Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ , *Функци. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 2–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:55:24

Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ

© 2008. М. С. АГРАНОВИЧ*

*Дорогому Израилю Моисеевичу Гельфанду
в связи с его 95-летием*

§1. Введение

1.1. Постановка задач и основные утверждения. Для облегчения чтения мы будем рассматривать скалярное уравнение 2-го порядка до §6, где будут кратко объяснены обобщения. Оно имеет вид

$$Lu = \lambda u + f \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1.1)$$

где L — оператор 2-го порядка для простоты вида

$$L = - \sum \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + c(x)u(x) \quad (1.1.2)$$

и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с липшицевой границей Γ . Пример: уравнение $-\Delta u = \lambda u + f$. Коэффициенты $a_{j,k}(x)$ подчинены равномерному условию Липшица, коэффициент $c(x)$ — условию измеримости и ограниченности. Через ∂_k обозначены частные производные $\partial/\partial x_k$. При желании можно включить в оператор L и члены 1-го порядка. Матрица $A(x) = (a_{j,k}(x))$ не предполагается вещественной или эрмитовой. Условие сильной эллиптичности [43] имеет вид

$$\operatorname{Re} A(x) = \frac{1}{2}[A(x) + A^*(x)] \geq c_0 I \quad (x \in \Omega), \quad (1.1.3)$$

где I — единичная матрица и c_0 — положительная постоянная. Это условие по непрерывности всегда можно усилить: при некотором $\theta > 0$ и $|\psi| \leq \theta$

$$\operatorname{Re}[e^{i\psi} A(x)] \geq c'_0 I \quad (x \in \Omega). \quad (1.1.4)$$

При исследовании граничных задач в липшицевых областях обычно используются потенциалы — объемный и поверхностные — и соответствующие интегральные уравнения. Наш же подход, как в [5] и [6], является чисто вариационным. Оператору (1.1.2) соответствует полуторалинейная форма

$$\Phi(u, v) = \int_{\Omega} \sum a_{jk}(x) \partial_k u(x) \cdot \overline{\partial_j v(x)} dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) \overline{v(x)} dx. \quad (1.1.5)$$

Мы будем рассматривать задачи Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями. Их вариационная (или слабая) постановка имеет вид

$$\Phi(u, v) = \lambda(u, v)_{\Omega} + (f, v)_{\Omega}, \quad (1.1.6)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00287.

где v — произвольная «пробная» функция. Сначала мы уточним эту постановку в пространствах потенциалов (или бесселевых потенциалов). В задаче Дирихле

$$u \in \tilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad f \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega), \quad v \in \tilde{H}_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega). \quad (1.1.7)$$

Здесь и дальше

$$|s| < 1/2, \quad 1 < p < \infty, \quad pp' = p + p'. \quad (1.1.8)$$

Определения пространств $H_p^\sigma = H_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $H_p^\sigma(\Omega)$ мы напоминаем в п. 1.2. Через $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ обозначено подпространство в H_p^σ , состоящее из элементов с носителями в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω (что означает подчинение решения однородным условиям Дирихле). В задаче Неймана

$$u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad f \in \tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega), \quad v \in H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega). \quad (1.1.9)$$

Смысл последнего слагаемого в (1.1.6) также объясняется в п. 1.2.

Положим $t = 1/p$. Допустимые пары индексов (s, t) — это точки квадрата

$$Q = \{(s, t) : |s| < 1/2, 0 < t < 1\}. \quad (1.1.10)$$

Для этих задач удается доказать их однозначную разрешимость при $\operatorname{Re} \lambda = -\mu$, $\mu \geq \mu_0$ с достаточно большим μ_0 в прямоугольнике

$$Q_\delta = \{(s, t) : |s| < 1/2, |t - 1/2| < \delta\}, \quad (1.1.11)$$

где число $\delta \in (0, 1/2]$ зависит от оператора (1.1.2) и области Ω [6].

В центре квадрата Q мы имеем вариационные задачи, лишь общностью отличающиеся от классических задач из учебников математической физики. Они однозначно разрешимы в силу леммы Вишика [43]–Лакса–Мильграма [25].

Определение (1.1.6) в более общих пространствах, чем в центре квадрата, встречается в литературе. Для нас оно является исходным. Но оно бесполезно вне центра, если нет дополнительных аналитических средств. У нас такими средствами являются метод Саваре исследования гладкости решений в липшицевых областях (см. [37] и [6]), использующий вариационную природу рассматриваемых задач и обобщающий метод разностных отношений Ниренберга [34], и средства теории интерполяции. Мы совсем не используем поверхностные потенциалы, что позволяет обойтись без нежелательных ограничений в случае задачи Неймана для систем. См. пояснения в [5], §4. С другой стороны, при помощи потенциалов и интегральных уравнений удастся существенно расширить область Q_δ однозначной разрешимости в случае уравнения Бельтрами–Лапласа (см. [33]).

Сначала при $t = 1/2$, $|s| < 1/2$ доказываются теорема о гладкости решений (если решение отвечает точке (s, t) , а правая часть — точке (s', t) с $s' > s$, то решение отвечает точке (s', t)) и теорема об однозначной разрешимости. В случае самосопряженной вещественной матрицы $A(x)$ это теоремы Саваре [37], но они обобщаются не только на уравнения с несамосопряженными матрицами $A(x)$, но и на общие сильно эллиптические системы [6] при некоторых естественных дополнительных предположениях. Уже в методе Саваре используются тонкие средства теории интерполяции. Экстраполяция этих результатов на $(s, t) \in Q_\delta$ получена в [6] при помощи оценки Шнейберга из [39]. Однако все это результаты при фиксированном λ .

Рассмотрим для определенности задачу Неймана с параметром λ . В §2 мы выведем оценку вида

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} &= \|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} + \mu \|u\|_{\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|_{\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

где C не зависит от u и λ . Здесь $\mu = -\operatorname{Re} \lambda > \mu_0$ с достаточно большим μ_0 . Это фактически оптимальная оценка резольвенты отвечающего задаче оператора $u \mapsto f$. Как следствие мы получим ее с $|\lambda|$ вместо μ для λ из множества

$$\Theta(r, \varphi) = \{\lambda : |\arg \lambda| \geq \varphi, |\lambda| \geq r\} \quad (1.1.13)$$

с $\varphi > \pi/2$. Но последнее ограничение снимается при условии (1.1.4).

Оценки аналогичного вида встречались в работах об общих «гладких» задачах, эллиптических с параметром, см., в частности, [1], [8], и аналогичных задачах в областях с границей, гладкой вне особых точек специального вида (см., например, [24]). Но соответствующие соображения в нынешней ситуации не работают, и *результат выводится из анализа возможностей, предоставляемых методом Саваре, теорией интерполяции и оценкой Шнейберга*.

Нужные нам общие теоремы о спектральных свойствах операторов хорошо известны для операторов в гильбертовых пространствах ([15], гл. XI, [27], [28]), но у нас при $p \neq 2$ пространства H_p^σ и B_p^σ негильбертовы. В абстрактной форме спектральные задачи в банаховых пространствах рассмотрел А. С. Маркус [28], и из его теорем видно, что у нас должно получиться. Мы по существу и следуем его работе, но используем также более поздние публикации.

Маркус пользовался абстрактной теорией Гротендика [19], [20] операторных идеалов и определителей операторов в банаховых пространствах для представления резольвенты в виде отношения целых функций, привлекая дополнительно возможность перехода к степеням компактного оператора. Однако результаты этой теории долгое время оставались многовариантными и условными, хотя ее развитию было посвящено очень много работ. Намного позднее в литературе появились теоремы, которые позволяют добраться до нужных нам конкретных результатов. Хотя эти теоремы вошли в монографии ([23], [35] и др.), обилие определений и вариантов теории заставило автора решать нелегкую методическую задачу поиска, отбора, упрощения и соединения в единую цепочку нужных понятий и результатов. Эту абстрактную подоплеку наших спектральных задач в ее нынешнем состоянии мы излагаем в §3 и надеемся, что она интересна и сама по себе.¹⁾ Ключевыми являются возможность систематического использования (только) аппроксимационных чисел и теорема 3.2.1 о представлении резольвенты в виде отношения целых аналитических функций с точной оценкой их роста. В конце параграфа приводятся и поясняются получающиеся на этой основе теоремы о полноте корневых функций и о суммируемости рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского²⁾, близкие к теоремам Данфорда–Шварца и Лидского в гильбертовом случае и к некоторым из теорем Маркуса в общем случае. В нашей редакции формулировки этих теорем максимально приближены к интересующим нас конкретным задачам и упрощены. Общий итог состоит

¹⁾ Автор очень признателен Р. С. Исмагилову, А. С. Маркусу и М. З. Соломяку за советы, которые помогли найти нужную литературу, и С. Майборода за полезные редакционные замечания.

²⁾ В. Б. Лидский называл его методом Абеля.

в том, что в рамках рассматриваемых здесь вопросов привычная в гильбертовом случае картина в основном распространяется на нужные нам банаховы пространства.

