычисления ряда Пуанкаре градуированного пространства $\mathcal{A}_n^{(t)}$.

Рассмотрим утверждение (с). Для всех мономиальных функций типа t векторы (23) заполняют одно и то же подпространство D_t в D , поскольку система линейных уравнений, определяющая это подпространство, зависит только от t . Таким образом, мы получаем два разбиения пространства D в прямую сумму подпространств,

$$D = \bigoplus_{t=0}^n D_t \quad \text{и} \quad D = \bigoplus_{k=0}^n D \cap W_k.$$

Легко понять, что каждый элемент второго разбиения целиком содержится в одном из элементов первого разбиения. Но число элементов обоих разбиений одинаково, поэтому они совпадают. Осталось вычислить зависимость между двумя параметрами: $t = s(k)$. Смысл параметра t ясен из того, что это — минимальная степень мономиальной функции данного типа. Таким образом, $s(k)$ — это минимальная экспонента представления π_k . Зная число экспонент представления π_k и полиномы Пуанкаре $\mathcal{B}_n$ -модулей $\mathcal{A}_n^{(t)}$, мы определяем $t = s(k)$ с точностью до замены на $n - t$. Окончательную ясность вносит рассмотрение максимальной экспоненты представления π_k , которая без труда вычисляется по формуле Костанта [7, формула 5.3.5] и равна высоте старшего веса $\sum_{i=1}^k H_i$, т. е. $\frac{k(2n+1-k)}{2}$.

Базис в семейной алгебре нумеруется подмножествами в $\{1, \dots, n\}$. Подмножеству $\{i_1 < \dots < i_k\}$ соответствует элемент, у которого в левом верхнем углу стоит мономиальная функция m_a , $a = \{a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0\}$, минимального веса, у которой индексы $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ (и только они) нечетны. Всего таких функций $\binom{n}{k}$, а производящий полином для их степеней равен $q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2}$. $\square$

§5. Скалярное произведение Рани Брылински

В заключение рассмотрим еще один подход к описанию экспонент. В этом контексте он был предложен Рани Брылински в [3]. Идея состоит в том, что число экспонент E_π или его q -аналог $E_\pi(q)$ является в какой-то мере показателем величины представления. Поскольку он аддитивен по π , величину

$$E(\pi_1, \pi_2) := E_{\pi \otimes \pi_2^*}(q)$$

можно рассматривать как своеобразное скалярное произведение в кольце представлений, обладающее полезным свойством

$$E(\pi_1 \otimes \pi, \pi_2) = E(\pi_1, \pi^* \otimes \pi_2). \quad (24)$$

В работе [2] показано, что в случае простых групп Ли типа A_n это скалярное произведение выражается явно в терминах полиномов Макдональда.

В общем случае свойства этого скалярного произведения кодируются производящей функцией

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} \chi_\pi(t) E_\pi(q) \quad (25)$$

на максимальном торе $T \subset G$ (или его компактной форме). Если положить $q = 1$, искомая функция легко вычисляется с помощью интегральной формулы Г. Вейля. Она равна $\frac{|W|}{\Delta(t)}$, где $|W|$ — порядок группы Вейля, а Δ — знаменатель в формуле Вейля для характера. Вполне вероятно, что справедлив q -аналог этой формулы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. Б. Дынкин, *Некоторые свойства систем весов линейных представлений полупростых групп Ли*, Докл. АН СССР, **71**:2 (1950), 221–224.
- [2] R. K. Brylinski (Gupta), *Limits of weight spaces, Lusztig's q -analogs, and fibering of adjoint orbits*, J. Amer. Math. Soc., **2**:3 (1989), 517–533.
- [3] R. K. Gupta, *Generalized exponents via Hall–Littlewood symmetric functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **16**:2 (1987), 287–291.
- [4] W. Hesselink, *Characters of nullcone*, Math. Ann., **252**:3 (1980), 179–182.
- [5] A. A. Kirillov, *Family algebras*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., **6**:1 (2000), 7–20 (electronic).
- [6] A. A. Kirillov, *Introduction to family algebras*, Moscow Math. J., **1**:1 (2001), 49–63.
- [7] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., **85** (1963), 327–404.
- [8] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a q -analogue of Kostant's weight multiplicity formula*, in: Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers (II–III), Asterisque, vol. 101–102, Soc. Math. France, Paris, 1983, 208–227.
- [9] D. Panyushev, *Weight multiplicity free representations, $\mathfrak{g}$ -endomorphism algebras and Dynkin polynomials*, J. London Math. Soc., **69**:2 (2004), 273–290.