Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, О существенном спектре краевых задач для систем дифференциальных уравнений в ограниченной области с пиком, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 55–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:52:35

О существенном спектре краевых задач для систем дифференциальных уравнений в ограниченной области с пиком*

© 2009. С. А. НАЗАРОВ

Найдены простые алгебраические условия появления существенного спектра оператора задачи Неймана для формально самосопряженной эллиптической системы дифференциальных уравнений в области с пикообразным заострением. В скалярном случае спектр оказывается дискретным.

§1. Постановка задачи

Известны (см., например, [1]) ограниченные области Ω , для которых нет компактного вложения пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в пространство Лебега $L_2(\Omega)$. Как следствие [2, теорема 10.1.5], спектр задачи Неймана для оператора Лапласа в таких областях Ω не может быть дискретным. У этих областей довольно экзотическое строение, и они, разумеется, не являются липшицевыми: в областях с липшицевыми границами вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно и спектр задачи Неймана дискретен. Вместе с тем потеря липшицевости границей $\partial\Omega$ не обязательно влечет за собой возникновение существенного спектра. Так, если у области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ граница $\partial\Omega$ липшицева всюду, кроме точки θ — начала декартовой системы координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, а внутри шара $\mathbb{B}_R^n = \{x : |x| < R\}$ с радиусом $R > 0$ эта область определена соотношениями (см. рисунок ниже)

$$z > 0, \quad \eta := z^{-1-\gamma}y \in \omega \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad (1)$$

то при $\gamma > 0$ поверхность $\partial\Omega$ не удовлетворяет условию Липшица, однако спектр задачи Неймана для оператора Лапласа дискретен (см. далее комментарий к теореме 1). В формуле (1) ω — область с компактным замыканием $\bar{\omega}$ и липшицевой границей $\partial\omega$, а $\gamma > 0$ — показатель заострения пика. Сечение $\{x : \eta \in \omega, z = t\}$ пика (1) обозначаем через $\omega(t)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Netherlands Organization for Scientific Research и Российского фонда фундаментальных исследований, совместный проект 047.017.020.

В статье установлено, что в случае, когда граница имеет особенность просто-го геометрического строения (1), скалярные краевые задачи имеют дискретный спектр, но у краевых задач для систем дифференциальных уравнений существенный спектр не обязательно пустой — найден признак его образования для систем, обладающих полиномиальным свойством ([3], [4]). Этот признак превращается в критерий для достаточно острых ($\gamma \geq 1$) пиков.

В области Ω рассмотрим краевую задачу Неймана¹⁾ для системы уравнений второго порядка в дивергентной форме

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) := \overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^\top A(x) \mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = \lambda B(x)u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\mathcal{N}(x, \nabla_x)u(x) := \overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^\top A(x) \mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}. \quad (3)$$

Здесь A и B — эрмитовы матрицы-функции размеров $N \times N$ и $k \times k$ соответственно, измеримые, а также ограниченные и равномерно положительно определенные почти всюду на множестве Ω . Кроме того, $\mathcal{D}(\nabla_x)$ есть $(N \times k)$ -матрица дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами, причем $N \geq k$. Символ $^\top$ означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение, т. е. $\overline{\mathcal{D}(\nabla_x)}^\top$ — формально сопряженный оператор для $\mathcal{D}(\nabla_x)$ и $\mathcal{L}(x, \nabla_x)$ — формально самосопряженный матричный дифференциальный оператор. В левом сомножителе матричного оператора $\mathcal{N}(x, \nabla_x)$ градиент ∇_x заменен единичным вектором ν внешней нормали к поверхности $\partial\Omega \setminus \mathcal{O}$. Мы называем $\mathcal{N}$ оператором краевых условий Неймана потому, что вариационная формулировка задачи (2), (3)

$$a(u, v; \Omega) := (A \mathcal{D}(\nabla_x)u, \mathcal{D}(\nabla_x)v)_\Omega = \lambda (Bu, v)_\Omega, \quad v \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O})^k, \quad (4)$$

не требует ограничений на значения пробной вектор-функции $v = (v_1, \dots, v_k)^\top$ на поверхности $\partial\Omega \setminus \mathcal{O}$; здесь $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в (комплексном) пространстве $L_2(\Omega)^m$ при $m = N$ или $m = k$ — размеры векторов не указываются в обозначениях норм и скалярных произведений, а $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O})^k$ — линейное пространство гладких вектор-функций с компактными носителями, отделенными от точки $\mathcal{O}$.

Предположим, что матрица $\mathcal{D}$ является алгебраически комплектной [5, гл. 5]: существует такое натуральное число $\rho_{\mathcal{D}}$, что для каждой строки $P(\xi) = (P_1(\xi), \dots, P_k(\xi))$ однородных степени $\rho \geq \rho_{\mathcal{D}}$ полиномов переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ найдется полиномиальная строка $Q(\xi) = (Q_1(\xi), \dots, Q_N(\xi))$, удовлетворяющая соотношению

$$P(\xi) = Q(\xi) \mathcal{D}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Согласно [3], [4], соотношение (5) обеспечивает полиномиальное свойство полуторалинейной формы a из интегрального тождества (4), т. е. соответствующий квадратичный функционал вырождается только на конечномерном линейном пространстве векторных полиномов,

$$\mathcal{P} = \{p = (p_1, \dots, p_k)^\top : \mathcal{D}(\nabla_x)p(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (6)$$

На основании формулы (5) нетрудно убедиться в том, что степени скалярных полиномов p_j , фигурирующих в определении (6), не превосходят $\rho_{\mathcal{D}} - 1$.

¹⁾Разумеется, в отличие от вариационной постановки (4) классическая постановка задачи требует дополнительной гладкости данных.

