Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупрямых произведениях, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 37–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:21:48

Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупрямых произведениях*

© 2008. А. М. ВЕРШИК, М. И. ГРАЕВ

Дорогому Израилю Моисеевичу Гельфанду к его 95-летию

В 1972 г. по инициативе И. М. Гельфанда был начат цикл работ трех авторов (самого Израиля Моисеевича, М. И. Граева и А. М. Вершика) об унитарных представлениях функциональных групп или групп токов. Задача, которую поставил И. М. Гельфанд первому автору настоящей работы весной 1972 г. и с которой начался этот цикл работ, состояла в том, чтобы выяснить, существует ли «мультипликативный интеграл представлений» (см. далее) для группы $SL(2, \mathbb{R})$. Вскоре выяснилось, что ответ на этот вопрос положителен, и в первой статье на эту тему [2] было описано несколько моделей этого представления. Основная идея состояла в изучении окрестности единичного представления самой группы $SL(2, \mathbb{R})$ и так называемого особого (бесконечно малого) ее представления, первая группа когомологий которого нетривиальна. Мультипликативный интеграл представлений есть, по выражению авторов, «тензорное произведение бесконечно большого числа бесконечно малых представлений». В дальнейших совместных работах были найдены различные обобщения этой конструкции (на простые группы Ли ранга 1, для групп диффеоморфизмов и пр.) и развита техника работы с такими представлениями. Начиная с 2004 г., авторы настоящей статьи предприняли систематическое изучение интегральной модели представления групп токов, основанной на новой интерпретации континуального тензорного произведения, отличной от фоковской и существенно использующей замечательную сигма-конечную меру в пространстве распределений. Систематическое изложение всей этой области будет содержаться в готовящейся книге трех упомянутых авторов «Теория представлений групп токов».

§ 1. Введение

В работе дается краткое изложение теории интегральных моделей представлений групп токов, введенных в предшествующей работе авторов [10]. Интегральные модели для групп токов параболических подгрупп простых групп Ли ранга 1 используются для построения представлений групп токов самих простых групп ранга 1. Мы устанавливаем также связь интегральных моделей и построенных на их основе представлений групп токов простых групп ранга 1 с фоковскими моделями, рассматривавшимися ранее ([5], [6]).

Под группами токов имеются в виду группы измеримых функций на том или ином пространстве или многообразии с мерой со значениями в некоторой груп-

*Исследования первого автора поддержаны грантами НШ 2460.2008.1 и РФФИ 08-01-00379. Исследования второго автора поддержаны РФФИ, грант 07-01-00101a.

не коэффициентов и с поточечным умножением. Интерес представляют лишь такие неприводимые представления групп токов, которые инвариантны относительно некоторой группы автоморфизмов области задания, например, группы всех преобразований, сохраняющих меру, или группы вращений окружности в случае групп петель и т.д. Такое представление (если оно существует) названо в [2] *мультипликативным интегралом представлений*, поскольку оно в определенном смысле является непрерывным тензорным произведением представлений группы коэффициентов. Вопрос о существовании таких представлений для данной группы коэффициентов и данной области задания далеко не тривиален. Общая схема изучения представлений групп токов в *фоковском пространстве* (т.е. в гильбертовом пространстве, снабженном фоковской факторизацией, с которой согласовано представление токов) дана в работе [1]. В частности, база группы токов в этом случае произвольна, а группа коэффициентов должна обладать неприводимым унитарным представлением с нетривиальной группой первых когомологий. Последнее, как показано в [13], возможно только в том случае, когда единичное представление группы коэффициентов неизотропно в множестве всех неприводимых унитарных представлений в топологии Фелла (см. [18]). В современных терминах это означает, что группа не должна обладать свойством (Т) Каждана. Неприводимое унитарное представление π с нетривиальной группой $H^1(G; \pi)$ называется *особым*. Среди простых групп Ли особое представление существует лишь у некоторых групп ранга 1, а именно у групп движений вещественного и комплексного пространств Лобачевского $SU(n, 1)$ и $SO(n, 1)$. Для групп токов с такими коэффициентами соответствующие неприводимые представления были впервые построены в работах [2], [3]. Пространством этих представлений служило фоковское пространство, являющееся экспонентой одночастичного пространства, которое, в свою очередь, есть прямой интеграл особых представлений. Конструкция представления группы токов в фоковском пространстве существенно использует нетривиальный 1-коцикл группы коэффициентов в ее особом представлении. Фоковская модель удобна и используется в большинстве работ по теории представлений бесконечномерных групп. В этой модели естественным образом реализуются операторы, отвечающие элементам максимальной компактной подгруппы группы токов. Заметим еще, что структура фоковского гильбертова пространства эквивалентным образом описывается с помощью бесконечномерной гауссовой меры («белого шума») и что предлагаемая далее модель использует другую замечательную меру в бесконечномерном пространстве.

Изучение другой модели представления группы токов, в которой диагонализуются операторы, отвечающие элементам унипотентной подгруппы, началось с работы [5]. Этот подход постепенно привел к совершенно новому пониманию природы мультипликативных интегралов представлений и непрерывных тензорных произведений. В его основе лежат два принципиальных соображения.

