Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Попарная ε -независимость множеств $T^i A$ для перемешивающего преобразования T , *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:32:58

УДК 517.9

Попарная ε -независимость множеств $T^i A$ для перемешивающего преобразования T

© 2009. В. В. Рыжиков*

1. Если для автоморфизма T вероятностного пространства $(X, \mathcal{B}, \mu)$ найдется множество A , $\mu(A) > 0$, со свойством

$$\mu(A \cap T^i A) - \mu(A)^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

то автоморфизм T имеет лебеговскую компоненту в спектре. Перемешивающий автоморфизм может не обладать этим свойством. Перемешивание означает, что $\mu(A \cap T^i B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$ при $i \rightarrow \infty$ для любых множеств $A, B \in \mathcal{B}$. В заметке показывается, что для любого перемешивающего автоморфизма T и чисел $a \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ существует множество A , $\mu(A) = a$, такое, что

$$|\mu(A \cap T^i A) - \mu(A)^2| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\varepsilon)$$

Если эти неравенства выполняются, мы говорим, что семейство множеств $T^i A$ обладает свойством попарной ε -независимости.

Из известной в эргодической теории леммы Рохлина–Халмоша вытекает, что для апериодического автоморфизма T , положительного числа ε и любого натурального N можно найти множество A , $\mu(A) = a \in (0, 1)$, такое, что $|\mu(A \cap T^i A) - a^2| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, N$. Если автоморфизм T обладает свойством перемешивания, то, начиная с некоторого момента $i > M$, выполняются неравенства $|\mu(A \cap T^i A) - a^2| < \varepsilon$. В работе Тихонова [1], посвященной новой метрике на классе перемешивающих преобразований, естественно возник вопрос о существовании для перемешивающего автоморфизма T такого множества A , $\mu(A) = 1/2$, что для всех $i > 0$ справедливы неравенства (ε) (это свойство является инвариантом действия). Сложность задачи сосредоточена в контроле величин $\mu(A \cap T^i A)$ для i из промежутка $[N, M]$.

При $a = 1/2$ обсуждаемая задача имеет простое решение в случае, когда перемешивающий автоморфизм T изоморфен произведению $T_1 \times T_2$ (или имеет такой фактор). Класс таких преобразований весьма широк. Известно, что автоморфизм T с положительной энтропией обладает бернуллиевским фактором, который представляется в виде декартова произведения $T_1 \times T_2$ (следствие теоремы Синая о слабом изоморфизме [3]). Для таких произведений существование требуемого множества A доказано в [2]. Приведем более простое рассуждение. Пусть автоморфизм T изоморфен произведению $T_1 \times T_2$, где T_1 является перемешивающим, а T_2 — апериодическим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество A вида $A = (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$, $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 1/2$, $\mu \times \mu(A) = 1/2$, такое, что множества $T^i A$ попарно ε -независимы. Для фиксированного A_1 , $\mu(A_1) = 1/2$, поскольку автоморфизм T_1 перемешивающий, найдется число M , такое, что $|\mu(A_1 \cap T_1^i A_1) - 1/4| < \varepsilon/2$ для всех $i > M$. Пусть A_2 таково, что $\mu(A_2) = 1/2$ и $|\mu(A_2 \cap T_2^i A_2) - 1/4| < \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \dots, M$.

*Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6849.2006.1).

Положим $B_i = X \setminus A_i$, $i = 1, 2$. Непосредственно проверяется, что все множества $T^i A$ попарно ε -независимы.

Цель заметки — дать решение этой задачи в общем случае. Необходимым и достаточным условием для нахождения требуемых множеств, как мы покажем, является отсутствие свойства, которое называется частичной жесткостью. По определению оно означает, что найдутся некоторое число $\rho > 0$ и последовательность n_k , такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(T^{n_k} B \cap B) \geq \rho \mu(B)$$

для любого измеримого множества B . При $\rho = 1$ такие преобразования называются жесткими. Свойство перемешивания влечет за собой отсутствие частичной жесткости.