§2. Признак и критерий наличия существенного спектра

Введем новый спектральный параметр

$$\mu = (1 + \lambda)^{-1} \quad (7)$$

и перепишем интегральное тождество (4) как абстрактное уравнение

$$\mathcal{T}u = \mu u \quad (8)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)^k$, полученном пополнением линейала $C_c^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{O})^k$ по естественной норме

$$\|u; \mathcal{H}\| = (a(u, u; \Omega) + b(u, u; \Omega))^{1/2}, \quad (9)$$

где $b(u, v; \Omega) := (Bu, v)_\Omega$, $u, v \in \mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{T}$ задан формулой

$$\langle \mathcal{T}u, v \rangle = b(u, v; \Omega), \quad u, v \in \mathcal{H}. \quad (10)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, порожденное нормой (9). Понятно, что $\mathcal{T}$ — положительный, непрерывный и симметрический оператор, а значит, самосопряженный. Его норма равна единице, и число $\mu = 1$ принадлежит точечному спектру, а соответствующее собственное подпространство совпадает с линейалом (6). По понятным причинам множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Upsilon_0^1}$ содержится в резольвентном множестве оператора $\mathcal{T}$; здесь $\Upsilon_a^b = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = 0, a < \operatorname{Re} \lambda \leq b\}$ — полуинтервал на вещественной оси.

По замыканию интегральное тождество (4) распространяется на пробные функции $v \in \mathcal{H}$. Поэтому задачи (4) и (8) эквивалентны, а связь (7) спектральных параметров передает свойства спектра одной из них спектру другой. Далее мы в основном имеем дело с оператором $\mathcal{T}$.

Сформулируем центральный результат работы, доказательство которого проводится в следующих параграфах.

Теорема 1. 1) Оператор $\mathcal{T}$ компактен при любом $\gamma > 0$ (и, следовательно, его дискретный спектр лежит на вещественной положительной полуоси) тогда и только тогда, когда линейал (6) состоит из векторных полиномов p , не зависящих от переменной z .

2) При наличии в линейале $\mathcal{P}$ полинома

$$p(y, z) = z^J p^0(y) + \dots + z p^{J-1}(y) + p^J(y), \quad (11)$$

у которого $J \geq 1$ и $p^0 \neq 0$, вложение $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)^k$ не является компактным в случае $\gamma \geq J^{-1}$, т.е. на полуинтервале Υ_0^1 оператор $\mathcal{T}$ имеет непустой существенный спектр. Если $\gamma > J^{-1}$, то собственное число $\mu = 1$ этого оператора с (конечномерным) собственным подпространством (6) принадлежит непрерывному спектру оператора $\mathcal{T}$.

Замечание 2. Общие результаты теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами (см., например, [6]) показывают, что оператор задачи (2), (3) является фредгольмовым в пространствах со специальными нормами, которые содержат весовые множители, экспоненциально малые вблизи вершины пика $\mathcal{O}$. «Энергетическое» пространство $\mathcal{H}$ содержится в этих весовых пространствах, а значит, ядро оператора $\mathcal{T}$ оказывается конечномерным и его существенный спектр совпадает с непрерывным. Впрочем, это наблюдение не играет роли в дальнейших рассуждениях. $\square$

Для задачи (4) первое утверждение теоремы означает, что ее собственные числа образуют бесконечно большую последовательность

$$0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_d < \lambda_{d+1} \leq \dots \leq \lambda_q \leq \dots + \infty, \quad (12)$$

в которой они указаны с учетом кратностей. В частности, $d = \dim \mathcal{P} \geq k$, так как заведомо $\mathbb{C}^k \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{H}$.

Если $\mathcal{L}$ — скалярный дифференциальный оператор, то $\mathcal{D}(\xi)$ — столбец высоты $N \geq n$ и $|\nabla_x u(x)| \leq c|\mathcal{D}(\nabla_x)u(x)|$ для любой гладкой функции u , т. е. $\mathcal{P} = \mathbb{C}$ и скалярная задача Неймана (4) при любом показателе заострения $\gamma > 0$ обладает дискретным спектром (12). В §5 приведены примеры квадратичных форм $a(u, v; \Omega)$, для которых в линейном пространстве $\mathcal{P}$ имеются полиномы вида (11) при $J \geq 1$.

§3. Существенный и непрерывный спектры

Заметим, что линейное пространство (6) инвариантно относительно сдвигов $x \mapsto x + \tau$ и растяжений $x \mapsto \sigma x$ декартовой системы координат (здесь $\tau \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{R}_+$). Применяя эти преобразования с подходящими наборами параметров τ и σ , видим, что вместе с векторным полиномом p из (11) все входящие в него однородные векторные полиномы и все его производные также принадлежат линейному пространству $\mathcal{P}$. Таким образом, предположение в п. 2) теоремы 1 означает, что в $\mathcal{P}$ есть столбец однородных полиномов степени J , который представим в виде

$$P(y, z) = \sum_{j=0}^J \frac{J!}{j!} P^j(y) z^{J-j} = \sum_{j=0}^J P^j(y) \frac{\partial^j z^J}{\partial z^j}, \quad \deg P^j = j, \quad P^0 \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Выполнив дифференцирование, нетрудно убедиться в том, что равенство $\mathcal{D}(\nabla_y, \partial_z)P(y, z) = 0$ эквивалентно соотношениям

$$\mathcal{D}(\nabla_y, 0)P^{J-j}(y) = -\mathcal{D}(0, \dots, 0, 1)P^{J-j-1}(y), \quad j = 0, \dots, J, \quad (14)$$

где $P^{-1} = 0$ и $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_{n-1})^\top$.