1) Как и для классических простых групп Ли, например для $SL(2, \mathbb{R})$, построение представления группы токов простых групп Ли следует начинать с построения *представления группы токов максимальной параболической подгруппы*, а затем продолжать это представление на всю группу токов простой группы.

2) В свою очередь, существование представления группы токов максимальной параболической подгруппы простой группы Ли ранга 1 вытекает из того обстоятельства, что на конусе дискретных конечных положительных мер на многообразии, *инвариантных относительно непрерывного аналога картановской подгруппы* — группы мультипликаторов с конечным интегралом от логарифма, — имеется замечательная сигма-конечная мера. Эта мера, обнаруженная в работе [5], изучавшаяся в статьях [15], [14] и аксиоматизированная и подробно исследованная в недавних работах [11], [12], названа *бесконечномерной мерой Лебега*. Она позволяет кардинально упростить теорию представлений групп токов полупрямых произведений, но, кроме того, она оказывается тесно связанной с многочисленными комбинаторными, аналитическими и вероятностными задачами.

По причине, которая станет ясной из конструкции, мы называем этот тип моделей представлений групп токов интегральными моделями. В этой работе мы даем последовательное изложение этой альтернативной конструкции — *интегральных моделей представлений группы токов полупрямых произведений* — и показываем, как продолжить их на группу токов групп движений вещественного и комплексного пространств Лобачевского.

В коротком изложении наша модель непрерывного тензорного произведения гильбертовых пространств и представлений групп токов в этих пространствах трактуется следующим образом:

а) рассматривается пространство счетных линейных положительных комбинаций дельта-мер на базе со сходящейся суммой коэффициентов («пространство траекторий»), которое снабжается бесконечномерной лебеговой мерой, определяемой далее ([12], [11]);

б) каждой траектории сопоставляется счетное тензорное произведение гильбертовых пространств, взятых по дельта-мерам вдоль траектории, в каждом из которых определено представление подгруппы с параметром, равным коэффициенту при дельта-мере;

с) определяется прямой интеграл по лебеговой мере на пространстве траекторий от построенных счетных тензорных произведений.

Конструкция дает представления групп токов (и, в частности, групп петель) в гильбертовом пространстве с дополнительной структурой, обозначаемом через INT; эти представления эквивалентны представлениям, построенным ранее в [2], [3] и реализованным в фоковском пространстве EXP. Изоморфизм (единственный с точностью до скаляра) между пространствами EXP и INT представляет интерес сам по себе¹⁾. Выигрыш от такого способа построения представлений группы токов состоит еще и в том, что неприводимость представления группы токов параболической подгруппы становится почти очевидной, равно как и анализ особого представления; вопрос лишь в том, чтобы доопределить представления на группу токов всей простой группы. Это оказывается возможным для $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ и невозможно для $Sp(n, 1)$.

В §2 мы определяем класс полупрямых произведений, служащих в дальнейшем группами коэффициентов, для которых далее определяется конструкция

¹⁾Заметим, что этот изоморфизм сохраняет структуру *фоковской факторизации тензорных произведений* гильбертовых пространств. В то же время существуют нефоковские факторизации в гильбертовых пространствах (см. [17]) и, следовательно, открыта возможность строить представления групп токов с факторизацией, не изоморфной фоковской. Насколько известно, эта возможность не исследована до сих пор.

интегральных моделей представлений групп токов. Мы вводим понятие канонического представления, с помощью которого определяется особое представление полупрямого произведения. В следующем параграфе приведена основная конструкция. В §4 содержатся формулы для сферической функции интегральной модели и устанавливается изоморфизм этой модели с фоковской. В §5 детально описаны интегральные модели для простейшего случая — параболической подгруппы группы $SL(2, \mathbb{R})$ — и построено продолжение этих интегральных моделей до представлений всей группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$. Параграф 6 посвящен интегральным моделям для общего случая максимальных параболических подгрупп P групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$. Мы формулируем результаты о продолжении этих интегральных моделей до представлений соответственно групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$, а для случая $P \subset U(n, 1)$ приводим явное описание самих интегральных моделей и их продолжений до представлений группы $U(n, 1)^X$. Здесь различаются случаи ортогонального и унитарного особых представлений: в унитарном случае возникают проективные унитарные представления группы $U(n, 1)^X$, рассмотренные также в [6]. Существует связь между этими проективными представлениями и построенными в [4] унитарными (непроективными) представлениями группы токов $\tilde{G}^X$, где $\tilde{G}$ — универсальная накрывающая группы $U(n, 1)$.

Доказательства и подробная версия теории интегральных моделей излагаются в готовящейся статье авторов.

§2. Исходная конструкция: особые представления полупрямых произведений групп

Начнем с общей схемы, применимой, в частности, к параболическим подгруппам простых групп ранга 1. Рассмотрим полупрямое произведение $P = S \ltimes P_0$ локально компактной группы P_0 и ее мультипликативной однопараметрической группы автоморфизмов $S \cong \mathbb{R}_+^*$. Будем обозначать через g^r образ элемента $g \in P_0$ под действием автоморфизма $r \in S$. В дальнейшем термин «представление» означает, если не оговорено противное, ортогональное или унитарное представление. Указанная группа автоморфизмов действует и на представлениях T группы P_0 , а именно, с каждым представлением T подгруппы P_0 в некотором гильбертовом пространстве H связано семейство сопряженных с T представлений T_r , $r \in \mathbb{R}_+^*$, полученных из T с помощью автоморфизмов из группы $\mathbb{R}_+^*$: $T_r(g) \equiv T(g^r)$.