Следует отметить, что наши задачи несколько «лучше» абстрактных: это задачи в шкалах пространств с двумя индексами (s, t) , содержащих и сопряженные пространства, и при $t = 1/2$ это гильбертовы шкалы. Спектр и корневые функции не зависят от (s, t) (ср. [1]). Асимптотика собственных чисел известна в случае самосопряженных задач Дирихле и Неймана [11]. При $p = 2$ полнота и суммируемость получаются из известных теорем для операторов в гильбертовых пространствах [15], [27], [28]. Утверждение о полноте можно распространить на остальные $(s, t) \in Q_\delta$ при помощи теорем вложения и изоморфизмов, определяемых оператором задачи. См. §4, где рассмотрена также задача со спектральным параметром в граничном условии; она немного сложнее. Однако наиболее полные результаты получаются на основе рассмотрений в §3.

В пространствах Бесова $B_p^\sigma(\Omega)$ получаются такие же результаты, как в $H_p^\sigma(\Omega)$. Корневые функции принадлежат пересечению этих пространств.

Еще одно приложение оценки резольвенты — указание пространств, в которых однозначно разрешимы соответствующие нестационарные задачи, см. §5. Здесь мы пользуемся теоремами из теории параболических (или аналитических) полугрупп, см., например, [31], гл. 5, §4. Приложения к нестационарным задачам проще теоремы о суммируемости.

1.2. Функциональные пространства. Пространство H_p^σ совпадает с болевским пространством W_p^σ при целых неотрицательных σ , а пространство B_p^σ — с пространством Слободецкого W_p^σ при нецелых положительных σ . На остальные σ определения распространяются при помощи оператора

$$\Lambda_\tau = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\tau/2}F, \quad (1.2.1)$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, F — преобразование Фурье. Этот оператор изоморфно действует в обеих шкалах, понижая верхний индекс на τ , если $\tau > 0$. Пространства $H_2^\sigma = H_2^\sigma$ и B_2^σ совпадают, и при $\sigma \geq 0$ они совпадают с W_2^σ .

Пространства $H_p^\sigma(\Omega)$ и $B_p^\sigma(\Omega)$ состоят из сужений функций (или обобщенных функций) из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$ на Ω с обычной нормой $\inf$. Важна сопряженность пространств $\tilde{H}_p^{-\sigma}(\Omega)$ и $H_{p'}^\sigma(\Omega)$, а также аналогичных пространств Бесова, относительно формы (мы выписываем ее для задачи Неймана)

$$(f, v)_\Omega = (f, \mathcal{E}v)_{\mathbb{R}^n}, \quad (1.2.2)$$

где $\mathcal{E}$ — универсальный оператор продолжения функций из пространств в Ω до функций из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$ [36]. Функции v и f в (1.1.7) и (1.1.9) принадлежат сопряженным пространствам. В частности, эти пространства рефлексивны. Обобщенное неравенство Шварца имеет вид

$$|(f, v)_\Omega| \leq C \|f\|_{\tilde{H}_p^{-\sigma}(\Omega)} \|v\|_{H_{p'}^\sigma(\Omega)}; \quad (1.2.3)$$

такое же неравенство верно в нормах пространств Бесова. См. [6], [7]. Эти пространства сепарабельны.

В области Ω оказываются нужными *комбинированные шкалы* (см. [42] и [7]). Для пространств потенциалов первая шкала состоит из пространств $H_p^\sigma(\Omega)$ при

$\sigma < 1/p$ и пространства $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ при $\sigma > -1/p'$; при $-1/p' < \sigma < 1/p$ эти пространства отождествляются, поэтому получается единая интерполяционная шкала для комплексного метода в силу теоремы Вольфа (см., например, [21]). Пространства этой шкалы сужаются с ростом σ . Она обслуживает задачу Дирихле. Вторая шкала, обслуживающая задачу Неймана, состоит из пространств $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ при $\sigma < 1/p$ и $H_p^\sigma(\Omega)$ при $\sigma > -1/p'$. Это тоже интерполяционная шкала, в которой пространства сужаются с ростом σ . Аналогичные комбинированные шкалы составляются из пространств Бесова.

Отметим, что имеют место непрерывные вложения $H_p^{\sigma+\varepsilon} \subset B_p^\sigma$ и $B_p^{\sigma+\varepsilon} \subset H_p^\sigma$ или с $\varepsilon = 0$, или, по крайней мере, со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$ (см., например, [41], п. 2.3.4).

В п. 4.2 нам понадобятся пространства $B_p^\sigma(\Gamma)$, $|\sigma| \leq 1$. Нормы в них определяются через нормы в $\mathbb{R}^{n-1}$ при помощи разбиения единицы.

Приготовим оценку формы $\Phi(u, v)$. Пусть u и v — функции соответственно из $H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)$ и $H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)$. Тогда

$$|\Phi(u, v)| \leq C \|u\|_{H_p^{1/2+1/p+s}(\Omega)} \|v\|_{H_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)}. \quad (1.2.4)$$

Действительно, $|(u, v)_\Omega| \leq C' \|u\|_{H_p^0(\Omega)} \|v\|_{H_{p'}^0(\Omega)}$, а при $c = 0$

$$|\Phi(u, v)| \leq \sum |(a_{jk} \partial_j u, \partial_k v)_\Omega| \leq C'' \sum \|\partial_j u\|_{H_p^{1/p-1/2+s}(\Omega)} \|\partial_k v\|_{H_{p'}^{-1/p+1/2-s}(\Omega)};$$

здесь последний верхний индекс равен $1/p' - 1/2 - s$. Мы учли, что функции a_{jk} липшицевы и что $-1/p' < \sigma < 1/p$ для $\sigma = 1/p - 1/2 + s$, поэтому $\tilde{H}$ можно заменить на H . Отсюда сразу получается (1.2.4). Аналогичная оценка получается и в пространствах Бесова.

§2. Оптимальные оценки резольвенты

При наших обозначениях спектр оператора, отвечающего задаче Дирихле или Неймана, находится в правой полуплоскости плюс, возможно, окрестность начала. Наша цель сейчас будет состоять в выводе оценки (1.1.12) в левой полуплоскости. Для определенности мы продолжаем рассматривать задачу Неймана для скалярного уравнения 2-го порядка. Сначала в п. 2.1 мы уточним, что мы имеем в точке $(0, 1/2)$ — центре квадрата Q . Эти результаты следует считать известными, по крайней мере, для классических задач. Затем в п. 2.2 мы рассмотрим все точки квадрата с $t = 1/2$, используя метод Саваре. В этих двух пунктах мы сначала получим оценку старшей нормы решения с не зависящей от параметра постоянной, затем выведем из (1.1.6) оценку младшей нормы с параметром $\mu = -\operatorname{Re} \lambda$. Наконец, в п. 2.3 мы рассмотрим точки с t , близкими к $1/2$, используя оценку Шнейберга и некоторые детали процедур комплексной интерполяции. Через C и C_i будут обозначаться постоянные с нумерацией в пределах пункта; важно, что они не зависят не только от функций, но и от параметра λ .

2.1. Оценки в центре квадрата Q . Положим

$$\Psi_\lambda(u, v) = \operatorname{Re}[\Phi(u, v) - \lambda(u, v)_\Omega], \quad \Psi_\mu(u) = \Psi_\lambda(u, u) = \operatorname{Re} \Phi(u, u) + \mu(u, u)_\Omega. \quad (2.1.1)$$

В отличие от [6] мы сейчас не включаем $\operatorname{Re}(f, u)_\Omega$ в последнюю форму.

Из определения вариационного решения $u \in H^1(\Omega)$ (см. (1.1.6)) следует, что

$$\Psi_\lambda(u, v) = \operatorname{Re}(f, v)_\Omega \quad (f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega), v \in H^1(\Omega)). \quad (2.1.2)$$

При $-\operatorname{Re} \lambda = \mu \geq \mu_0$ с достаточно большим μ_0 мы располагаем неравенством

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \Psi_\mu(u), \quad (2.1.3)$$

поскольку условие (1.1.3) в случае скалярного уравнения обеспечивает коэрцитивность формы Ψ_μ на $H^1(\Omega)$. Существенно, что в (2.1.3) благодаря знаку μ постоянная C_1 не зависит от μ . Согласно (1.2.4) мы имеем

$$|\Phi(u, v)| \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.1.4)$$

Из (2.1.2) при $u = v$ и (2.1.3) получаем $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \mu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_3 \operatorname{Re}(f, u)_\Omega$. Отсюда

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \text{ и, если } f \in L_2(\Omega), \quad \mu \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_5 \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.1.5)$$

В силу (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.4) величина $\mu \|u\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}$ не превосходит

$$C_6 \mu \sup_v \frac{|(u, v)_\Omega|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq C_6 \sup_v \frac{|\Phi(u, v)| + |(f, v)_\Omega|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq C_7 [\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}],$$

что в силу первого из неравенств (2.1.5) дает $\mu \|u\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \leq C_8 \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}$. Это нужная оценка резольвенты в точке $(0, 1/2)$.

В итоге мы имеем в этой точке второе неравенство в (2.1.5) и неравенство

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_9 \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}. \quad (2.1.6)$$

Аналогичные оценки верны в подобластях области Ω .

2.2. Оценки при $t = 1/2$. В этом пункте мы пользуемся методом Саваре. Аргументация излагается конспективно; мы надеемся, что читатель будет иметь под рукой работы [37] и [6].