Пусть ψ — нетривиальная бесконечно дифференцируемая функция переменной z с носителем на сегменте $[1, 2]$. Положим $\psi^q(z) = \psi(2^q z)$ и $\Psi^q(y, z) = P(y, \partial_z)\psi^q(z)$, где $q = 1, 2, \dots$ и $\partial_z = \partial/\partial z$. Ясно, что $\psi^p \psi^q = 0$ при $p \neq q$. В силу соотношений (14) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nabla_x)\Psi^q(x) &= \sum_{j=0}^J \mathcal{D}(\nabla_y, 0)P^j(y)\partial_z^j \psi^q(z) + \sum_{j=0}^J \mathcal{D}(0, \dots, 0, 1)P^j(y)\partial_z^{j+1} \psi^q(z) \\ &= \mathcal{D}(0, \dots, 0, 1)P^J(y)\partial_z^{J+1} \psi^q(z). \end{aligned}$$

Итак, при помощи формул (13) находим, что при $|y| \leq cz^{1+\gamma}$ и $z \in (2^{-q}, 2^{1-q})$ верны оценки

$$|\Psi^q(x)| \geq c_1 |\psi^q(z)| - c_2 \sum_{j=1}^J 2^{qj} z^{(1+\gamma)j}, \quad |\mathcal{D}(\nabla_x)\Psi^q(x)| \leq c_3 2^{q(J+1)} z^{(1+\gamma)J},$$

а при $z \notin (2^{-q}, 2^{1-q})$ вектор-функция Ψ^q равна нулю. Здесь и далее c_m — положительные постоянные, зависящие от полинома P и функции ψ , но не зависящие от параметра q и координаты z . Выполнив интегрирование по части

множества, заданной формулами (1), обнаруживаем, что при большом натуральном q справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\Psi^q; L_2(\Omega)\|^2 &\geq c_4 2^{-(n(1+\gamma)-\gamma)q}, \\ \|\mathcal{D}(\nabla_x)\Psi^q; L_2(\Omega)\|^2 &\leq c_5 2^{-(n(1+\gamma)-\gamma)q} 2^{2(J+1)q} 2^{-2(1+\gamma)Jq}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $\gamma = J^{-1}$, то правые части формул (15) являются бесконечно малыми одного порядка при $q \rightarrow +\infty$, а значит, вектор-функции $\Phi^q = 2^{(n(1+\gamma)-\gamma)q/2} \Psi^q$ образуют ограниченную последовательность элементов пространства $\mathcal{H}$, слабо сходящуюся в $\mathcal{H}$ к нулю, но не сходящуюся сильно в пространстве $L_2(\Omega)^k$. Иными словами, вложение $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)^k$ не является компактным, а спектр оператора $\mathcal{T}$ на полуинтервале Υ_0^1 — дискретным.

В силу формул (9), (10) и (15) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\Phi^q - \Phi^q; \mathcal{H}\| &= \sup |\langle \mathcal{T}\Phi^q - \Phi^q, v \rangle| = \sup |(A\mathcal{D}(\nabla_x)\Phi^q, \mathcal{D}(\nabla_x)v)_\Omega| \\ &\leq c_2^{(n(1+\gamma)-\gamma)q/2} \|\mathcal{D}(\nabla_x)\Psi^q; L_2(\Omega)\| \leq c_2^{(1-\gamma)Jq}, \end{aligned}$$

где верхняя грань вычисляется по таким $v \in \mathcal{H}$, что $\|v; \mathcal{H}\| = 1$. Таким образом, при $\gamma > J^{-1}$ последовательность $\{\Phi^q\}$ сингулярна для самосопряженного оператора $\mathcal{T}$ в точке $\mu = 1$, и по критерию Вейля (см., например, [2, §9.1]) эта точка принадлежит существенному спектру, а значит, и непрерывному, так как $\mu = 1$ — конечнократное собственное число.

Второе утверждение теоремы 1 доказано.

Отметим, что

$$|\partial_z \Psi^q(x)| \leq c_6 2^q, \quad \|\nabla_x \Psi^q; L_2(\Omega)\|^2 \geq c_7 2^{-(n(1+\gamma)-\gamma)q} 2^{2q},$$

т. е. в случае $J \geq 1$ вложения $\mathcal{H} \subset H^1(\Omega)^k$ нет ни при каком положительном показателе γ .

§4. Весовое неравенство Корна

Начнем с проверки вспомогательного алгебраического факта.

Лемма 3. Если в линейале $\mathcal{P}$ нет полиномов, зависящих от переменной z , то при любых столбцах $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{C}^k$ выполнено соотношение

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}(e_j) a^j \right|^2 + |\mathcal{D}(e_n) a^n|^2 \leq c_{\mathcal{D}} \left| \sum_{p=1}^n \mathcal{D}(e_p) a^p \right|^2, \quad (16)$$

в котором e_j — элемент стандартного базиса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $c_{\mathcal{D}}$ — постоянная, зависящая от матрицы $\mathcal{D}$, но не зависящая от столбцов a^p .

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^N$ следующие линейные оболочки столбцов $\mathcal{D}^1(e_p), \dots, \mathcal{D}^k(e_p)$ матриц $\mathcal{D}(e_p)$:

$$\begin{aligned} \Pi_y &= \text{span}\{\mathcal{D}^q(e_j) \mid q = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n-1\}, \\ \Pi_z &= \text{span}\{\mathcal{D}^q(e_n) \mid q = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Поскольку пространство конечномерно, соотношение (16) обеспечено формулой $\Pi_y \cap \Pi_z = \{0\} \in \mathbb{C}^N$. Если предположить, что имеется нетривиальный столбец

$a \in \Pi_y \cap \Pi_z$, то найдутся столбцы $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{C}^k$, удовлетворяющие соотношениям $a^n \neq 0$ и

$$a = \mathcal{D}(e_n)a^n = - \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}(e_j)a^j,$$

а значит, справедливо равенство $\mathcal{D}(\nabla_x)(za^n + y_1a^1 + \dots + y_{n-1}a^{n-1}) = 0$, т. е. в линеале (6) есть нетривиальная линейная вектор-функция переменной z . Полученное противоречие заканчивает проверку неравенства (16). $\square$

Из следующего утверждения будет выведена компактность вложения $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)^k$.