Циклическое представление T подгруппы P_0 называется *каноническим* относительно группы автоморфизмов S , если существует такой циклический вектор $h \in H$ единичной нормы, что $\|T_r(g)h - h\| < c(g)r$ при достаточно малых r и для любого $g \in P_0$. Вектор h с указанным свойством называется *почти инвариантным* относительно представления T . Очевидно, что в топологии Фелла на пространстве представлений (см., например, [18]) представления T_r стремятся при $r \rightarrow 0$ к единичному представлению. В терминах матричных элементов представления T (состояний), отвечающих циклическим элементам h , наше определение выглядит так:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_h(g^r) - 1}{r} = - \left. \frac{d\varphi_h(g^r)}{dr} \right|_{r=0} \equiv -\psi(g) < \infty$$

для всех $g \in G$, где $\varphi_h(g) = \operatorname{Re}(\langle T(g)h, h \rangle)$ есть нормированная положительно определенная функция на группе G («состояние»).¹⁾

С каждым каноническим представлением T подгруппы P_0 связано представление $\tilde{T}$ группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ в прямом интеграле

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r r^{-1} dr$$

гильбертовых пространств $H_r \equiv H$ по мультипликативной мере Хаара $r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}_+^*$, т.е. в пространстве сечений $f(r)$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$ со слоем H_r над $r \in \mathbb{R}_+^*$. Операторы $\tilde{T}(g_0)$, $g_0 \in P_0$, действуют на $\mathcal{H}$ послойно, $(\tilde{T}(g_0)f)(r) = T_r(g_0)f(r)$, а операторы $\tilde{T}(r_0)$, $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, переставляют слои: $(\tilde{T}(r_0)f)(r) = f(r_0 r)$.

Лемма. *Представление $\tilde{T}$ группы P является особым (см. [8]).*

Действительно, по построению оно обладает нетривиальными 1-коциклами $b: P \rightarrow \mathcal{H}$ вида

$$b(g, r) = (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r), \quad f_0(r) = \varphi(r)h_r, \quad (1)$$

где $h_r = h$ — почти инвариантный относительно T вектор в H , а $\varphi(r)$ — любая гладкая положительная функция на $[0, \infty)$, такая, что $\int_\epsilon^\infty \varphi^2(r)r^{-1}dr < \infty$ при $\epsilon > 0$ и $\varphi(0) \neq 0$.

Отметим, что 1-коциклы, отвечающие функциям φ и φ_1 , эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi(0) = \varphi_1(0)$.

Примерами групп $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, подгруппы P_0 которых обладают каноническими представлениями, являются максимальные параболические подгруппы групп $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и $Sp(n, 1)$. В случае $O(n, 1)$ имеется, с точностью до перехода к сопряженным представлениям, только одно, а в случаях $U(n, 1)$ и $Sp(n, 1)$ — счетный набор канонических неприводимых представлений подгруппы P_0 . С каждым из этих канонических представлений подгруппы P_0 связано особое неприводимое представление группы P . Отметим, что из всех особых представлений группы $P \subset U(n, 1)$ только два унитарных и одно ортогональное продолжают до особого представления всей группы $U(n, 1)$; у группы $Sp(n, 1)$ особых представлений вообще не существует.

§3. Построение интегральной модели представлений (INT)

Группой токов P^X , где P — локально компактная группа, а X — пространство с вероятностной мерой m , называется группа ограниченных измеримых отображений $X \rightarrow P$ с поточечным умножением. В [10] для групп P вида $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ по каждому каноническому представлению T подгруппы P_0 в пространстве H с почти инвариантным относительно T вектором $h \in H$ было определено и названо *интегральной моделью* представление группы токов P^X . По

¹⁾Функция $\psi(\cdot)$, определенная выше, является неограниченной условно положительно определенной функцией и равна квадрату нормы нетривиального коцикла в особом представлении (см. далее). По поводу терминологии заметим, что в работе [10] каноническое представление было названо суммируемым, а в статье [2] каноническими для группы $PSL(2, \mathbb{R})$ названы состояния, инвариантные относительно компактной подгруппы и удовлетворяющие близкому условию. Здесь мы несколько расширяем понятие канонического состояния, используя тот же термин.

аналогии с фоковскими моделями EXP (см. [5]) будем обозначать это представление группы P^X через $\text{INT } T$, а через $\text{INT } H$ или, подробнее, через $\text{INT}(H, h)$ — гильбертово пространство, в котором оно реализовано.