Ключевой момент состоит в следующем. Предполагая, что $f \in L_2(\Omega)$, нужно получить неравенство

$$\|u\|_{B_{2,\infty}^{3/2}(\Omega)}^2 \leq C_1 \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad (2.2.1)$$

(см. (3.26) в [6]). Слева — норма в соответствующем пространстве Бесова, см., например, [37] или [6].

Обозначим через O_ρ открытый круг с центром в фиксированной граничной точке (малого) радиуса ρ и через Ω_ρ его пересечение с областью Ω . Пусть $\varphi(x)$ — бесконечно гладкая функция со значениями на $[0, 1]$, равная 1 в O_ρ и нулю вне $O_{2\rho}$. Положим

$$\mathcal{T}_h v(x) = \varphi(x) v(x+h) + [1 - \varphi(x)] v(x).$$

Разность $\mathcal{T}_h v(x) - v(x)$ — это «локализованное приращение» функции $v(x)$. Сдвиг на h в случае задачи Неймана происходит внутри области Ω .

Нам сейчас нужно получить для решения оценку (см. (3.13) в [6])

$$\Psi_\mu(\mathcal{T}_h u) - \Psi_\mu(u) \leq C_2 |h| \|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})} [\|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})} + \|f\|_{L_2(\Omega_{3\rho})}]. \quad (2.2.2)$$

Она получается из следующих неравенств с использованием (2.1.5):

$$\Phi(\mathcal{T}_h u) - \Phi(u) \leq C_3 \|h\| \|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})}^2, \quad (2.2.3)$$

$$(\mathcal{T}_h u, \mathcal{T}_h u)_\Omega - (u, u)_\Omega \leq C_4 \|h\| \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_{3\rho})}^2, \quad (2.2.4)$$

$$(f, \mathcal{T}_h u - u)_\Omega \leq C_5 \|h\| \|f\|_{L_2(\Omega_{2\rho})} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_{3\rho})}. \quad (2.2.5)$$

Это неравенства (3.21)–(3.23) из [6] (с $m = 1$); постоянные справа не зависят от λ , так как левые части не содержат λ . Неравенство (2.2.4) умножаем на μ .

Действуя теперь, как в [6], мы можем при помощи интерполяции доказать обратимость оператора

$$L_\lambda = L - \lambda I: H^{1+s}(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^{-1+s}(\Omega) \quad (2.2.6)$$

($0 < s < 1/2$) с равномерной по λ оценкой

$$\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C_6 \|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}. \quad (2.2.7)$$

Далее для получения оценки нормы с параметром действуем, как в предыдущем пункте. Согласно (1.2.4)

$$|\Phi(u, v)| \leq C_7 \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}. \quad (2.2.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu \|u\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)} &\leq C_8 \mu \sup_v \frac{|(u, v)_\Omega|}{\|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}} \leq C_9 \sup_v \frac{|\Phi(u, v)| + |(f, v)_\Omega|}{\|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}} \\ &\leq C_{10} [\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} + \|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}] \leq C_{11} \|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)} \end{aligned}$$

с учетом (2.2.8) и (2.2.7). В итоге получаем нужную оценку

$$\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C_{12} \|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}. \quad (2.2.9)$$

Для распространения результата на $s \in (-1/2, 0)$ используем двойственность следующим образом. Пусть $s \in (0, 1/2)$ и u — решение уже рассмотренной задачи из $H^{1+s}(\Omega)$, так что для него мы уже имеем оценку (2.2.9) с не зависящей от λ постоянной. Сейчас мы получим аналогичную оценку для принадлежащего $H^{1-s}(\Omega)$ решения v задачи Неймана для уравнения $L^* v - \bar{\lambda} v = g$, где L^* — оператор, формально сопряженный к L . Из определения вариационных решений следует, что $(f, v)_\Omega = (u, g)_\Omega$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{1-s}(\Omega)} &\leq C_{13} \sup_f \frac{|(f, v)_\Omega|}{\|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}} \leq C_{14} \sup_f \frac{|(u, g)_\Omega|}{\|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}} \\ &\leq C_{15} \sup_f \frac{\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \|g\|_{\tilde{H}^{-1-s}(\Omega)}}{\|f\|_{\tilde{H}^{-1+s}(\Omega)}} \leq C_{15} \|g\|_{\tilde{H}^{-1-s}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ясно, что отсюда следует нужный результат.

2.3. Оценки при $t \neq 1/2$. Теперь мы должны использовать результат Шнейберга [39]. Приведем его. Пусть (E_0, E_1) и (F_0, F_1) — пары банаховых пространств для простоты с непрерывными и плотными вложениями $E_1 \subset E_0$, $F_1 \subset F_0$. Пусть $\{E_\alpha\}$ и $\{F_\alpha\}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) — комплексные интерполяционные шкалы. (См., например, [9].) Далее, пусть A — ограниченный оператор из E_0 в F_0 и его сужение на E_1 — ограниченный оператор из E_1 в F_1 . Тогда сужение A_t оператора A на E_t — ограниченный оператор из E_t в F_t , $0 < t < 1$.

Пусть M — максимальная из норм операторов A_0 и A_1 . Если оператор A_t имеет ограниченный обратный B_t , то через $\beta(t)$ обозначим норму последнего оператора. Предположим, что обратимость имеет место при $t = 1/2$. Тогда она экстраполируется, а именно, она имеет место при

$$q(t) < [M\beta(\frac{1}{2})]^{-1}, \quad \text{где } q(t) = \operatorname{tg}[\frac{\pi}{2}|t - \frac{1}{2}|]. \quad (2.3.1)$$

При этом

$$\beta(t) \leq \frac{M\beta(\frac{1}{2}) - q(t)}{M[1 - q(t)M\beta(\frac{1}{2})]}. \quad (2.3.2)$$

Операторы B_t автоматически согласованы: если $t_1 < t_2$, то $B_{t_2} = B_{t_1}|_{F_{t_2}}$.

Результат Шнейберга используется следующим образом. Для любого s на $(-1/2, 1/2)$ рассматриваем вертикальный отрезок с серединой в точке $(s, 1/2)$ фиксированной длины, меньшей 1. Нужно получить оптимальную оценку резольвенты при $|t - 1/2| < \delta$ с некоторым $\delta > 0$, не зависящим от s , равномерную по λ .

Но для этого надо показать, что мы можем воспользоваться приведенным результатом, рассматривая нормы, зависящие от параметра. С этой целью обратимся к доказательству теорем об интерполяции. См. [9], мы в основном ограничимся ссылками на эту книгу.

В теории пространств потенциалов и Бесова, как известно, важную роль играет «диадическое» разбиение единицы (см., например, [9], п. 6.2):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) \equiv 1 \quad \text{при } \xi \neq 0. \quad (2.3.3)$$

Здесь $\operatorname{supp} \varphi_k$ лежит в шаровом слое $\{\xi : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$ при $k \geq 1$. Положим $\psi_k(x) = F^{-1}\varphi_k(\xi)$. Любую функцию u из $\mathcal{S}$ (пространство Шварца быстро убывающих бесконечно гладких функций) можно представить в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_k * u)(x). \quad (2.3.4)$$

Это верно и для функций (или обобщенных функций) u из H_p^σ .

Пространство H_p^σ является ретрактом пространства $L_p(l_2^\sigma)$. См. [9], п. 6.4. Здесь l_2^σ — пространство числовых последовательностей $a = \{a_k\}_0^\infty$ с нормой

$$\|a\|_{l_2^\sigma} = \left(\sum_0^\infty (2^{k\sigma} |a_k|)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.3.5)$$

Пространство $L_p(l_2^\sigma)$ состоит из функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в l_2^σ , принадлежащих L_p . Норма в $L_p(l_2^\sigma)$ определяется равенством

$$\|a(x)\|_{L_p(l_2^\sigma)} = \| \|a(x)\|_{l_2^\sigma} \|_{L_p}. \quad (2.3.6)$$

Утверждение о ретракте означает, что имеются непрерывные линейные отображения $\mathcal{J} : H_p^\sigma \rightarrow L_p(l_2^\sigma)$ и $\mathcal{P} : L_p(l_2^\sigma) \rightarrow H_p^\sigma$, произведение $\mathcal{P}\mathcal{J}$ которых — единичный оператор. Здесь $\mathcal{J}u(x) = a(x) = \{a_k(x) = (\psi_k * u)(x)\}$. Важно, что эти операторы не зависят от σ и p .

Таким образом, мы имеем эквивалентность

$$\|u(x)\|_{H_p^\sigma} \asymp \|a(x)\|_{L_p(l_2^\sigma)}, \quad (2.3.7)$$

здесь и дальше в том смысле, что отношение норм заключено между положительными постоянными, не зависящими от индексов и рассматриваемых функций. Нужная теорема об интерполяции пространств H_p^σ

$$[H_{p_0}^\sigma, H_{p_1}^\sigma]_\theta = H_p^\sigma \quad \left(0 < \theta < 1, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \right) \quad (2.3.8)$$

выводится из теоремы об интерполяции пространств L_p функций со значениями в банаховом пространстве (l_2^σ) .