Теорема 4. *Если в линеале $\mathcal{P}$ нет полиномов, зависящих от переменной z , то справедливо весовое неравенство Корна*

$$\|r^{-1}v; L_2(\Omega)\|^2 \leq c(\|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L_2(\Omega)\|^2 + \|v; L_2(\Omega)\|^2), \quad (17)$$

где $r = |x|$, a, c — постоянная, зависящая от матрицы $\mathcal{D}$ и области Ω с пиком (1), но не зависящая от вектор-функции $v \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Xi_\delta}$ и $\Xi_\delta = \{x \in \Omega \cap \mathbb{B}_R^n : z < \delta\}$, где δ — малое положительное число. Область $\Omega_{\delta/2}$ с обломанным кончиком пика имеет липшицеву границу, и, согласно [5], выполнено обобщенное неравенство Корна

$$\|v; H^1(\Omega_{\delta/2})\|^2 \leq c_\delta(\|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L_2(\Omega_{\delta/2})\|^2 + \|v; L_2(\Omega_{\delta/2})\|^2) \leq c_\delta\|v; \mathcal{H}\|^2. \quad (18)$$

Умножим v на гладкую срезающую функцию χ_δ , равную единице на множестве $\Xi_{\delta/2}$ и нулю вне Ξ_δ . В силу неравенства (18) верна оценка $\|\chi_\delta v; \mathcal{H}\| \leq c_\delta\|v; \mathcal{H}\|$. Поскольку пространство $\mathcal{H}$ получено пополнением линеала $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{O})^k$, дальнейшее доказательство можно проводить для гладкой вектор-функции v с носителем, расположенным на множестве $\overline{\Xi_\delta}$ и отделенным от точки $\mathcal{O}$.

Пусть $p^1, \dots, p^d$ — базис в линеале (6), причем $p^j(y) = (p_1^j(y), \dots, p_k^j(y))^\top$, p_h^j — однородный полином степени q_j , $q_1 \leq \dots \leq q_d$, а $\mathbf{p} = (p^1, \dots, p^d)$ — матрица размера $k \times d$. Вектор-функцию v представим в виде

$$v(y, z) = v^\perp(y, z) + \sum_{j=1}^d V_j(z)p^j(y), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} V(z) &= (V_1(z), \dots, V_d(z))^\top \\ &= \mathbf{P}(z)^{-1} \int_{\omega(z)} \mathbf{p}(y)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) v(y, z) dy \quad \text{при п. в. } z \in (0, d), \\ \mathbf{P}(z) &= \int_{\omega(z)} \mathbf{p}(y)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) dy = z^{(1+\gamma)(n-1)} \mathbf{Q}(z)^\top \mathbf{P}(1) \mathbf{Q}(z), \\ \mathbf{Q}(z) &= \text{diag}\{z^{(1+\gamma)q_1}, \dots, z^{(1+\gamma)q_d}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку ранг матрицы $\mathcal{D}(e_n)$ равен k , полиномиальные столбцы $\mathcal{D}(e_n)p^1, \dots, \mathcal{D}(e_n)p^d$ высоты N линейно независимы в пространстве $L_2(\omega)^k$, т. е. $\mathbf{P}(1)$ есть $(d \times d)$ -матрица Грама, эрмитова и положительно определенная.

Согласно формулам (19), (20) и (6),

$$\mathcal{D}(\nabla_x)v(x) = \mathcal{D}(\nabla_y, 0)v^\perp(x) + \mathcal{D}(e_n)\partial_z v^\perp(x) + \mathcal{D}(e_n)\mathbf{p}(y)\partial_z V(z). \quad (21)$$

Кроме того, выполнено условие ортогональности

$$\int_{\omega(z)} \mathbf{p}(y)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) v^\perp(y, z) dy = 0 \in \mathbb{C}^d \quad \text{при п.в. } z \in (0, \delta). \quad (22)$$

Соотношения (21) и (16) показывают, что

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{D}} \int_{\Xi_\delta} |\mathcal{D}(\nabla_x) v(x)|^2 dx &\geq \int_{\Xi_\delta} |\mathcal{D}(\nabla_y, 0) v(x)|^2 dx + \int_{\Xi_\delta} |\mathcal{D}(e_n) \partial_z v(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Xi_\delta} |\mathcal{D}(\nabla_x) v^\perp(x)|^2 dx + \int_{\Xi_\delta} |\mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) \partial_z V(z)|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Xi_\delta} \partial_z v^\perp(x) \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) \partial_z V(z) dx =: \frac{1}{2} I_1 + I_2 + 2I_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее в лемме 5 будут проверены неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v^\perp; L_2(\Xi_\delta)\|^2 + \|z^{-1-\gamma} v^\perp; L_2(\Xi_\delta)\|^2 + \|z^{-(1+\gamma)/2} v^\perp; L_2(\partial\Xi_\delta \cap \partial\Omega)\|^2 \\ \leq c \|\mathcal{D}(\nabla_x) v^\perp; L_2(\Xi_\delta)\|^2, \\ \int_0^\delta z^{(1+\gamma)(n-1+2q_j)} (|\partial_z V_j(z)|^2 + z^{-2} |V_j(z)|^2) dz \\ \leq c \|\mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) \partial_z V; L_2(\Xi_\delta)\|^2, \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned} \quad (24)$$

которые предоставляют оценки снизу интегралов I_1 и I_2 . Рассмотрим интеграл I_3 .

