Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бирман, Т. А. Суслина, Принцип предельного поглощения и процедура усреднения для периодических эллиптических операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 105–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:23:55

Принцип предельного поглощения и процедура усреднения для периодических эллиптических операторов*

© 2008. М. Ш. БИРМАН, Т. А. СУСЛИНА

Посвящается Израилю Моисеевичу Гельфанду, основателю журнала «Функциональный анализ и его приложения»

1. Класс операторов. Пусть

$$\mathfrak{G} := L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$$

— L_2 -пространство $\mathbb{C}^n$ -значных функций в $\mathbb{R}^d$. Пусть задана положительно определенная $(m \times m)$ -матрица $g(\mathbf{x})$, причем

$$g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d).$$

Матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается *периодической* относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Через $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ обозначим ячейку этой решетки.

Далее, пусть $b(\mathbf{D})$ есть $(m \times n)$ -матричный однородный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Здесь $\mathbf{D} = -i\nabla$. Считаем, что $m \geq n$. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, представляющий собой линейную однородную $(m \times n)$ -матричнозначную функцию от $\boldsymbol{\xi}$. Предполагается, что

$$\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Условие (1) равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad |\boldsymbol{\theta}| = 1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty, \quad (2)$$

с некоторыми постоянными α_0, α_1 . Здесь $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица.

В пространстве $\mathfrak{G}$ рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g)$, порожденный замкнутой положительной формой

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^m} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$, а $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — соответствующий класс Соболева. На формальном уровне оператор $\mathcal{A}(g)$ соответствует дифференциальному выражению

$$\mathcal{A}(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}).$$

2. Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$. Аппроксимация резольвенты. Пусть $\varepsilon > 0$ — параметр. Будем использовать обозначение $g^\varepsilon(\mathbf{x}) := g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ и рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \mathcal{A}(g^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (3)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00209-а).

Коэффициенты оператора (3) быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Одна из основных задач теории усреднений для оператора (3) — *изучение поведения резольвенты* $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ (в некоторой регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В работах [1], [2] изучалась резольвента оператора (3) в точке $\zeta = -1$. Было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ имеет предел по операторной норме в $\mathfrak{G}$, равный резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$. Эффективный оператор имеет вид

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \quad (4)$$

где g^0 — некоторая постоянная положительная $(m \times m)$ -матрица, называемая в теории усреднений *эффективной матрицей*. Для нормы разности резольвент была получена точная по порядку оценка (см. ниже теорему 1).

Напомним определение эффективной матрицы. Для данного вектора $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ рассмотрим (слабое) Γ -периодическое решение $\mathbf{v}_{\mathbf{C}} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ следующей задачи:

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{v}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ — подпространство в классе Соболева $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, состоящее из тех функций, Γ -периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Эффективная матрица g^0 определяется соотношением

$$g^0 \mathbf{C} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m.$$

Следующая теорема была установлена в [1], [2].

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (3), и пусть $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор (4). Тогда выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (5)$$

Постоянная C зависит лишь от постоянных α_0, α_1 из (2), от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

В [1], [2] оценка (5) выводится масштабным преобразованием из следующей оценки:

$$\|(\mathcal{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C\varepsilon^{-1}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

3. Разность резольвент в точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Развивая технику, аналогичную той, которая использовалась в [1], [2] для доказательства теоремы 1, можно получить следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (3) и $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор (4). Тогда

1) при $\zeta = -\eta + i\kappa$, где $\eta > 0$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} &\leq C_1(\eta + |\kappa|)^{-1/2}\varepsilon + C_2\varepsilon^2, \\ \zeta &= -\eta + i\kappa, \quad \eta > 0, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0; \end{aligned} \quad (6)$$

2) при $\zeta = \eta + i\kappa$, где $\eta \geq 0$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \\ & \leq (C_3(\eta + |\kappa|)^{-1/2} + C_4\eta^{1/2}|\kappa|^{-1} + C_5\eta^{3/2}\kappa^{-2})\varepsilon + C_6\varepsilon^2, \quad (7) \\ & \zeta = \eta + i\kappa, \quad \eta \geq 0, \quad \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Постоянные C_j , $1 \leq j \leq 6$, зависят лишь от постоянных α_0, α_1 из (2), от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ .

Считая, что $0 < \varepsilon \leq 1$ и загроуляя оценки (6), (7), получаем

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq (C_1(\eta + |\kappa|)^{-1/2} + C_2)\varepsilon, \\ & \zeta = -\eta + i\kappa, \quad \eta > 0, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ & \|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq (C_7(\eta + 1)^{3/2}\kappa^{-2} + C_8)\varepsilon, \\ & \zeta = \eta + i\kappa, \quad \eta \geq 0, \quad \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь $C_7 = \frac{1}{4}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + C_5$, $C_8 = \frac{3}{4}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + C_6$.

Полагая $\kappa = \pm\varepsilon^\sigma$ в (8), приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. При $0 < \sigma < 1/2$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_\varepsilon - (\eta \pm i\varepsilon^\sigma)I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - (\eta \pm i\varepsilon^\sigma)I)^{-1}\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \\ & \leq (C_7(\eta + 1)^{3/2} + C_8)\varepsilon^{1-2\sigma}, \quad \eta \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (9) \end{aligned}$$

4. Принцип предельного поглощения для эффективного оператора.