Конструкция представления $\text{INT } T$ группы токов P^X , где $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, аналогична конструкции особого представления группы P по каноническому представлению T ее подгруппы P_0 . Прежде всего, в этой конструкции пространство $\mathbb{R}_+^*$ заменено конусом вещественных положительных конечных атомических мер на пространстве (X, m)

$$l_+^1(X) = \left\{ \xi = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \delta_{x_k} \mid r_k > 0, \sum_k r_k < \infty \right\}$$

(его элементы далее обозначаются через $\xi = \{r_k, x_k\}$). Вместо мультипликативной хааровской меры $r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ мы рассматриваем на $l_+^1(X)$ бесконечную сигма-конечную меру $d\mathcal{L}(\xi)$. Эта мера (см. [11]), являющаяся бесконечномерным аналогом меры Лебега на октантах $\mathbb{R}_+^n$, однозначно определяется своим преобразованием Лапласа:

$$\Psi_{\mathcal{L}}(f) \equiv \int_{l_+^1(X)} \exp \left(- \sum_k r_k f(x_k) \right) d\mathcal{L}(\xi) = \exp \left(- \int_X \log f(x) dm(x) \right), \quad (2)$$

где f — произвольная неотрицательная измеримая функция на (X, m) с конечным интегралом от логарифма. Отметим, что, как и в случае классического преобразования Лапласа, равенство (2) сохраняет смысл для комплекснозначных функций f с неотрицательной вещественной частью.

Для интегральной модели существенны лишь два свойства меры $\mathcal{L}$ — ее проективная инвариантность относительно группы мультипликаторов M_a (т. е. условие $d\mathcal{L}(M_a \xi) = \varphi(a) d\mathcal{L}(\xi)$, где $\varphi(a) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log a(x) dm(x)}$) и эргодичность относительно этой группы. Инвариантность следует непосредственно из формулы для преобразования Лапласа; по поводу эргодичности см. [12]. В частности, из проективной инвариантности меры $\mathcal{L}$ следует ортогональность (унитарность) представления $\text{INT } T$, а из эргодичности — его неприводимость. Подробное исследование свойств этой замечательной меры см. в [11], [12].

Далее, в конструкции интегральной модели пространства H_r , $r \in \mathbb{R}_+^*$, с заданными на них представлениями T_r подгруппы P_0 заменены счетными тензорными произведениями $H_\xi = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k}$, $\xi \in l_+^1(X)$, со стабилизирующим почти инвариантным вектором $h \in H$, на которых действуют представления T_ξ группы P_0^X .

По определению счетное тензорное произведение $H_\xi = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k}$ со стабилизирующим почти инвариантным вектором $h \in H$ есть пополнение индуктивного предела пространств $\bigotimes_{k=1}^n H_{r_k}$ относительно вложений $x \in \bigotimes_{k=1}^n H_{r_k} \mapsto x \otimes h_{r_{n+1}} \in \bigotimes_{k=1}^{n+1} H_{r_k}$, $h_{r_{n+1}} = h$. Операторы представления группы P_0^X действуют на H_ξ по формуле

$$T_\xi(g(\cdot)) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} f_k \right) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (T_{r_k}(g(x_k)) f_k).$$

Отметим, что определение представлений T_ξ корректно только для канонических представлений T подгруппы P_0 .

Пространство $\text{INT } H$ интегральной модели $U = \text{INT } T$ представления T группы P^X определяется, по аналогии с пространством $\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r r^{-1} dr$ представления группы P , ассоциированного с каноническим представлением T подгруппы P_0 , как прямой интеграл по мере $\mathcal{L}$ гильбертовых пространств H_ξ ,

$$\text{INT } H = \int_{l_+^1(X)}^\oplus H_\xi d\mathcal{L}(\xi), \quad H_\xi = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k},$$

т. е. как пространство сечений $F(\xi) = F(\{r_k, x_k\})$ расслоения над $l_+^1(X)$ со слоем H_ξ над каждой точкой $\xi = \{r_k, x_k\}$. Действие подгруппы P_0^X на пространствах H_ξ индуцирует ее представление $U = \text{INT } T$ на всем пространстве $\text{INT } H$:

$$\text{INT } T = \int_{l_+^1(X)}^\oplus T_\xi d\mathcal{L}(\xi), \quad \text{где } T_\xi = \bigotimes_{k=1}^\infty T_{r_k, x_k};$$

подробнее: $(U(g(\cdot))F)(\xi) = T_\xi(g(\cdot))F(\xi)$. Продолжение этого представления подгруппы P_0^X на всю группу P^X задается формулой

$$(U(r_0(\cdot))F)(\xi) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)} F(r_0(\cdot)\xi) \quad \text{при } r_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^X.$$

Из определения следует, что представление $\text{INT } T$ группы P^X инвариантно относительно преобразований пространства X , сохраняющих меру m на X .

Теорема 1 [10]. *Если каноническое представление T подгруппы P_0 неприводимо, а представления T_r попарно неэквивалентны, то ассоциированное с T представление $\tilde{T}$ группы P и соответствующее ему представление $U = \text{INT } T$ группы токов P^X неприводимы.*

Замечание. Конструкция интегральной модели сохраняет смысл при замене вероятностной меры m на X любой положительной конечной мерой ($m(X) = \theta$) или, что эквивалентно, при добавлении коэффициента $\theta > 0$ под знаком $\exp$ в определении преобразования Лапласа меры $\mathcal{L}$. Определенное так однопараметрическое семейство представлений группы P^X по-прежнему удовлетворяет утверждению теоремы 1. Для простоты мы ограничиваемся здесь только случаем $\theta = 1$.