При помощи растяжения координат $y \mapsto \eta$ (см. формулу (1)) и условия ортогональности (22) получаем равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega(z)} v^\perp(y, z)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) dy \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma^{n-1} z^{\gamma(n-1)} \int_{\omega} v^\perp(z^{1+\gamma} \eta, z)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(z^{1+\gamma} \eta) d\eta \right) \quad \text{при п.в. } z \in (0, d). \end{aligned}$$

Производя дифференцирование подынтегрального выражения и обращаясь к определениям (20), заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega(z)} \partial_z v^\perp(y, z)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{p}(y) dy \partial_z V(z) \right| \\ \leq c \sum_{j=1}^J \int_{\omega(z)} (z^\gamma |\nabla_y v^\perp(y, z)| + z^{-1} |v^\perp(y, z)|) dy z^{q_j(1+\gamma)} |\partial_z V_j(z)| \quad \text{при п.в. } z \in (0, d). \end{aligned}$$

Таким образом, перенося вес z^γ от первого сомножителя ко второму, получаем

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq c \left(\int_{\partial\Xi_\delta} (|\nabla_y v^\perp(y, z)|^2 + z^{-2(1+\gamma)} |v^\perp(y, z)|^2) ds_x \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{j=1}^d \int_0^\delta z^{2\gamma} z^{(1+\gamma)(n-1+2q_j)} |\partial_z V_j(z)|^2 dz \right)^{1/2} \leq c \delta^\gamma (I_1 I_2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выбрав число $\delta > 0$ достаточно малым, выводим из соотношений (23)–(26) неравенство

$$\begin{aligned} \|z^{-1-\gamma}v^\perp; L_2(\Xi_\delta)\|^2 + \sum_{j=1}^d \|z^{-1+(1+\gamma)(n-1+2q_j)/2}V_j; L_2(0, \delta)\|^2 \\ \leq c(I_1 + I_2) \leq c\|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L_2(\Xi_\delta)\|^2, \end{aligned}$$

которое при помощи представления (19) и формул (20) легко преобразуется в искомую оценку (17), так как возникшая норма функции $z^{-1+(1+\gamma)(n-1+2q_j)/2}V_j$ в пространстве $L_2(0, \delta)$ эквивалентна норме $\|z^{-1+(1+\gamma)q_j}V_j; L_2(\Xi_\delta)\|$ и больше величины $c\|z^{-1}p^jV_j; L_2(\Xi_\delta)\|$, а z и r — эквивалентные бесконечно малые на множестве Ξ_δ . $\square$

Оператор вложения $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega)^k$ представим в виде суммы компактного оператора (на множестве $\Omega \setminus \Xi_\delta$; см. неравенство (18)) и оператора с нормой, не превосходящей величины $c\delta$ (на кончике Ξ_δ пика; см. неравенство (17) с учетом соотношений $r \leq (z^2 + cz^{2(1+\gamma)})^{1/2}$, $z < \delta$ на Ξ_δ). Поскольку число $\delta > 0$ произвольно, упомянутое вложение компактно, т.е. условие в п. 1) теоремы 1 является достаточным. Необходимость условия обеспечена уже доказанным вторым утверждением теоремы. Осталось убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. 1) Для функций $V_1, \dots, V_d \in C_c^\infty(0, \delta)$ справедливо неравенство (25).

2) Если вектор-функция $v^\perp \in C^\infty(\overline{\Xi_\delta})^k$ обращается в нуль при $z = \delta$ и подчинена условиям ортогональности (22), то имеет место неравенство (24).

Доказательство. В силу формул (20) и (23) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\delta z^{(1+\gamma)(n-1)} \sum_{j,m=1}^d \int_\omega p^j(\eta)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) p^m(\eta) d\eta \partial_z V_j(z) \partial_z V_m(z) dz \\ &= \int_0^\delta z^{(1+\gamma)(n-1)} (\mathbf{Q}(z) \partial_z V(z))^\top \mathbf{P}(z) \mathbf{Q}(z) \partial_z V(z) dz \\ &\geq c_P \sum_{j=1}^d \int_0^\delta z^{\beta_j+1} |\partial_z V_j(z)|^2 dz \geq c_P \sum_{j=1}^d \beta_j^{-2} \int_0^\delta z^{\beta_j-1} |V_j(z)|^2 dz. \end{aligned}$$

Здесь применено неравенство Харди

$$\int_0^\delta z^{\beta-1} |V(z)|^2 dz \leq 4\beta^{-1} \int_0^\delta z^{\beta+1} |\partial_z V(z)|^2 dz, \quad V \in C^1[0, \delta], \quad V(\delta) = 0,$$

с показателями $\beta_j = (1+\gamma)(n-1+2q_j) - 1 > 0$, $j = 1, \dots, d$. Соотношение (25) установлено.