Положим теперь

$$\|u(x)\|_{H_p^\sigma} = \|u(x)\|_{H_p^\sigma} + \mu \|u(x)\|_{H_p^{\sigma-2}}, \quad \|a(x)\|_{L_p(l_2^\sigma)} = \|\|a(x)\|_{l_2^\sigma} + \mu \|a(x)\|_{l_2^{\sigma-2}}\|_{L_p}.$$

Несложно проверить, что

$$\|u(x)\|_{H_p^\sigma} \asymp \|\|a(x)\|\|_{L_p(l_2^\sigma)}, \quad (2.3.9)$$

где постоянные, ограничивающие отношение норм, не зависят и от μ .

Результат переносится на пространства $H_p^\sigma(\Omega)$, $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega)$ и на пространства комбинированных шкал. Ср. [41], пп. 1.2.4 и 1.17.

Отсюда следует, что при интерполяции по вертикальным отрезкам получается нужный результат:

Теорема 2.3.1. *При условии сильной эллиптичности существует такое $\delta \in (0, 1/2]$ и такое $\mu_0 > 0$, что задача Неймана для уравнения (1.1.1) с правой частью из $\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ имеет для $\mu = -\operatorname{Re} \lambda > \mu_0$ одно и только одно решение при $|s| < 1/2$, $|t - 1/2| < \delta$ с априорной оценкой*

$$\|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)}, \quad (2.3.10)$$

где постоянная не зависит от u и λ .

Фактически оценка двусторонняя: норма справа оценивается через норму слева в силу (1.1.6), (1.2.3) и (1.2.4).

2.4. Случай задачи Дирихле. Все происходит точно так же, только норма с параметром решения определяется равенством

$$\|u\|_{\tilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} = \|u\|_{\tilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} + \mu \|u\|_{H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)}, \quad (2.4.1)$$

а априорная оценка имеет вид

$$\|u\|_{\tilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)}. \quad (2.4.2)$$

Снова получается двусторонняя оценка.

2.5. Оценки в пространствах Бесова. В этих пространствах получаются аналогичные результаты. Здесь существенно, что при $p = 2$ эти пространства совпадают с пространствами потенциалов.

В пространстве B_p^σ можно пользоваться следующей нормой (это l_p^σ -норма последовательности $\{\|a_k(x)\|_{L_p}\}$ и $l_p^\sigma(L_p)$ -норма последовательности $a(x)$):

$$\|u\|_{B_p^\sigma} \asymp \|a(x)\|_{l_p^\sigma(L_p)} = \left| \sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\sigma} \|\psi_k * u\|_{L_p}]^p \right|^{1/p}. \quad (2.5.1)$$

В [9], п. 5.6.3, содержится формула (с такими же θ и p , как в (2.3.8))

$$[l_{p_0}^\sigma(L_{p_0}), l_{p_1}^\sigma(L_{p_1})]_\theta = l_p^\sigma(L_p). \quad (2.5.2)$$

Пространство B_p^σ является ретрактом пространства $l_p^\sigma(L_p)$. Отображения $\mathcal{J}$ и $\mathcal{P}$ — те же самые. Этим путем получается теорема об интерполяции пространств Бесова, аналогичная (2.3.8).

Рассмотрим теперь нормы с параметром μ :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_{B_p^\sigma} &= \|u(x)\|_{B_p^\sigma} + \mu \|u(x)\|_{B_p^{\sigma-2}}, \\ \|a(x)\|_{l_p^\sigma(L_p)} &= \|a(x)\|_{l_p^\sigma(L_p)} + \mu \|a(x)\|_{l_p^{\sigma-2}(L_p)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что они эквивалентны:

$$\|u(x)\|_{B_p^\sigma} \asymp \|a(x)\|_{l_p^\sigma(L_p)} \quad (2.5.3)$$

с оценками отношения норм, не зависящими и от μ . Отсюда следует нужный нам результат об интерполяции по вертикальным отрезкам. В итоге получаем, что теорема типа теоремы 2.3.1 верна и для пространств Бесова.

Мы не рассматриваем общие пространства Бесова B_{pq}^σ и Трибеля–Лизоркина F_{pq}^s , хотя это по-видимому возможно. (У нас $B_p^s = B_{pp}^s$ и $H_p^s = F_{p2}^s$, см. [41].)

Отметим, что в работе [38] получены оценки резольвенты в L_p для задачи Дирихле в случае сильно эллиптической системы с постоянными коэффициентами и симметричной вещественной главной частью при помощи потенциалов.

§ 3. Спектральные задачи в банаховых пространствах

3.1. Аппроксимационные числа. Пусть X_1 и X_2 — (бесконечномерные) банаховы пространства и T — компактный оператор из X_1 в X_2 . Для T определены аппроксимационные числа $a_k(T)$, $k = 1, 2, \dots$. Для краткости будем называть их *a-числами*. Они определяются следующим образом:

$$a_k(T) = \inf \|T - K\|, \quad \text{где } \dim K < k. \quad (3.1.1)$$

Отметим некоторые свойства этих чисел (см., например, [23], [35], [16], [17]).

1°. $\|T\| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq \dots$

2°. Для двух компактных операторов S, T из X_1 в X_2

$$a_{k+l-1}(S+T) \leq a_k(S) + a_l(T).$$

3°. Если S и R — ограниченные операторы и произведение STR имеет смысл, то

$$a_k(STR) \leq \|S\| a_k(T) \|R\|.$$

4°. Если произведение ST компактных операторов имеет смысл, то

$$a_{k+l-1}(ST) \leq a_k(S) a_l(T).$$

5°. Отсюда следует, что при $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$

$$a_k(S) = O(k^{-\gamma_1}), \quad a_k(T) = O(k^{-\gamma_2}) \implies a_k(ST) = O(k^{-\gamma_1-\gamma_2}).$$

6°. Если T — оператор размерности m , то $a_k(T) = 0$ при $k > m$.

7°. $a_k(T) = a_k(T^*)$. См. [16], с. 55.

Если пространства X_1 и X_2 гильбертовы, то *a-числа* совпадают с сингулярными числами $s_k(T)$ — собственными значениями оператора $\sqrt{TT^*}$ (или, что то же, $\sqrt{T^*T}$). В общих банаховых пространствах ничего похожего нет.

Пусть $X_1 = X_2$. Будем обозначать через $\lambda_k(T)$ ($k = 1, 2, \dots$) все ненулевые собственные значения оператора T , занумерованные в порядке невозрастания их модулей с учетом кратностей.

8°. При любом $q > 0$ справедливо неравенство типа Вейля

$$\sum_1^{\infty} |\lambda_k(T)|^q \leq C_q \sum_1^{\infty} a_k(T)^q. \quad (3.1.2)$$

В гильбертовых пространствах оно было давно известно, а для банаховых пространств доказано Кёнигом в 1978 г. (см. [23], с. 85), намного позднее работы [28]; оно было усилением результата из [29].

Через $\mathcal{A}_q$, $q > 0$, обозначим операторный идеал, определяемый условием

$$\sum_1^{\infty} a_k(T)^q < \infty. \quad (3.1.3)$$

В гильбертовом случае (иногда и в банаховом) в литературе используется обозначение $\mathfrak{S}_q$. Для операторов из $\mathcal{A}_q$ мы имеем сходимость ряда из $|\lambda_k(T)|^q$. Корень степени q из левой части — квазинорма в $\mathcal{A}_q$.

9°. $a_k(T) = O(k^{-\gamma}) \implies \lambda_k(T) = O(k^{-\gamma})$ (здесь $\gamma > 0$). См. [16], с. 7.

Для компактных операторов в банаховых пространствах имеются и другие системы « s -чисел», а также система энтропийных чисел $e_k(T)$; но для нас именно a -числа наиболее удобны.

В наших приложениях мы будем иметь сепарабельные банаховы пространства X и Y с компактным и плотным вложением Y в X . Задан оператор $\mathcal{T}$, действующий ограниченным образом из X в Y , поэтому в X действует компактный оператор $T = J\mathcal{T}$, где J — оператор вложения Y в X . Для простоты примем, что оператор $\mathcal{T}$ отображает X на Y изоморфно. Обратный оператор из Y в X обозначим через $\mathcal{L}$, а через L — неограниченный оператор в X с областью определения Y , действующий как $\mathcal{L}$: $Ly = \mathcal{L}y$. Оператор L замкнут и имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений $1/\lambda_k(T)$.

Нам понадобится оператор $(I - \lambda T)^{-1}$. Это мероморфная операторнозначная функция от λ с полюсами в точках $1/\lambda_k(T)$. Резольвента Фредгольма компактного оператора T и резольвента неограниченного оператора L

$$R_T^{(f)}(\lambda) = T(I - \lambda T)^{-1}, \quad R_L(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1} \quad (3.1.4)$$

совпадают.

Именно для оператора J мы сможем предположить известной оценку $a_k(J) = O(k^{-\gamma})$, как следствие она получается для оператора T и оказывается равномерной по операторам $\mathcal{T}$ с единичной нормой.

Точные оценки a -чисел для вложений конкретных пространств типа Соболева восходят к работе Бирмана–Соломяка [10] о кусочно-полиномиальных приближениях функций, см. также [12]. Несколько иначе действовали Эдмундс и Трибель, получившие следующий результат для областей с бесконечно гладкой границей (1989–92, см., например, [17], п. 3.3.4). На липшицевы области он распространяется автоматически благодаря наличию универсального оператора продолжения.