Определим сферическую функцию представления $U = \text{INT } T$ группы P^X , ассоциированного с каноническим представлением T подгруппы P_0 в пространстве H , как функцию

$$\Psi(g) = \langle U(g)\Omega, \Omega \rangle$$

на P^X , где Ω — единичный вектор в пространстве $\tilde{H} = \text{INT } H$ вида

$$\Omega(\xi) = \bigotimes_{k=1}^\infty (e^{-r_k/2} h_{r_k}), \quad h_{r_k} = h \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\} \in l_+^1(X). \quad (3)$$

Теорема 2. *Сферическая функция представления U имеет вид*

$$\Psi(g) = \exp \left(\int_X \left(i \operatorname{Im} \langle b(g(x)), f_0 \rangle - \frac{1}{2} \|b(g(x))\|^2 \right) dm(x) \right), \quad (4)$$

где $f_0(r) = e^{-r/2} h_r$ и $b(g) = (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r)$ есть 1-коцикл представления $\tilde{T}$ группы P , ассоциированного с T , см. (1).

§4. Связь между интегральными моделями и фоковскими представлениями

Для любой локально компактной группы G каждой паре $(\tilde{T}, b)$, где $\tilde{T}$ — особое представление группы G в пространстве $\mathcal{H}$, а $b: G \rightarrow \mathcal{H}$ — нетривиальный 1-коцикл, отвечает фоковская модель представления группы токов G^X , см. [5]. Она реализуется в гильбертовом пространстве $\text{EXP } \mathcal{H}^X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k \mathcal{H}^X$, где S^k есть k -я симметризованная тензорная степень и $\mathcal{H}^X = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x dm(x)$, $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}$. Операторы представления задаются на тотальном подмножестве векторов $\text{EXP } v = \mathbb{I} \oplus v \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}}v \otimes v \oplus \frac{1}{\sqrt{3!}}v \otimes v \otimes v \oplus \dots$ формулой

$$U(g) \text{EXP } v = \exp(-\frac{1}{2}\|b^X(g)\|^2 - (\tilde{T}^X(g)v, b^X(g))) \text{EXP}(\tilde{T}^X(g)v + b^X(g)).$$

Здесь $\tilde{T}^X$ и b^X — представление группы G^X в пространстве $\mathcal{H}^X$ и 1-коцикл этой группы со значениями в этом пространстве, порожденные соответственно представлением $\tilde{T}$ группы G и 1-коциклом b этой группы в пространстве $\mathcal{H}$. Операторы $U(g_1 g_2)$ и $U(g_1)U(g_2)$ фоковского представления связаны соотношением $U(g_1 g_2) = \exp(i \text{Im} \int_X a(g_1(x), g_2(x)) dm(x)) U(g_1)U(g_2)$, где $a(g_1, g_2) = (\tilde{T}(g_1)b(g_2), b(g_1))$. Таким образом, в случае унитарных представлений $\tilde{T}$ фоковские представления, вообще говоря, проективны. Однако для групп вида $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ 2-коцикл $a(g_1, g_2)$ тривиален, а потому эти представления проективно эквивалентны обычным (непроективным) представлениям.

Теорема 3. Пусть T — каноническое представление группы P_0 , удовлетворяющее условиям теоремы 1, и $\tilde{T}$ — ассоциированное с ним особое представление группы P (см. выше); тогда представление $\text{INT } T$ группы P^X проективно эквивалентно фоковскому представлению, порожденному тем же представлением $\tilde{T}$ и 1-коциклом вида (1), в котором $f_0(r) = e^{-r/2} h_r$.

§5. Описание интегральных моделей подгруппы $P \subset SL(2, \mathbb{R})$ треугольных матриц и их продолжений на группу $SL(2, \mathbb{R})^X$

Условимся элементы подгруппы $P \subset SL(2, \mathbb{R})$ треугольных матриц $g = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ \gamma & \epsilon \end{pmatrix}$ записывать в виде пар (ϵ, γ) с законом умножения $(\epsilon_1, \gamma_1)(\epsilon_2, \gamma_2) = (\epsilon_1 \epsilon_2, \gamma_1 \epsilon_2^{-1} + \epsilon_1 \gamma_2)$. Группа P есть полупрямое произведение $\mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, где P_0 — подгруппа группы P элементов, у которых $\epsilon = \pm 1$.