Проверим теперь соотношение (24). Замена координат

$$x = (y, z) \mapsto (\eta, \zeta) = (z^{-1-\gamma}y, -\gamma^{-1}z^{-\gamma}) \quad (27)$$

преобразует множество Ξ_δ в полуцилиндр

$$Q = \{(\eta, \zeta) : \eta \in \omega, \zeta < -T := -\gamma^{-1}\delta^{-\gamma}\}.$$

Кроме того,

$$\nabla_y = z^{-1-\gamma} \nabla_\eta, \quad \partial_z = z^{-1-\gamma} (\partial_\zeta - (1+\gamma)z^\gamma \eta^\top \nabla_\eta),$$

а значит, для вектор-функции $(\eta, \zeta) \mapsto \mathbf{v}^\perp(\eta, \zeta) = v^\perp(y, z)$ выполнено равенство

$$I_1 = \int_Q z^{(1+\gamma)(n-2)} |\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_\zeta) \mathbf{v}^\perp(\eta, \zeta) - (1+\gamma) z^\gamma \mathcal{D}(e_n \eta^\top \nabla_\eta) \mathbf{v}^\perp(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta. \quad (28)$$

Рассечем полуцилиндр Q на равные части $Q^m = \{(\eta, \zeta) \in Q : \zeta + T \in (-m, 1-m)\}$, $m = 1, 2, \dots$. Благодаря условиям ортогональности (22) справедливо соотношение

$$\int_{Q_m} \mathbf{p}(\eta)^\top \mathcal{D}(e_n)^\top \mathcal{D}(e_n) \mathbf{v}^\perp(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 0 \in \mathbb{C}^d. \quad (29)$$

Согласно [5, гл. 5], выполнено обобщенное неравенство Корна

$$\|\mathbf{v}^\perp; H^1(Q^m)\|^2 \leq c(\|\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 + \|\mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2), \quad (30)$$

которое при помощи теоремы об эквивалентных нормировках можно преобразовать в неравенство

$$\|\mathbf{v}^\perp; H^1(Q^m)\|^2 \leq c(\|\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 + |\mathbf{F}(\mathbf{v}^\perp)|^2), \quad (31)$$

где $\mathbf{F}: L_2(\Omega)^k \rightarrow \mathbb{C}^d$ — любой непрерывный линейный функционал, подчиненный следующему требованию:

$$\mathbf{F}(p) = 0 \quad \text{при некотором } p \in \mathcal{P} \implies p = 0. \quad (32)$$

Постоянные c в формулах (30) и (31) не зависят ни от вектор-функции $\mathbf{v}^\perp$, ни от номера m цилиндра Q^m единичной высоты.

Приведем непосредственную проверку эквивалентности норм (30) и (31). Достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\|\mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 \leq c(\|\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 + |\mathbf{F}(\mathbf{v}^\perp)|^2).$$

Предположим, что не существует общей постоянной c . Тогда найдется такая последовательность $\{\mathbf{v}^q\}$ элементов пространства $H^1(Q^m)^k$, что

$$\|\mathbf{v}^q; L_2(Q^m)\|^2 = 1, \quad \|\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^q; L_2(Q^m)\| \rightarrow 0, \quad |\mathbf{F}(\mathbf{v}^q)| \rightarrow 0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty.$$

Ввиду оценки (30) нормы $\|\mathbf{v}^q; H^1(Q^m)\|$ равномерно ограничены, т.е. некоторая подпоследовательность имеет предел $\mathbf{v}^\infty$, слабый в $H^1(Q^m)^k$ и сильный в $L_2(Q^m)^k$. При этом $\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_\zeta) \mathbf{v}^\infty = 0$ и $\mathbf{F}(\mathbf{v}^\infty) = 0$, а значит, формула (6) показывает, что $\mathbf{v}^\infty \in \mathcal{P}$, т.е. $\mathbf{v}^\infty = 0$ в силу свойства (32). Последнее равенство невозможно из-за соотношения $\|\mathbf{v}^\infty; L_2(Q^m)\| = 1$, обусловленного сильной сходимостью последовательности $\{\mathbf{v}^q\}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^k$. Полученное противоречие устанавливает справедливость неравенства (31).

Возьмем в качестве $\mathbf{F}(\mathbf{v}^\perp)$ левую часть формулы (29); понятно, что требование (32) соблюдено в силу определений (20). Неравенство (31) вместе со следовым неравенством [7] гарантируют, что

$$\begin{aligned} \|\nabla_{(\eta, \zeta)} \mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 + \|\mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2 + \|\mathbf{v}^\perp; L_2(\partial Q^m \cap \partial Q)\|^2 \\ \leq c \|\mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^\perp; L_2(Q^m)\|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Постоянная c не зависит ни от m , ни от $\mathbf{v}^\perp$. Умножим обе части неравенства (33) на $z_m^{(1+\gamma)(n-2)}$, где $\gamma z_m^{-\gamma} = T + m$. Поскольку $z_m < z < (1+c)z_m$ при $(\eta, \zeta) \in Q_m$, множители можно занести под знаки норм, превратив их (и множители, и

нормы) в весовые. В результате суммирование по $m = 1, 2, \dots$ преобразованных неравенств (33) приводит к соотношению

$$\|z^{(1+\gamma)(n-2)/2} \nabla_{(\eta, \zeta)} \mathbf{v}^\perp; L_2(Q)\|^2 + \|z^{(1+\gamma)(n-2)/2} \mathbf{v}^\perp; L_2(Q)\|^2 + \|z^{(1+\gamma)(n-2)/2} \mathbf{v}^\perp; L_2(\partial Q)\|^2 \leq c \|z^{(1+\gamma)(n-2)/2} \mathcal{D}(\nabla_\eta, \partial_z) \mathbf{v}^\perp; L_2(Q)\|^2. \quad (34)$$

Коэффициент z^γ при втором слагаемом из подынтегрального выражения в (28) может быть сделан малым за счет выбора δ , а значит, правая часть соотношения (34) мажорируется величиной cI_1 . Переход к координатам (y, z) согласно формулам (27) превращает модифицированную указанным способом оценку (34) в искомое неравенство (24). $\square$