Предложение 3.1.1 (Эдмундс, Трибель). Пусть $\sigma_1 < \sigma_2$ и $\gamma = (\sigma_2 - \sigma_1)/n$. Тогда для пары $X = H_p^{\sigma_1}(\Omega)$, $Y = H_p^{\sigma_2}(\Omega)$ и аналогичной пары пространств Бесова $a_k(J) = O(k^{-\gamma})$.

Пусть теперь $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$, $\gamma = (\sigma_2 - \sigma_1)/n$, а X и Y — одна из следующих четырех пар: 1) $\tilde{H}_p^{\sigma_1}(\Omega)$, $H_p^{\sigma_2}(\Omega)$, 2) $H_p^{\sigma_1}(\Omega)$, $\tilde{H}_p^{\sigma_2}(\Omega)$; 3) и 4) — аналогичные пары пространств Бесова.

Предложение 3.1.2. В случаях 1)–4) $a_k(J) = O(k^{-\gamma})$.

Объясним доказательство на примере первой пары пространств. Представим оператор J в виде $J = J_2 J_1$, где J_1 — оператор вложения пространства $H_p^{\sigma_2}(\Omega)$ в $H_p^0(\Omega) = L_p(\Omega) = \tilde{H}_p^0(\Omega)$ и J_2 — оператор вложения пространства $\tilde{H}_p^0(\Omega)$ в $\tilde{H}_p^{\sigma_1}(\Omega)$. Мы имеем $a_k(J_1) = O(k^{-\sigma_2/n})$ в силу предложения 3.1.1. Оператор J_2 является сопряженным к оператору вложения $H_p^{|\sigma_1|}(\Omega)$ в $H_p^0(\Omega)$ (относительно формы вида (1.2.2)). Поэтому $a_k(J_2) = O(k^{\sigma_1/n})$ в силу того же предложения и 7°. Отсюда получаем $a_k(J) = O(k^{-\gamma})$ в силу 5°. $\square$

3.2. Определители и представление резольвенты. Сначала предположим, что оператор T в X принадлежит $\mathcal{A}_q$ с $q \leq 1$. Тогда мы можем составить *спектральный определитель* (с $\lambda_j = \lambda_j(T)$)

$$d_T(\lambda) = d(I - \lambda T) = \prod_1^\infty (1 - \lambda \lambda_j). \quad (3.2.1)$$

Известно и элементарно проверяется, что это целая аналитическая функция от λ с ростом не выше чем порядка q и минимального типа (ср. с теоремой 7 в [26], гл. I):

$$|d_T(\lambda)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |\lambda|^q) \quad (3.2.2)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Проблемой, однако, оказывается нужное нам дальше *мультипликативное свойство* (очевидное для конечномерных S и T)

$$d(I - T)d(I - S) = d(I - (T + S - TS)) \quad (3.2.3)$$

(см. [35], с. 194). С другой стороны, в литературе имеется восходящее к Гротендику и использованное в [28] *аксиоматическое* определение определителя $d(I - T)$. См. [35], с. 185. Аксиомы включают свойство (3.2.3). На некоторых операторных идеалах такой определитель оказывается единственным, если добавить некоторое предположение о непрерывности, а иногда это именно спектральный определитель (3.2.1). Счастливым образом именно так обстоит дело с идеалом $\mathcal{A}_1$. См. [35], с. 210.¹⁾

В произведении

$$\Delta_T(\lambda) = d_T(\lambda)(I - \lambda T)^{-1} \quad (3.2.4)$$

первый множитель гасит все особенности второго, так что это операторнозначная целая аналитическая функция от λ . Мы имеем при $\lambda \neq 1/\lambda_j(T)$

$$(I - \lambda T)^{-1} = \frac{\Delta_T(\lambda)}{d_T(\lambda)} \quad (3.2.5)$$

¹⁾Может быть, по аналогии с гильбертовым случаем именно операторы из $\mathcal{A}_1$ следовало бы называть ядерными. Но у Гротендика и в дальнейших работах ядерные операторы определены иначе. Мы не пользуемся этим определением.

и покажем, что норма числителя оценивается так же, как знаменатель. Тем самым мы докажем следующую теорему, пока при $0 < q \leq 1$:

Теорема 3.2.1. Пусть $T \in \mathcal{A}_q$. Тогда справедлива формула (3.2.5), где в знаменателе — целая аналитическая функция с ростом не выше чем порядка q и минимального типа, а в числителе — операторнозначная целая аналитическая функция с аналогичной оценкой нормы: при любом $\varepsilon > 0$

$$\|\Delta_T(\lambda)\| \leq C'_\varepsilon \exp(\varepsilon|\lambda|^q). \quad (3.2.6)$$

Доказательство для $q \leq 1$. Оценим сначала билинейную форму оператора $\Delta_T(\lambda)$. Для этого выведем формулу типа формулы Мацаева в [28], с. 534. (В отношении гильбертова случая там приведены ссылки на [30] и [18], гл. 5, §5, п. 1. Ниже мы немного отклоняемся от [28].)

Обозначим через $\langle x, z \rangle$ значение функционала z из сопряженного к X пространства X^* на элементе $x \in X$. Построим одномерное возмущение оператора $I - \lambda T$ следующим образом. Возьмем $x \in X$, $z \in X^*$. Одномерный оператор $\langle \cdot, z \rangle x$, конечно, тоже принадлежит $\mathcal{A}_q$. Рассмотрим оператор

$$I - \lambda T + \lambda \langle \cdot, z \rangle x = (I - \lambda T)(I + \lambda \langle \cdot, z \rangle (I - \lambda T)^{-1}x). \quad (3.2.7)$$

В силу (3.2.3)

$$\begin{aligned} d(I - \lambda T + \lambda \langle \cdot, z \rangle x) &= d(I - \lambda T)d(I + \lambda \langle \cdot, z \rangle (I - \lambda T)^{-1}x) \\ &= d(I - \lambda T)(1 + \lambda \langle (I - \lambda T)^{-1}x, z \rangle). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Здесь мы вычислили определитель одномерного оператора. Отсюда и из (3.2.5)

$$\langle \Delta_T(\lambda)x, z \rangle = \lambda^{-1}[d(I - \lambda T + \lambda \langle \cdot, z \rangle x) - d(I - \lambda T)]. \quad (3.2.9)$$

Это и есть формула типа Мацаева. Из нее с учетом 1°, 2° и 6° видно, что

$$|\langle \Delta_T(\lambda)x, z \rangle| \leq C_\varepsilon(x, z) \exp(\varepsilon|\lambda|^q).$$

Используя теорему Банаха–Штейнхауза, мы делаем вывод, что при любом $\varepsilon > 0$ для любой последовательности чисел $\{\lambda^{(k)}\}$ оценка (3.2.6) верна при $\lambda = \lambda^{(k)}$ с постоянной C_ε , не зависящей от k . Теперь от противного проверяется, что неравенство вида (3.2.6) верно для всех λ . $\square$

Далее мы действуем в основном по известным стандартам, см. [15], гл. XI, п. 9, [27] и [28]. Отметим, что в теореме о суммируемости Лидский накладывал условия на область значений квадратичной формы оператора. Вместо этого Маркус предполагал наличие оценки резольвенты в секторе с вершиной в начале, а у Данфорда–Шварца в теореме о полноте в гильбертовом случае предполагалось наличие лучей с достаточно хорошей оценкой нормы резольвенты. Мы следуем [15] и [28], но результаты получим в обоих пространствах, X и Y . В отношении доказательства теоремы о суммируемости в [28] указано лишь, что оно аналогично доказательству Лидского. Мы приведем дополнительные подробности; дальнейшие детали в гильбертовом случае можно смотреть также в [2], §35.¹⁾ Мы не будем приводить возможные варианты теорем о полноте и суммируемости, см. по этому поводу [28].

3.3. Случай $q > 1$. В этом случае нужна регуляризация дроби в (3.2.5). Проведем ее так (фактически следуя [28]; другой и более известный способ см.,

¹⁾В этой работе пробелом является отсутствие ссылки на [28].

например, в [15] и [27]). Найдём такое натуральное N , что $N < q \leq N + 1$. Так как $T^{N+1} \in \mathcal{A}_{q/(N+1)}$ (это легко выводится из 4°), то можно пользоваться спектральным определителем $d_{T^{N+1}}(\lambda)$. Далее, $d_{T^{N+1}}(\lambda^{N+1})$ — целая функция от λ с ростом не выше чем порядка q и минимального типа. Из тождества

$$(I + \lambda T + \dots + \lambda^N T^N)(I - \lambda T) = I - \lambda^{N+1} T^{N+1}$$

следует, что при $\lambda^{N+1} \neq 1/\lambda_j(T^{N+1})$ мы имеем

$$(I - \lambda T)^{-1} = \frac{\Delta_{T,N}(\lambda)}{d_{T^{N+1}}(\lambda^{N+1})}, \quad (3.3.1)$$

где числитель

$$\Delta_{T,N}(\lambda) = d_{T^{N+1}}(\lambda^{N+1})(I - \lambda^{N+1} T^{N+1})^{-1}(I + \dots + \lambda^N T^N) \quad (3.3.2)$$

имеет «лишние» нули там же, где знаменатель. Для формы $\langle \Delta_{T,N}(\lambda)x, z \rangle$ получается выражение типа (3.2.9)

$$\lambda^{-N-1} [d(I - \lambda^{N+1} T^{N+1} + \lambda^{N+1} \langle \cdot, z \rangle (I + \dots + \lambda^N T^N)x) - d(I - \lambda^{N+1} T^{N+1})].$$

Отсюда для $\Delta_{T,N}(\lambda)$ получается оценка вида (3.2.6). Таким образом, теорема 3.2.1 распространяется на $q > 1$ со следующим соглашением: в этом случае под дробью (3.2.5) будем понимать дробь (3.3.1).