Имеются, с точностью до перехода к сопряженным представлениям, два унитарных неприводимых канонических представления $T^{\pm}$ группы P_0 в одномерных пространствах $H^{\pm}$ и одно ортогональное представление T^0 в двумерном пространстве H^0 . Операторы представлений $T_r^{\pm}$ действуют в пространствах $H_r^{\pm} = H^{\pm}$ по формулам $T_r^{\pm}(1, \gamma) = e^{\pm i r^2 \gamma} \text{id}$, $T_r^{\pm}(\pm 1, 0) = \text{id}$. Соответственно счетные тензорные произведения $H_{\xi}^{\pm}$, $\xi = \{r_k, x_k\}$, на которых действует группа токов P_0^X , также одномерны, а потому пространствами $\text{INT } H^{\pm}$ представлений $U^{\pm} = \text{INT } T^{\pm}$ группы P^X являются гильбертовы пространства комплекснозначных функционалов $F^{\pm}(\xi) = F(\{r_k, x_k\})$ на $l_+^1(X)$ с нормой

$$\|F\|^2 = \int_{l_+^1(X)} |F(\xi)|^2 d\mathcal{L}(\xi).$$

Операторы представления группы P^X тождественны на ее центре и однозначно определяются формулами

$$(U^\pm(1, \gamma(\cdot))F^\pm)(\xi) = e^{\pm i \sum r_k^2 \gamma(x_k)} F^\pm(\xi), \quad (5)$$

$$(U^\pm(r_0(\cdot), 0)F)(\xi) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)} F^\pm(r_0(\cdot) \xi). \quad (6)$$

Операторы ортогональных представлений T_r^0 реализуются в двумерных вещественных подпространствах $H_r^0 \subset H_r^+ \oplus H_r^-$ векторов вида $(f, \bar{f})$ и являются ограничениями на эти подпространства операторов $T_r^+(g) \oplus T_r^-(g)$. Поэтому пространства H_ξ^0 представлений группы P_0^X являются счетными тензорными произведениями двумерных вещественных пространств, и интегральная модель $U^0 = \text{INT } T^0$ представления группы P^X действует в прямом интеграле по мере $\mathcal{L}$ этих пространств $\text{INT } H^0 = \int_{l_+^1(X)} H_\xi^0 d\mathcal{L}(\xi)$. Операторы $(U^0(r_0(\cdot), 0))$ этого представления задаются той же формулой (6), а операторы $U^0(1, \gamma(\cdot))$ — формулой

$$U^0(1, \gamma(\cdot)) \left(\bigotimes (f_k, \bar{f}_k) \right) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (e^{ir_k^2 \gamma(x_k)} f_k, e^{-ir_k^2 \gamma(x_k)} \bar{f}_k). \quad (7)$$

Заметим, что при естественном вложении $\text{INT } H^0 \subset \text{INT}(H^+ \oplus H^-)$ операторы $U^0(g)$ являются ограничениями на $\text{INT } H^0$ операторов $U(g)$ в пространстве $\text{INT}(H^+ \oplus H^-)$.

Опишем продолжения представлений $U^\pm$ и U^0 группы токов P^X на группу $SL(2, \mathbb{R})^X$.

Введем однородное пространство группы $G = SL(2, \mathbb{R})$ — верхнюю комплексную полуплоскость L с заданным на ней действием группы $G: z \mapsto gz = \frac{\delta z + \gamma}{\beta z + \alpha}$

при $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (плоскость Лобачевского). Обозначим через L^X пространство ограниченных функций $z: X \rightarrow L$. Отметим, что в силу ограниченности интеграл $\int_X \log |z(x)| dm(x)$ сходится для любой функции $z \in L^X$. Действие группы G на L индуцирует поточечное действие группы G^X на L^X .

Введем далее функцию

$$c(z_1, z_2) = \log(-i(z_1 - \bar{z}_2)) = \log[(v_1 + v_2) - i(u_1 - u_2)] \quad (8)$$

на $L \times L$, где $z_k = u_k + iv_k$, и определим функции $u^\pm(g, z)$ на $G \times L$ равенствами

$$u^+(g, z) = \overline{u^-(g, z)} = c(gz, gz_0) - c(z, z_0) - \frac{1}{2}(c(gz_0, gz_0) - c(z_0, z_0)), \quad (9)$$

где $z_0 = i$.

Для продолжения представлений $U^\pm = \text{INT } T^\pm$ группы P^X на $SL(2, \mathbb{R})^X$ поставим в соответствие каждой функции $z \in L^X$ следующие функционалы на $l_+^1(X)$:

$$F_z^+(\xi) = e^{i \sum r_k^2 z(x_k)}, \quad F_z^-(\xi) = \overline{F_z^+(\xi)} = e^{-i \sum r_k^2 \overline{z(x_k)}}.$$

Эти функционалы принадлежат пространствам $\text{INT } H^\pm$ и образуют в них тотальные подмножества.

Определим действие операторов $U^\pm(g)$ группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$ на множествах функционалов $F_z^\pm$ следующей формулой:

$$U^\pm(g)F_z^\pm = e^{\frac{1}{2} \int_X u^\pm(g(x), z(x)) dm(x)} F_{gz}^\pm, \quad (10)$$

где $u^\pm(g, z)$ задается равенством (9).

Теорема 4. Операторы $U^\pm(\cdot)$, задаваемые формулой (10), продолжают-ся до унитарных операторов на соответствующих пространствах $\text{INT } H^\pm$ и задают там проективные представления группы G^X ; ограничения этих представлений на подгруппу P^X совпадают с исходными представлениями этой подгруппы.