§5. Обсуждение, примеры и гипотезы

Явная формула (1) для заострения введена лишь для упрощения изложения — определение можно сделать, например, таким:

$$z > 0, \quad H(z)^{-1}y \in \omega.$$

Здесь H — положительная функция, удовлетворяющая соотношениям

$$|z^{-1-\gamma}H(z) - H_0| + |z^{-\gamma}\partial_z H(z) - (1+\gamma)H_0| \leq cz^\delta, \quad H_0 > 0, \delta > 0,$$

а координаты η и ζ из замены (27) выглядят следующим образом:

$$\eta = H(z)^{-1}y \in \omega, \quad \zeta = - \int_z^R H(\mathfrak{z})^{-1} d\mathfrak{z}.$$

Если $\gamma \geq 1$ и, значит, пик достаточно острый, теорема 1 предоставляет критерий образования непустого существенного (непрерывного; см. замечание 2) спектра задачи (4). При $\gamma \in (0, 1)$ в теореме содержится только признак, так как она не дает информации о спектре при $\gamma \in (0, J^{-1})$. Автор выдвигает гипотезу: при $\gamma \in (0, J^{-1})$, где J — максимальная степень полинома вида (13) в линеале (6), спектр оказывается дискретным. Еще одна гипотеза связана со строением непрерывного спектра в предельном случае $\gamma = J^{-1}$, а именно: существует такой «порог» $\lambda_\bullet > 0$, что на полуинтервале $[0, \lambda_\bullet)$ расположен дискретный спектр, а луч $[\lambda_\bullet, \infty)$ представляет собой непрерывный спектр. Наконец, автор подозревает, что в случае $\gamma > J^{-1}$ вся замкнутая вещественная полуось покрыта непрерывным спектром задачи (4).

Пример 6. Пусть $k = n = 3$, $B(x) = \rho(x)\mathbb{I}_3$, $\mathbb{I}_k$ — единичная матрица размера $k \times k$ и

$$\mathcal{D}(\nabla_x)^\top = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 & 2^{-1/2}\partial_2 & \partial_z \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $\partial_i = \partial/\partial y_i$, $i = 1, 2$. В этом случае соотношения (2), (3) образуют задачу линейной теории упругости, записанную в матричной (а не тензорной) форме (см., например, [8]), причем u — столбец смещений, $\mathcal{D}(\nabla_x)u$ и $A\mathcal{D}(\nabla_x)u$ — столбцы деформаций и напряжений, A — вещественная матрица упругих модулей, симметрическая и положительно определенная, и $\rho > 0$ — плотность материала. Линеал (6) составлен из жестких смещений $a + b \times x$, где a и b — постоянные столбцы в $\mathbb{R}^3$ и символ $\times$ обозначает векторное произведение. В $\mathcal{P}$ существуют нетривиальные линейные вектор-функции всех трех аргументов, и поэтому

$J = 1$, а задача (2), (3) о свободных колебаниях упругого тела с острым пиком (1) имеет непрерывный спектр. Эта задача допускает более детальное исследование [9]¹⁾, опирающееся на весовое неравенство Корна [10] и асимптотические анзацы в теории тонких стержней (см., например, [8, гл. 5]) и частично подтверждающее для конкретного примера сформулированные гипотезы. Именно, при $\gamma \in (0, 1)$ задача обладает дискретным спектром (12) и в случае $\gamma = 1$ луч $[\lambda_{\ddagger}, \infty)$ лежит на непрерывном спектре; здесь $\lambda_{\ddagger}$ — некоторое число, зависящее от сечения ω , матрицы $A(\mathcal{O})$ и скаляра $\rho(\mathcal{O})$. Соответствующие вычисления и окончательные формулы очень громоздки — ограничимся упрощенным случаем изотропного однородного материала, для которого $\rho > 0$ — постоянная,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad (36)$$

а $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ — постоянные Ламе. Если центр тяжести плоской фигуры ω совпадает с началом декартовой системы координат η , а оси η_1 и η_2 направлены вдоль главных осей тензора инерции фигуры, то

$$\lambda_{\ddagger} = \frac{49 \cdot 25}{\rho \operatorname{mes}_2 \omega} \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mathbf{I}(\omega), \quad \mathbf{I}(\omega) = \min \left\{ \int_{\omega} \eta_1^2 d\eta, \int_{\omega} \eta_2^2 d\eta \right\}.$$

Отметим также, что для изотропного однородного тела Ω с осью вращения z на непрерывном спектре, включающем луч $[\lambda_{\ddagger}, \infty)$, расположен бесконечный набор элементов точечного спектра, т. е. собственных чисел. $\square$

Теорема 1 соотносит свойства спектра с полуторалинейной формой $a(\cdot, \cdot; \Omega)$, но никак не с самим дифференциальным оператором $\mathcal{L}(x, \nabla_x)$. Так, билинейной форме

$$\tilde{a}(u, v; \Omega) = \mu \sum_{j=1}^3 (\nabla_x u_j, \nabla_x v_j)_{\Omega} + (\lambda + \mu) (\nabla_x^{\top} u, \nabla_x^{\top} v)_{\Omega} \quad (37)$$

отвечает тот же матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(\nabla_x)$, что и форме $a(u, v; \Omega)$, построенной по матрицам (35) и (36) согласно определению (4). Линеал $\mathcal{P}$, порожденный формой (37), состоит лишь из постоянных векторов, т. е. при любом $\gamma > 0$ по п. 1) теоремы 1 дискретным оказывается спектр задачи с оператором $\mathcal{L}(\nabla_x)$, а также с (нефизическими) функционалом энергии (37) и условиями Неймана, проистекающими из формулы Грина. По п. 2) теоремы 1 у настоящей задачи теории упругости (пример 6) спектр не является дискретным при $\gamma \geq 1$.