Замечания. 1. Если умножить на T левую часть формулы (3.2.5) (или (3.3.1)) и числитель в правой части, то получается представление резольвенты $R_L(\lambda)$ с сохранением оценки вида (3.2.6) для числителя.

2. Используя 9°, заменим предположение $T \in \mathcal{A}_q$ условием $a_k(T) = O(k^{-\gamma})$, $\gamma > 0$. Тогда справедлива формула типа (3.2.5) (или (3.3.1)), в которой знаменатель — целая функция с ростом не выше чем порядка $1/\gamma$ и нормального типа, а числитель — операторнозначная целая функция с аналогичной оценкой нормы.

Поясним, что $a_k = O(k^{-\gamma})$ влечет $T \in \mathcal{A}_q$ при $q > 1/\gamma$. Сказанное про знаменатель $d_T(\lambda)$ при $\gamma > 1$ — снова известный факт из теории целых функций (см. теорему 7 в [26], гл. I), а при $N \leq 1/\gamma < N+1$ то же верно для $d_{T^{N+1}}(\lambda^{N+1})$. Оценка для числителя в обоих случаях получается тем же путем, что и выше.

3. После того как настоящая работа была закончена, автор нашел в литературе работу [14]. В ней доказывается теорема типа 3.2.1 для оператора с $\sum c_k^p(T) < \infty$, где $c_k(T)$ — так называемые числа Гельфанда. Доказательство использует комбинацию результатов из [35] (есть также ссылки на [23] и [16]), но оно тяжелее нашего. Аппроксимационные числа мажорируют числа Гельфанда: $a_k(T) \geq c_k(T)$. Результат при $\sum c_k(T)^q < \infty$ немного слабее нашего при $\sum a_k(T)^q < \infty$ (нормальный тип вместо минимального). Наша теорема о полноте в следующем пункте близка к теореме из [14] (и обе близки к теоремам из [28]). Она все же оставлена в тексте для полноты изложения.

3.4. Теорема о полноте.

Теорема 3.4.1. Пусть $T \in \mathcal{A}_q$. Предположим, что имеются выходящие из начала лучи $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$, вдоль которых резольвента $R_L(\lambda)$ существует при достаточно больших $|\lambda|$ и удовлетворяет соотношению

$$\|R_L(\lambda)\| = O(|\lambda|^h) \quad (3.4.1)$$

при некотором $h \in [-1, 0)$. Пусть все углы между соседними лучами не больше π/q . Тогда система корневых векторов оператора L полна в X и Y .

Доказательство. Предположим, что полноты нет в множестве векторов из X вида $y = Tx$. Тогда найдется такой вектор $z_0 \in X^*$, что функционал $\langle \cdot, z_0 \rangle$ аннулирует замкнутую линейную оболочку корневых векторов, но $\langle Tx_0, z_0 \rangle \neq 0$ при некотором $x_0 \in X$. Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \langle R_L(\lambda)x_0, z_0 \rangle. \quad (3.4.2)$$

У нее нет полюсов, так что это целая аналитическая функция. По известной теореме из теории аналитических функций дробь

$$(R_L(\lambda)x_0, z_0) = \frac{(\Delta_T(\lambda)Tx_0, z_0)}{d_T(\lambda)} \quad (3.4.3)$$

оказывается тогда целой аналитической функцией с ростом не выше чем порядка q и минимального типа (см. [26], гл. I, §9). По теореме Фрагмена–Линделёфа (см., например, там же, §14) в сочетании с теоремой Лиувилля это постоянная и, значит, тождественный нуль. Полагая $\lambda = 0$, получаем $\langle Tx_0, z_0 \rangle = 0$, что противоречит предположению.

Так как векторы Tx плотны в X , то полнота имеет место в X . В силу изоморфизма она имеет место и в Y в норме этого пространства. $\square$

От условия $h < 0$ легко освободиться, используя степени оператора T .

3.5. Теорема о суммируемости. Определение метода Абеля–Лидского мы напомним немного ниже. Примем, что $T \in \mathcal{A}_q$ и оценка

$$\|R_L(\lambda)\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (3.5.1)$$

имеет место в (замкнутом) секторе $\Theta(r, \varphi)$ (см. (1.1.13)), где

$$2q\varphi < \pi. \quad (3.5.2)$$

Пусть для простоты $r = 0$: этого всегда можно добиться сдвигом спектрального параметра. Составим интеграл

$$x(\tau) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\Theta} \exp(-\tau\lambda^q) R_L(\lambda) d\lambda x \quad (\tau > 0) \quad (3.5.3)$$

по контуру Γ_Θ сектора $\Theta(0, \varphi)$ из бесконечности снизу вверх в бесконечность. Здесь и дальше $\lambda^q = |\lambda|^q \exp(iq \arg \lambda)$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$. Этот интеграл абсолютно сходится в силу (3.5.1) и (3.5.2), так как $\cos(q\varphi) > 0$.

Проверяется, что в норме пространства X

$$\lim_{\tau \downarrow 0} x(\tau)x = x \quad (3.5.4)$$

для любого x сначала из Y . Для распространения результата на все $x \in X$ доказываем, что оператор $x \mapsto x(\tau)$ равномерно ограничен при малых τ .

Теперь интеграл $x(\tau)$ преобразуется в ряд из интегралов:

$$x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\tau), \quad \text{где } x_k(\tau) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_k} \exp(-\tau\lambda^q) R_L(\lambda) d\lambda x. \quad (3.5.5)$$

Здесь Γ_k — замкнутые контуры частей дополнения $\tilde{\Theta}(0, \varphi)$ к сектору $\Theta(0, \varphi)$, на которые оно рассекается дугами Λ_k окружностей с центром в начале радиусов $R_k \uparrow \infty$. Формулы (3.5.5) и (3.5.4), где в последней каждый интеграл $x_k(\tau)$

вычисляется при помощи вычетов, и определяют *метод Абеля–Лидского порядка* q . Поясним, что интеграл $x_k(\tau)$ — линейная комбинация с экспоненциально зависящими от τ коэффициентами корневых векторов оператора L , отвечающих собственным значениям, окружаемым контуром Γ_k . Но проблема выбора радиусов R_k нетривиальна.

Здесь используется теорема об оценке голоморфной функции снизу (см. [26], гл. I, § 11, и [28], лемма 1.6), она применяется к знаменателю в (3.2.5) или (3.3.1). Если задать последовательность чисел $\varepsilon_k \downarrow 0$, то найдется такая последовательность $R_k \uparrow \infty$, что на дугах $\Lambda_k \subset \tilde{\Theta}(0, \varphi)$ радиусов R_k у оператора L нет собственных значений и

$$\|R_L(\lambda)\|_{X \rightarrow X} \leq \exp(\varepsilon_k R_k^q). \quad (3.5.6)$$

Проверяется, что тогда при $\tau > 0$ по норме в X

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k} \exp(-\tau \lambda^q) R_L(\lambda) d\lambda = 0, \quad (3.5.7)$$

что и приводит к нужному результату — сходимости ряда в (3.5.5) для $x \in X$.

Для векторов $x = Ly$ мы имеем $\|y\|_Y \asymp \|x\|_X$. Заменяем в (3.5.3)–(3.5.5) и (3.5.7) x на Ly . Оператор L перестановочен с операциями в этих формулах. Поэтому для векторов $y \in Y$ результат верен в норме этого пространства.