Для продолжения ортогонального представления $U^0 = \text{INT } T^0$ группы P^X в пространстве $\text{INT } H^0$ на группу $SL(2, \mathbb{R})^X$ поставим в соответствие каждой функции $z \in L^X$ следующий функционал на $l_+^1(X)$:

$$F_z^0(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (2^{-1/2} e^{ir_k^2 z(x_k)}, 2^{-1/2} e^{-ir_k^2 \overline{z(x_k)}}).$$

Функционалы F_z^0 принадлежат пространству $\text{INT } H^0$ и образуют в нем тотальное подмножество.

Определим операторы $U^0(g)$ группы P^X на множестве функционалов F_z^0 равенством

$$U^0(g)F_z^0 = e^{\frac{1}{2} \text{Re} \int_X u^\pm(g(x), z(x)) dm(x)} F_{gz}^0, \quad (11)$$

где $u^\pm(g, z)$ по-прежнему задается формулой (9).

Теорема 5. Операторы $U^0(g)$ продолжают-ся до ортогональных операторов на $\text{INT } H^0$ и задают на $\text{INT } H^0$ ортогональное представление группы G^X , ограничение которого на подгруппу P^X совпадает с исходным. Полученное представление группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ эквивалентно представлению, построенному в [2].

§6. Продолжение интегральных моделей представлений максимальных параболических подгрупп групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ до представлений этих групп

Известно (см., например, [8]), что группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ обладают единственным ортогональным неприводимым особым представлением. Его ограничение на максимальную параболическую подгруппу P также неприводимо и ассоциировано с каноническим ортогональным представлением подгруппы P_0 , входящей в разложение $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$; обозначим через T^0 это каноническое ортогональное представление. Возникает вопрос о возможности продолжения ортогонального представления $\text{INT } T^0$ группы P^X до представлений групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$.

Теорема 6. Интегральные модели $\text{INT } T^0$ ортогональных представлений групп P^X , где $P \subset O(n, 1)$ или $P \subset U(n, 1)$, допускают продолжение до ортогональных (непроективных) представлений групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$, эквивалентных их фоковским ортогональным представлениям, описанным в [5]. Сплетающий оператор этих ортогональных представлений групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$ порожден отображением соответствующих циклических векторов.

Утверждение следует из совпадения сферических функций соответствующих представлений группы P^X .

В случае группы $U(n, 1)$ в ее особом ортогональном неприводимом представлении можно двумя способами ввести структуру унитарного представления. Ограничения полученных таким образом особых унитарных представлений группы $U(n, 1)$ на подгруппу P неприводимы и ассоциированы с каноническими унитарными представлениями T^+ и T^- подгруппы P_0 .

Теорема 7. *Интегральные модели $\text{INT } T^\pm$ унитарных представлений группы P^X , ассоциированных с каноническими унитарными представлениями $T^\pm$ подгруппы P_0 , продолжаемы до проективных унитарных представлений группы токов $U(n, 1)^X$, проективно эквивалентных ее фоковским проективным унитарным представлениям, описанным в [6].*

Полученные так продолжения являются новыми моделями представлений групп токов $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$, в которых пространство представления реализовано как прямой интеграл по мере $\mathcal{L}$ подпространств, инвариантных относительно подгруппы P_0^X , а элементы из $(\mathbb{R}_+^*)^X \subset P^X$ переставляют эти подпространства.

Приведем явное описание интегральных моделей $\text{INT } T^\pm$ и $\text{INT } T^0$ для случая групп $P \subset U(n, 1)$ и их продолжений до представлений групп токов $U(n, 1)^X$.

Реализуем $U(n, 1)$ как группу линейных преобразований в $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих эрмитову форму $x_1 \bar{x}_{n+1} + x_{n+1} \bar{x}_1 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$, и будем представлять элементы $g \in U(n, 1)$ в блочной форме: $g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$, где на диагонали стоят матрицы порядков 1, $n-1$ и 1 соответственно. В этой реализации P есть подгруппа в $U(n, 1)$ всех нижних треугольных клеточных матриц. Она представима в виде полупрямого произведения: $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, где $P_0 = D_0 \ltimes N$, N — группа Гейзенберга порядка $2n-1$, реализованная как группа пар $(t, z) \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}^{n-1}$, и $D_0 \cong U(1) \times U(n-1)$.

В конструкции интегральных моделей $\text{INT } T^\pm$ и $\text{INT } T^0$ канонические унитарные представления $T^\pm$ группы P_0 реализуются в пространствах $H^\pm$ соответственно целых аналитических и целых антианалитических функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-zz^*} d\mu(z)$ (относительно действия P_0 на $H^\pm$ см. [8]). Ортогональное каноническое представление T^0 реализуется в подпространстве $H^0 \subset H^+ \oplus H^-$ векторов вида $(f, \bar{f})$.

В соответствии с общим определением представления $U^\pm = \text{UNT } T^\pm$ и $U^0 = \text{UNT } T^0$ группы P^X реализуются соответственно в пространствах $\text{INT } H^\pm = \int_{U_+^1(X)}^\oplus H_\xi^\pm d\mathcal{L}(\xi)$, где $H_\xi^\pm = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k}^\pm$, и в пространстве $\text{INT } H^0 = \int_{U_+^1(X)}^\oplus H_\xi^0 d\mathcal{L}(\xi)$, где $H_\xi^0 = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k}^\pm$.