В случае анизотропного строения линеала $\mathcal{P}$ появление существенного спектра зависит от направления пика. Например, при замене матрицы (35) матрицей

$$\mathcal{D}(\nabla_x)^{\top} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2} \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁾Для плоского изотропного тела с показателем заострения $\gamma = 1$ доказательство появления непрерывного спектра анонсировано И. В. Камоцким.

и расширении положительно определенной симметрической матрицы (36) до размера 8×8 линейал (6) содержит линейные вектор-функции переменных y_1 и y_2 , но не переменной z . Поэтому в случае острого пика (1) спектр оказывается дискретным, однако непустой существенный спектр возникает при ненулевом угле между осью пика и осью аппликат (изменяем область, сохраняя декартову систему координат и оператор $\mathcal{L}$).

Пример 7. Пусть $n = 2$ и матрица $\mathcal{D}(\nabla_x)$ составлена из $k+1$ строк длины k :

$$\begin{pmatrix} \partial_y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\partial_z & \partial_y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_z & \partial_y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\partial_z & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\partial_z \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Нетрудно убедиться в том, что полином

$$P(y, z) = \left(\frac{z^{k-1}}{(k-1)!0!}, \frac{z^{k-2}y}{(k-2)!1!}, \frac{z^{k-3}y^2}{(k-3)!2!}, \dots, \frac{y^{k-1}}{0!(k-1)!} \right)^\top,$$

имеющий степень $J = k - 1$, аннулируется дифференциальным оператором (38). Таким образом, при любом $\gamma > 0$ можно построить билинейную форму и матричный дифференциальный оператор, для которых спектр задачи (2), (3) в области с пиком (1) не является дискретным. $\square$

Пример 8. Пьезоэлектрическое тело Ω описывается (см., например, книгу [11]) при помощи задачи (2), (3), в которой $k = 4$ и $N = 9$, причем $u^{(1)} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ — столбец смещений, $u^{(2)} = u_4$ — электрический потенциал, а операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$ сооружены из следующих матриц, имеющих размеры 4×9 и 9×9 :

$$\mathcal{D}(\nabla_x)^\top = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(11)}(\nabla_x)^\top & \mathbb{I}_3 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0 & \nabla_x^\top \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ -A^{(21)} & A^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $A^{(11)}$ и $A^{(22)}$ — симметрические и положительно определенные матрицы размера 6×6 и 3×3 соответственно, $A^{(12)} = (A^{(21)})^\top$, а $\mathcal{D}^{(11)}(\nabla_x)^\top$ — оператор (35). В соответствии с физической интерпретацией задачи матрица A не является симметрической, а матрица $B = \text{diag}\{\rho, \rho, \rho, 0\}$ — положительной. Тем не менее приемы введения комплексного электрического потенциала $\varphi = iu_4$ [4, пример 1.13] и отщепления скалярной задачи для φ [12], в которой отсутствует спектральный параметр, приводят задачу пьезоэлектричества к виду, позволяющему перенести на нее результаты о спектре задачи теории упругости из примера 6. Интересно, что общие свойства спектра безразличны к тому, какие краевые условия, (3) или

$$e_j^\top \mathcal{N}(x, \nabla_x)u(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_4(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}, \quad (39)$$

заданы на границе тела (соотношения (39) означают, что поверхность тела свободна от внешних механических нагрузок и электрически заземлена, а условия (3) соответствуют тому, что тело помещено в вакуум). $\square$

Замечание 9. Пусть столбцы $a^1, \dots, a^k$ образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^k$. Если оказалось, что при некотором $m \in \{0, \dots, k\}$ любой столбец полиномов $p = (p_1, \dots, p_k)^\top \in \mathcal{P}$, для которого $a_1^j p_1(y, z) + \dots + a_k^j p_k(y, z)$ — нулевой вектор при всех $j = m + 1, \dots, k$ и $(y, z) \in \mathbb{R}^n$, не зависит от переменной z , то теорема 1 сохраняет силу при замене условий Неймана (3) смешанными краевыми условиями

$$\begin{aligned} (a^q)^\top \mathcal{N}(x, \nabla_x)u(x) &= 0, & q &= 1, \dots, m, \\ (a^j)^\top u(x) &= 0, & j &= m + 1, \dots, k, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (40)$$

Дело в том, что последние условия в (40) являются устойчивыми, и задача (4) ставится на подпространстве $\mathcal{H}^0 = \{u \in \mathcal{H} : (a^j)^\top u(x) = 0, x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}, j = m + 1, \dots, k\}$, которое выделяет линейал $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^0$, свободный по предположению от векторных полиномов, зависящих от переменной z . Все предшествующие доказательства приспособляются к задаче (2), (40). Заметим, что при $m = 0$ линейал $\mathcal{P}^0$ тривиален, а условия (40) означают равенство $u(x) = 0$, $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{O}$. Впрочем, спектр получившейся задачи Дирихле дискретен по простым причинам. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, изд-во Ленинград. ун-та, Л., 1985.
- [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, изд-во Ленинград. ун-та, Л., 1980.
- [3] С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*, в кн.: Проблемы матем. анализа. Вып. 16, изд-во СПбГУ, СПб, 1997, 167–192.
- [4] С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*, УМН, **54:5** (1999), 77–142.
- [5] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson-Academia, Paris-Prague, 1967.
- [6] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
- [7] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [8] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2001.
- [9] С. А. Назаров, *О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы*, Сиб. матем. ж., **49:5** (2008), 1105–1127.
- [10] С. А. Назаров, *Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях*, Матем. заметки, **62:5** (1997), 751–765; исправление: Матем. заметки, **63:4** (1998), 640.
- [11] В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев, *Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*, Наука, М., 1988.
- [12] С. А. Назаров, *Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины*, в кн.: Проблемы матем. анализа. Вып. 25, Научная книга, Новосибирск, 2003, 99–188.