Теорема 1. *Для эргодического автоморфизма T , не являющегося частично жестким, и любых чисел $a \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ существует множество A , $\mu(A) = a$, такое, что $|\mu(A \cap T^i A) - a^2| < \varepsilon$ для всех $i > 0$.*

Предлагаемый метод, использующий энтропийные и аппроксимационные аргументы, представляется полезным для обобщений в разных направлениях. Ж.-П. Туveno задал вопрос, верна ли теорема 1 для перемешивающих действий счетных аменабельных групп. В. Бергельсон ставит вопрос в другом направлении: можно ли, исследуя ε -независимость, различать классы автоморфизмов с различными перемешивающими свойствами? Недавно А. И. Баштанов обобщил результат автора на случай кратных пересечений (его статья с подробными доказательствами находится в стадии подготовки).

2. Доказательство теоремы изложим для $a = 1/2$, общий случай рассматривается аналогично. Для заданного $\varepsilon > 0$ мы найдем разбиение ξ вида

$$\{E^1, TE^1, \dots, T^{h^1} E^1, E^2, TE^2, \dots, T^{h^2} E^2, \dots, E^N, TE^N, \dots, T^{h^N} E^N\},$$

такое, что для большинства ξ -измеримых множеств A для всех $i > 0$ будет выполнено неравенство $|\mu(A \cap T^i A) - 1/4| < \varepsilon$ и при этом высоты h^i в разбиении ξ будут принимать только два значения. (Напомним, что набор (или объединение) непересекающихся измеримых множеств вида $E, TE, T^2 E, \dots, T^h E$ называется башней, а число h — ее высотой.)

Поясним, как найти такое разбиение. Будем говорить, что последовательность разбиений ξ_j является *аппроксимирующей*, если любое измеримое множество аппроксимируется ξ_j -измеримыми множествами.

Лемма 2. *Для любого $\delta > 0$ эргодический автоморфизм T обладает таким фактором, что для него найдется аппроксимирующая последовательность разбиений вида*

$$\xi_j = \{E_j^1, TE_j^1, \dots, T^{h_j^1} E_j^1, E_j^2, TE_j^2, \dots, T^{h_j^2} E_j^2, \dots, E_j^{N_j}, TE_j^{N_j}, \dots, T^{h_j^{N_j}} E_j^{N_j}\},$$

причем $H_j + 1 \geq h_j^i \geq H_j$ и $N_j < 2^{\delta H_j}$ для некоторой последовательности $H_j \rightarrow \infty$.

Аналог этой леммы восходит к Катку [4]. Мы пользуемся тем, что автоморфизм T с положительной энтропией имеет фактор, энтропия которого сколь угодно мала.

Теперь изложим способ построения множества A . Используя лемму 2, найдем аппроксимирующую последовательность ξ_j . В качестве ξ берем ξ_j с большим номером j . Случайно отмечаем половину атомов в разбиении ξ . Если j достаточно велико, то с вероятностью, близкой к 1, объединение этих атомов даст нужное множество. Покажем это.

Лемма 3. *Для $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и натуральное H_ε , такие, что для любого $H > H_\varepsilon$ с вероятностью, близкой к 1, последовательность из нулей и единиц $\{a_i : i = 1, \dots, [2^{\delta H/3}]\}$ удовлетворяет условию*

$$H/4 - \varepsilon H \leq |\{i : 1 \leq i \leq H, a_{p+i} = a_{q+i} = 1\}| \leq H/4 + \varepsilon H \quad (\text{pq})$$

для всех p, q при $1 \leq p < q \leq 2^{\delta H/3} - H$.