Рассмотрим «окаймленную» резольвенту для оператора $\mathcal{A}^0$:

$$\mathcal{B}^0(\eta + i\kappa; \delta) := \langle \mathbf{x} \rangle^{-1/2-\delta} (\mathcal{A}^0 - (\eta + i\kappa)I)^{-1} \langle \mathbf{x} \rangle^{-1/2-\delta}, \quad \delta > 0, \quad (10)$$

где $\langle \mathbf{x} \rangle = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{1/2}$. Операторы такого типа характерны для теории рассеяния.

Для упрощения ссылок предположим сначала, что оператор (3) имеет вид $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}$ (оператор акустики). Это соответствует случаю $n = 1$, $m = d$. Тогда эффективный оператор (4) имеет вид $\mathcal{A}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}$. Из теории рассеяния (см. [3], [4]) известно, что операторы (10) в этом случае имеют пределы по операторной норме в $\mathfrak{G}$ при $\kappa \rightarrow \pm 0$, если $\eta > 0$. Обозначим эти пределы через $\mathcal{B}_\pm^0(\eta; \delta)$. Более того, в [3], [4] установлено следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $\mathcal{A}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}$. Тогда справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}^0(\eta + i\kappa; \delta) - \mathcal{B}_\pm^0(\eta; \delta)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C(\eta; \delta)|\kappa|^\vartheta, \quad \eta > 0, \quad \pm\kappa > 0,$$

где $\vartheta = \delta$ при $0 < \delta < 1$, $\vartheta < 1$ при $\delta = 1$ и $\vartheta = 1$ при $\delta > 1$.

Существование пределов окаймленной резольвенты (10) при $\kappa \rightarrow \pm 0$ принято называть *принципом предельного поглощения*.

Д. Р. Яфаев сообщил авторам, что полный аналог предложения 4 справедлив и для операторов (4) в общем случае (см. [5, предложение 2.4.1]).

5. Принцип предельного поглощения для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$. Положим

$$\mathcal{B}_\varepsilon^{(\pm)}(\eta; \sigma; \delta) := \langle \mathbf{x} \rangle^{-1/2-\delta} (\mathcal{A}_\varepsilon - (\eta \pm i\varepsilon^\sigma)I)^{-1} \langle \mathbf{x} \rangle^{-1/2-\delta}. \quad (11)$$

Из (9) с учетом обозначений (10) и (11) следует, что

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{(\pm)}(\eta; \sigma; \delta) - \mathcal{B}^0(\eta \pm i\varepsilon^\sigma; \delta)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq (C_7(\eta + 1)^{3/2} + C_8)\varepsilon^{1-2\sigma},$$

$$\delta > 0, \eta \geq 0, 0 < \sigma < 1/2, 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Отсюда и из сказанного в разд. 4 вытекает следующий результат.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon^{(\pm)}(\eta; \sigma; \delta)$ — оператор (11) и $\mathcal{B}_\pm^0(\eta; \delta)$ — предел операторов (10) при $\kappa \rightarrow \pm 0$. При этом $0 < \sigma < 1/2$, $\delta > 0$ и $\alpha > 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ операторы $\mathcal{B}_\varepsilon^{(\pm)}(\eta; \sigma; \delta)$ сходятся по операторной норме в $\mathfrak{G}$ к оператору $\mathcal{B}_\pm^0(\eta; \delta)$, причем выполнена оценка

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^{(\pm)}(\eta; \sigma; \delta) - \mathcal{B}_\pm^0(\eta; \delta)\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq (C_7(\eta + 1)^{3/2} + C_8)\varepsilon^{1-2\sigma} + C(\eta; \delta)\varepsilon^{\sigma\vartheta},$$

$$\delta > 0, \eta > 0, 0 < \sigma < 1/2, 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $\vartheta = \delta$ при $0 < \delta < 1$, $\vartheta < 1$ при $\delta = 1$, $\vartheta = 1$ при $\delta > 1$.

Таким образом, окаймленная резольвента (11) оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет пределы сверху и снизу на положительной полуоси $\eta > 0$. При этом резольвенту оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ (с быстро осциллирующим коэффициентом $g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$) следует вычислять в точке $\zeta = \eta \pm i\varepsilon^\sigma$ (при $0 < \sigma < 1/2$), которая сама зависит от ε определенным образом. Факт, установленный в теореме 5, можно считать некоторым аналогом принципа предельного поглощения для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$.

6. Благодарности. Авторы искренне благодарят Д. Р. Яфаева за ценные консультации относительно принципа предельного поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Sh. Birman, T. A. Suslina, in: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Operator Theory: Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, 71–107. [2] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108. [3] S. T. Kuroda, J. Math. Soc. Japan, **25**:1 (1973), 75–104. [4] S. T. Kuroda, J. Math. Soc. Japan, **25**:2 (1973), 222–234. [5] D. R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory. Analytic Theory*, Amer. Math. Soc. (в печати).

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
email: mbirman@list.ru

Поступило в редакцию
1 августа 2008 г.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
email: suslina@list.ru