Конструкция их продолжений на всю группу $U(n, 1)^X$ аналогична конструкции продолжений для случая $SL(2, \mathbb{R})$. А именно, вместо плоскости Лобачевского здесь вводится однородное пространство L группы $U(n, 1)$, эквивалентное диску в $\mathbb{C}^n$ (n -мерное комплексное пространство Лобачевского),

$$L = \{v = (a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{n-1} \mid a + \bar{a} + b^*b < 0\}, \quad \text{где } b^*b = \sum \bar{b}_i b_i$$

(b — вектор-столбец). Действие группы $U(n, 1)$ на L задается формулой $g(a, b) = (a', b')$, где

$$\begin{aligned} a' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1} (g_{31} + g_{32}b + g_{33}a), \\ b' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1} (g_{21} + g_{22}b + g_{23}a). \end{aligned}$$

Введем на $L \times L$ функцию

$$c(v_1, v_2) = \log(-a_1 - \bar{a}_2 - b_2^* b_1) \quad \text{при } v_i = (a_i, b_i) \in L.$$

Обозначим далее через L^X множество измеримых ограниченных отображений $v: X \rightarrow L$ с заданным на нем поточечным действием $v \mapsto gv$ группы P^X . Отметим, что из условия ограниченности функций $v \in L^X$ следует сходимость интегралов $\int_X c(v(x), v(x)) dm(x)$ для всех $v \in L^X$.

Свяжем с каждой тройкой $v = (a, b) \in L^X$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ и $x \in X$ вектор $f_{v,r,x} \in H_r$,

$$f_{v,r,x}(z) = \exp(r^2 a(x) + r(z, b(x))), \quad (z, b) = \sum z_i b_i,$$

и поставим в соответствие элементам $v \in L^X$ следующие функционалы $F_v^\pm(\xi)$ и $F_v^0(\xi)$ на $l_+^1(X)$:

$$F_v^+(\xi) = \overline{F_v^-(\xi)} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_{v,r_k,x_k}, \quad F_v^0(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (2^{-1/2} f_{v,r_k,x_k}, 2^{-1/2} \overline{f_{v,r_k,x_k}}).$$

Эти функционалы принадлежат соответственно пространствам $\text{INT } H^\pm$ и $\text{INT } H^0$ и образуют в них тотальные подмножества.

Определим на этих множествах действия операторов $U^\pm(g)$ и $U^0(g)$ теми же формулами (10) и (11), что и в случае группы $SL(2, \mathbb{R})$, в которых следует лишь заменить z на v , функцию $c(z_1, z_2)$ на введенную здесь функцию $c(v_1, v_2)$ и вместо $z_0 = i$ писать $v_0 = (-1, 0)$.

Теорема 8. Операторы $U^\pm(g)$ и $U^0(g)$ продолжаются до унитарных и ортогонального операторов в пространствах $\text{INT } H^\pm$ и $\text{INT } H^0$ соответственно и задают продолжение исходных представлений группы P^X до проективных унитарных и ортогонального представлений группы $U(n, 1)^X$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Araki, *Factorizable representations of the current algebra*, Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A, **5**:3 (1970), 361–422.
- [2] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций*, УМН, **28**:5 (1973), 83–128.
- [3] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления группы G^X и когомологии*, Функц. анализ и его прил., **8**:2 (1974), 67–69.
- [4] Ф. А. Березин, *Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара*, Труды ММО, **36** (1978), 275–293.
- [5] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups*, in: Representations of Lie groups and Lie algebras, Akad. Kiado, Budapest, 1985, 121–179.
- [6] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Особые представления группы $SU(n, 1)$ и проективные унитарные представления группы токов $SU(n, 1^X)$* , Докл. РАН, **332**:3 (1993), 280–282.
- [7] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений*, Функц. анализ и его прил., **39**:2 (2005), 1–12.
- [8] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$* , УМН, **61**:5 (2006), 1–88.

- [9] M. I. Graev, A. M. Vershik, *The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure*, Indag. Math., **16**:3/4 (2005), 499–529.
- [10] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные модели представлений групп токов*, Функц. анализ и его прил., **42**:1 (2008), 22–32.
- [11] А. М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?*, Труды МИРАН, **259** (2007).
- [12] A. Vershik, *Invariant measures for continual Cartan subgroup*, J. Funct. Anal., 2008 (в печати).
- [13] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, *Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции*, Матем. сб., **119**:4 (1982), 521–533.
- [14] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, *Фоковские факторизации и разложения пространства L^2 над общими процессами Леви*, УМН, **58**:3 (351) (2003), 3–50.
- [15] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, *An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process*, J. Funct. Anal., **185**:1 (2001), 274–296.
- [16] R. S. Ismagilov, *Representations of Infinite-Dimensional Groups*, Transl. Math. Monograph., vol. 152, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [17] B. Tsirelson, A. Vershik, *Examples of nonlinear continuous tensor products of measure spaces and non-Fock factorizations*, Rev. Math. Phys., **10**:1 (1998), 81–145.
- [18] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 2, М., Мир, 1970.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Институт системных исследований РАН, Москва
e-mail: graev_36@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
11 августа 2008 г.