Итак, получается

Теорема 3.5.1. *При предположениях, указанных в начале пункта, ряд Фурье любого вектора $x \in X$ по корневым векторам оператора L суммируется к x методом Абеля–Лидского порядка q . Для $y \in Y$ это верно в норме пространства Y .*

§ 4. Спектральные задачи в липшицевых областях

4.1. Спектральные задачи Дирихле и Неймана. Вернемся к задачам, рассмотренным в § 2. Независимость корневых функций отвечающего задаче оператора L от $(s, t) \in Q_\delta$ (тем самым и собственных значений) устанавливается, как в [5], с использованием плотных вложений и изоморфизмов, определяемых этими задачами. Асимптотика спектра самосопряженных задач (в смысле $(Lu, v)_\Omega = (u, Lv)_\Omega$ на функциях из $H^1(\Omega)$) установлена, например, в [11]. Для обратного оператора T в случае уравнений и систем 2-го порядка она имеет вид

$$\lambda_k(T) \sim ck^{-2/n}, \quad (4.1.1)$$

где $c = c(L, \Omega)$ — положительный коэффициент, одинаковый в задачах Дирихле и Неймана. В [11], правда, рассмотрена другая реализация оператора — в пространстве $L_2(\Omega)$ с областью определения, содержащейся в $H^1(\Omega)$. Но ее собственные функции остаются собственными функциями в нашем смысле; обе системы собственных функций полны в $L_2(\Omega)$ и минимальны, поэтому совпадают и собственные функции, и собственные значения. Из (4.1.1) уже для задач без предположения о самосопряженности следует аналогичная оценка a -чисел при $p = 2$: $a_k = O(k^{-\gamma})$ с $\gamma = 2/n$. Действительно, оператор общей задачи можно представить в виде произведения ограниченного оператора на оператор самосопряженной задачи. Это сразу приводит к теореме о полноте корневых функций в точке $(s, t) = (0, 1/2)$ в предположении, что мы имеем оптимальную оценку

резольвенты в $\Theta(r, \varphi)$ с $\varphi < \pi/n$. На остальные $(s, t) \in Q_\delta$ результат о полноте можно распространить, снова используя плотные вложения и определяемые операторами задач изоморфизмы, как в [5]. Ср. [1]. Он следует и из теоремы 3.4.1 (в случае задачи Неймана с $X = \tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$, $Y = H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ или аналогичными пространствами Бесова; в случае задачи Дирихле тильда переходит с первого на второе пространство). Далее, теорема о суммируемости при $p = 2$ получается с $q \in (n/2, \pi/(2\varphi))$ из известной теоремы для операторов в гильбертовых пространствах. В общем случае мы используем теорему 3.5.1, а для ее получения — теорему 3.2.1.

Резюмируем окончательный результат.

Теорема 4.1.1. *Корневые функции и собственные значения задачи Неймана не зависят от $(s, t) \in Q_\delta$. Корневые функции принадлежат пересечению пространств $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ и $B_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ для точек $(s, t) \in Q_\delta$. Собственные значения оператора T , обратного к оператору L задачи, имеют оценку $\lambda_k = O(k^{-2/n})$. Оператор $(I - \lambda T)^{-1}$ представим в виде отношения целых аналитических функций, операторнозначной и числовой; функция в знаменателе — роста не выше чем порядка $n/2$ и нормального типа; норма числителя имеет аналогичную оценку.*

Пусть выполнено условие (1.1.4), обеспечивающее оптимальную оценку резольвенты в $\Theta(r, \varphi)$ с $\varphi < \pi/n$. Тогда во всех указанных пространствах и пространствах $\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ и $\tilde{B}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ имеет место полнота корневых функций, а при $n/2 < q < \pi/(2\varphi)$ — суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского порядка q .

Для задачи Дирихле имеют место аналогичные результаты с заменой пространств H и B на $\tilde{H}$ и $\tilde{B}$ и наоборот.¹⁾

4.2. Задачи со спектральным параметром в граничном условии. Предположим, что задачи Дирихле и Неймана для уравнения $Lu = f$ однозначно разрешимы для $(s, t) \in Q_\delta$. Относительно их вариационной постановки при неоднородных граничных условиях см., например, [5], [6]. Рассмотрим задачу

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_{\nu_a} u - \lambda u^+ = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (4.2.1)$$

Здесь $u^+ = u|_\Gamma$ и ∂_{ν_a} — кономальная производная на Γ . На гладких функциях

$$\partial_{\nu_a} u(x) = \sum \nu_j a_{jk}(x) \partial_k u(x), \quad (4.2.2)$$

где ν_j — координаты единичной внешней нормали к Γ (существующей почти всюду на Γ). В общем случае кономальная производная определяется формулой Грина

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi(u, v) - (\partial_{\nu_a} u, v^+)_\Gamma. \quad (4.2.3)$$

Подставив сюда $\partial_{\nu_a} u$ из (4.2.1), получим, поскольку $Lu = 0$,

$$\Phi(u, v) - \lambda(u^+, v^+)_\Gamma = (g, v^+)_\Gamma. \quad (4.2.4)$$

Пусть $u = v$ и $\mu = -\operatorname{Re} \lambda$. Тогда при $\mu \geq \mu_0$ с достаточно большим μ_0

$$\operatorname{Re} \Phi(u, u) + \mu(u^+, u^+)_\Gamma > 0, \quad (4.2.5)$$

¹⁾ Полнота имеет место также в «промежуточных» пространствах, в частности в $L_p(\Omega)$.

и это исходный пункт: наша задача — с дискретным спектром, лежащим в правой полуплоскости и, может быть, окрестности начала.

В центре квадрата Q у нас $u, v \in H^1(\Omega)$, граничные значения $u^+, v^+ \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $\partial_{\nu_a} u, g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. В остальных точках прямоугольника Q_δ

$$u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad v \in H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega), \quad u^+ \in B_p^{1/2+s}(\Gamma), \quad v^+ \in B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma),$$

$$w = \partial_{\nu_a} u, \quad g \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma). \quad (4.2.6)$$

Операторы перехода от u к u^+ и от v к v^+ ограничены и имеют ограниченные правые обратные [22]. Функции g и v^+ — в сопряженных пространствах. В Ω можно пользоваться и пространствами Бесова вместо пространств потенциалов [22]. Функционал $(g, v^+)_{\Gamma}$ можно записать в виде $(h, v)_{\Omega}$ с некоторым $h \in \tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$. При этом

$$|(g, v^+)| \leq C_1 \|g\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)} \|v^+\|_{B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)} \quad \text{и} \quad \|v^+\|_{B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)} \leq C_2 \|v\|_{H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)} \quad (4.2.7)$$

для любой $v \in H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$, поэтому

$$\|h\|_{\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)} \leq C_3 \|g\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.2.8)$$

С учетом оценок в §2 мы получаем равномерные по λ оценки для решения

$$\|u\|_{B_p^{1/2+s}(\Gamma)} \leq C_4 \|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} \leq C_5 \|h\|_{\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)} \leq C_6 \|g\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.2.9)$$

В силу (4.2.4)

$$\mu \sup_{v^+} \frac{|(u^+, v^+)_{\Gamma}|}{\|v^+\|_{B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)}} \leq \sup_{v^+} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v^+\|_{B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)}} + \sup_{v^+} \frac{|(g, v^+)_{\Gamma}|}{\|v^+\|_{B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)}},$$

что в силу (1.2.4), (4.2.9) и ограниченности оператора $v^+ \mapsto v$ дает

$$\mu \|u^+\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)} \leq C_7 \|g\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.2.10)$$

В итоге видно, что мы имеем ограниченный оператор, переводящий данные Неймана $w = \partial_{\nu_a} u$ в данные Дирихле u^+ ,

$$\mathcal{N}: B_p^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow B_p^{1/2+s}(\Gamma), \quad (4.2.11)$$

с оценкой $\|\mathcal{N}w\|_{B_p^{1/2+s}(\Gamma)} + \mu \|\mathcal{N}w\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)} \leq C_8 \|w\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}$. Обратный оператор, обозначим его $\mathcal{D}$, действует из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, он имеет компактную в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ резольвенту с оптимальной оценкой, которую мы перепишем в $\Theta(r, \varphi)$ в виде

$$\|R_{\mathcal{D}}(\lambda)\| \leq C_9(1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (4.2.12)$$

Здесь возникает вторая конкретная реализация для абстрактной ситуации, рассмотренной в §3, с $X = B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, $Y = B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Асимптотика собственных чисел самосопряженных задач (в смысле $(\mathcal{D}\varphi, \psi)_{\Gamma} = (\varphi, \mathcal{D}\psi)_{\Gamma}$ на $H^{1/2}(\Gamma)$) в общем случае не получена, известны только частичные результаты [40], [4]. Но для оператора J вложения Y в X есть оценка a -чисел: $a_k(J) = O(k^{-1/(n-1)})$.

Она выводится из предложения 3.1.1 и из свойства 2° a -чисел при помощи разбиения единицы на Γ . Для оператора $N = J\mathcal{N}$, используя свойство 9° в центре квадрата, получаем оценку $\lambda_k(N) = O(k^{-1/(n-1)})$. Для оператора $(1 - \lambda N)^{-1}$ получаем представление в виде отношения целых функций, операторнозначной и числовой, роста не выше чем порядка $n - 1$ и нормального типа. Условие на угол в (1.1.13):

$$2(n - 1)\varphi < \pi. \quad (4.2.13)$$

Снова можно проверить независимость собственных значений и корневых функций от $(s, t) \in Q_\delta$ и вывести полноту из известных результатов для $p = 2$, а также получить теорему о суммируемости для $p = 2$. См. [5]. Но окончательная теорема получается с использованием результатов §3.

Теорема 4.2.1. *Собственные значения $\lambda_k(N)$ оператора N не зависят от $(s, t) \in Q_\delta$ и имеют оценку $O(k^{-1/(n-1)})$. Корневые функции также не зависят от $(s, t) \in Q_\delta$ и принадлежат пересечению пространств Бесова $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Оператор $(I - \lambda N)^{-1}$ представим в виде отношения целых аналитических функций, операторнозначной и числовой; функция в знаменателе — роста не выше чем порядка $n - 1$ и нормального типа; норма числителя имеет аналогичную оценку. Если выполнено условие (1.1.4), обеспечивающее оптимальную оценку резольвенты в $\Theta(r, \varphi)$, где φ подчинено условию (4.2.13), то имеет место полнота корневых функций в пространствах $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, а при $n - 1 < q < \pi/(2\varphi)$ — суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского порядка q в этих пространствах.*

Аналоги результатов этого параграфа справедливы для «гладких» эллиптических с параметром задач в банаховых пространствах потенциалов и Бесова; к сожалению, здесь на этом не удастся остановиться.

§5. Смешанные задачи для параболических уравнений

В этом параграфе t — время, и обозначением $t = 1/p$ мы здесь не будем пользоваться. Буквы g и v также имеют новый смысл. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t v(t, x) = Av(t, x) + g(t, x) \quad (5.1.1)$$

в липшицевом цилиндре $[0, \infty) \times \Omega$ с начальным условием

$$v(0, x) = v_0(x) \quad (5.1.2)$$

и однородными условиями Дирихле или Неймана на боковой поверхности $[0, \infty) \times \Gamma$. Здесь мы полагаем $A = -L$, чтобы приблизиться к обозначениям в [31]. Пример: $\partial_t v = \Delta v + g$.

Мы предположим, что для оператора L выполнено условие (1.1.3) сильной эллиптичности. Тогда его можно усилить до (1.1.4), поэтому есть параболическая (или аналитическая) полугруппа, решающая задачу, и эта задача однозначно разрешима в указанном ниже смысле.

Точный результат для абстрактных операторов состоит в следующем ([31], гл. 5, §4). Пусть X — банахово пространство с нормой $\|x\| = \|x\|_X$ и A — замкнутый оператор в X с плотной областью определения $Y = \mathcal{D}(A)$. (В Y можно ввести норму графика $\|x\|_Y = \|x\| + \|Ax\|$.) Введем множество

$$\Sigma(\theta, r) = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varphi, |\lambda| \geq r\} \quad (5.1.3)$$

с $\varphi > \pi/2$. Предположим, что оно лежит в резольвентном множестве оператора A и там выполнена оценка

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq C_1(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (5.1.4)$$

с не зависящей от λ постоянной C_1 . Введем операторы

$$S_t v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\Sigma} e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} v d\lambda \quad (t > 0, v \in X), \quad (5.1.5)$$

где Γ_Σ — контур множества (5.1.3) с направлением обхода снизу вверх, как в п. 3.5. Интеграл (5.1.5) похож на интеграл (3.5.3) с $q = 1$.

Это по сути обратное преобразование Лапласа от $(\lambda I - A)^{-1}$ (или экспонента $\exp(tA)$). В [31] доказывается, что эти операторы обладают следующими свойствами. (Свойствами 1 и 3 обладает и интеграл (3.5.3).)

1. Они действуют из X в Y при $t > 0$ и удовлетворяют в X оценке $\|S_t\| \leq C$ с некоторой постоянной C .

2. Имеет место полугрупповое свойство $S_{t+\tau} = S_t S_\tau$ ($t, \tau > 0$).

3. Имеет место сильная сходимость $\lim_{t \rightarrow +0} S_t v = v$ ($v \in X$).

4. $\lim_{t \rightarrow +0} (S_t v - v)/t = Av$ ($v \in Y$), так что A — инфинитезимальный производящий оператор для этой полугруппы.

Если $v_0 \in Y$ и $g(t)$ — функция на $\mathbb{R}_+$ со значениями в X , удовлетворяющая условию Гёльдера $\|g(t) - g(t')\| \leq C_2 |t - t'|^\eta$, $\eta \in (0, 1]$, то задача Коши

$$\partial_t v(t) = Av(t) + g(t) \quad (t > 0), \quad v(0) = v_0 \quad (5.1.6)$$

имеет решение $v(t)$. Это функция, определяемая формулой

$$v(t) = S_t v_0 + \int_0^t S_{t-s} g(s) ds, \quad (5.1.7)$$

и это решение единственно. Оно голоморфно по t в малом угле на комплексной плоскости с биссектрисой $\mathbb{R}_+$.

У нас в случае граничных условий Неймана $X = \tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$, $Y = H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$, где $|s| < 1/2$, $|t - 1/2| < \delta$, и эти пространства можно заменить соответствующими пространствами Бесова. В случае задачи Дирихле тильда переходит с первого на второе пространство.

Мы не будем вдаваться здесь в дальнейшее исследование решений этой и других нестационарных задач.

§6. Обобщения на системы

Все сказанное выше, кроме п. 4.2, обобщается на рассмотренные в [6] системы с параметром, в которых все числа m_j одинаковы. (К более общему случаю мы предполагаем вернуться в другом месте.) На систему накладывается дополнительное условие неотрицательности (или выпуклости) алгебраической формы, связанной с главным символом, а в случае задачи Неймана — и соответствующее условие коэрцитивности (см. п. 2.1 в [6]). Число γ равно $2m/n$, где $2m$ — порядок системы. При рассмотрении из п. 4.2 и §5 для простоты дополнительно предполагаем, что система — второго порядка ($m = 1$).

Отметим, что в ряде работ параболические уравнения и системы в липшицевых цилиндрах исследовались при помощи потенциалов, см., в частности, [13], [32] и приведенные там ссылки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sh. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **15**:2 (1962), 119–147.
- [2] М. С. Агранович, *Спектральные свойства задач дифракции*, в кн.: Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции*, Наука, М., 1977, 289–416; Английское переработанное издание: М. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley–VCH, Berlin etc., 1999, Chapter V.
- [3] М. С. Агранович, *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей*, УМН, **57**:5 (2002), 3–78.
- [4] M. S. Agranovich, *On a mixed Poincaré-Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain*, Russ. J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 239–244.
- [5] М. С. Агранович, *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **40**:4 (2006), 83–103.
- [6] М. С. Агранович, *К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **41**:4 (2007), 1–21.
- [7] M. S. Agranovich, *Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary*, Russ. J. Math. Phys., **15**:2 (2008), 146–155.
- [8] М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, **19**:3 (1964), 53–161.
- [9] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства*, Мир, М., 1980.
- [10] М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α* , Матем. сб., **73**:3 (1967), 331–355.
- [11] М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов*, I, II, Труды ММО, **27** (1972), 3–52; **28** (1973), 3–34.
- [12] М. С. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, в кн.: Десятая матем. школа, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1974, 5–189.
- [13] R. M. Brown, Z. Shen, *A note on boundary value problems for the heat equation in Lipschitz cylinders*, Proc. Amer. Math. Soc., **119**:2 (1993), 585–594.
- [14] J. Burgoyne, *Denseness of the generalized eigenvectors of a discrete operator in a Banach space*, J. Operator Theory, **33** (1995), 279–297.
- [15] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. II, Мир, М., 1966.
- [16] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral Theory and Differential Operators*, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 1987.
- [17] D. E. Edmunds, H. Triebel, *Function Spaces, Entropy Numbers, and Differential Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [18] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [19] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16** (1955).
- [20] А. Гротендик, *Теория Фредгольма*, Сб. переводов Математика, **2**:5 (1958), 51–103.
- [21] S. Janson, P. Nilsson, J. Peetre, *Notes on Wolff's note on interpolation spaces*, Proc. London Math. Soc., **48**:2 (1984), 283–299.

- [22] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* , Math. Rep., Ser. 2, no. 1, Academic Publ., Harwood, 1984.
- [23] H. König, *Eigenvalue Distribution of Compact Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 16, Birkhäuser, Basel etc., 1986.
- [24] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domain with Point Singularities*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [25] P. D. Lax, A. N. Milgram, *Parabolic equations*, in: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. of Math. Studies, vol. 33, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1954, 167–190.
- [26] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [27] В. Б. Лидский, *О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов*, Труды ММО, **11** (1962), 3–35.
- [28] А. С. Маркус, *Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве*, Матем. сб., **70** (112):4 (1966), 526–561.
- [29] А. С. Маркус, В. И. Мацаев, *Аналоги неравенств Вейля и теоремы о следе в банаховом пространстве*, Матем. сб., **86**:2 (1971), 299–313.
- [30] В. И. Мацаев, *Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов*, Докл. АН СССР, **154**:5 (1964), 1034–1037.
- [31] С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977.
- [32] M. Mitrea, *The initial Dirichlet boundary value problem for general second order parabolic systems in nonsmooth manifolds*, Comm. Partial Differential Equations, **26**:11–12 (2001), 1975–2036.
- [33] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176**:1 (2000), 1–79.
- [34] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 649–675.
- [35] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-Numbers*, Acad. Verl., Leipzig, 1987; Cambridge Studies in Adv. Math., vol. 13, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [36] V. S. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. (2), **60**:1 (1999), 237–257.
- [37] J. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **152**:1 (1998), 176–201.
- [38] Z. Shen, *Resolvent estimates in L^p for elliptic systems in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **133**:1 (1995), 224–251.
- [39] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.
- [40] Т. А. Suslina, *Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary*, Russ. J. Math. Phys., **6**:2 (1999), 214–234.
- [41] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [42] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Comput., **15**:2 (2002), 475–524.
- [43] М. И. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. сб., **29** (71):3 (1951), 615–676.