Доказательство леммы 3. Для фиксированных p, q вероятность того, что условие (pq) не выполняется, меньше $2^{-\delta H}$ для некоторого $\delta \sim \varepsilon^2$. Вероятность того, что (pq) выполняется для всех p, q при $1 \leq p < q \leq 2^{\delta H/3} - H$, больше, чем $1 - (2^{\delta H/3} - H)^2 2^{-\delta H} \approx 1$. $\square$

Лемма 3 позволяет доказывать ε -независимость множеств A и $T^n A$ «локально» (т. е. на кусках орбит). Рассмотрим кусок орбиты вида $x, Tx, \dots, T^{H-1}x$, лежащий целиком в одной из башен разбиения ξ_j из леммы 2. Отметим в нем точки, принадлежащие множеству A . Подеиствуем на отмеченные точки преобразованием T^n и оставим только точки, попавшие в A . Число их в случае, когда точки $T^n x$ и x лежат в разных атомах разбиения ξ , будет близко к $H/4$. Это непосредственно вытекает из леммы 3 при условии, что множество $T^n x, T^n Tx, \dots, T^n T^{H-1}x$ лежит в одной башне. Несложное рассуждение приводит к аналогичному результату в ситуации, когда $T^n x, T^n Tx, \dots, T^n T^{H-1}x$ расположено в двух башнях. Остается случай, когда при $n > H_j$ точки x и $T^n x$ принадлежат одному атому (множеству вида $T^k E_j^i$). Вероятность этого события будет мала, если мала величина

$$\sum_{i=1}^{N_j} \mu(T^n E_j^i \cap E_j^i)(h_j^i + 1).$$

Лемма 4 устанавливает существование разбиения, для которого эта сумма мала для всех натуральных $n > 0$, и тем самым завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть для эргодического автоморфизма T задана аппроксимирующая последовательность вида*

$$\xi_j = \{E_j^1, TE_j^1, \dots, T^{h_j^1} E_j^1, E_j^2, TE_j^2, \dots, T^{h_j^2} E_j^2, \dots, E_j^{N_j}, TE_j^{N_j}, \dots, T^{h_j^{N_j}} E_j^{N_j}\},$$

причем высоты h_j^i принимают только значения H_j и $H_j + 1$ для некоторой последовательности $H_j \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{n > H_j} \sum_{i=1}^{N_j} \mu(T^n E_j^i \cap E_j^i)(h_j^i + 1) = 0.$$

Подобное утверждение для преобразований ранга 1 рассматривали С. Каликов и автор (см. [5] и лемму 2.5 из [6]).

Доказательство леммы 4. Предположим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_j} \mu(T^{n_j} E_j^i \cap E_j^i) (h_j^i + 1) \geq \rho > 0$$

для некоторой последовательности $n_j > H_j$. Покажем, что для любого измеримого множества B

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{n_j} B \cap B) \geq \rho \mu(B) \quad (*)$$

(свойство частичной жесткости с коэффициентом ρ). Множество B можно аппроксимировать ξ_j -измеримыми множествами B_j . Неравенства $\mu(T^{n_j} B_j \cap B_j) \geq \rho \mu(B_j) - \delta_j$, $\delta_j \rightarrow 0$, непосредственно устанавливаются для множеств B_j при условии, что величины $\mu(B_j | U_j^i)$ близки к $\mu(B_j)$ для большинства (в смысле веса) башен $U_j^i = E_j^i \cup T E_j^i \cup \dots \cup T^{h_j^i} E_j^i$.

Из эргодичности T и стремления величин h_j^i к бесконечности вытекает, что для большинства башен U_j^i величины $\mu(B | U_j^i)$ близки к $\mu(B)$ при фиксированном B . Учитывая, что $\mu(B_j \Delta B) \rightarrow 0$, получаем, что $\mu(B_j | U_j^i) \approx \mu(B_j)$ для большинства башен U_j^i . Таким образом, установлены неравенства $\mu(T^{n_j} B_j \cap B_j) \geq \rho \mu(B_j) - \delta_j$, что влечет за собой (*). Так как автоморфизм T не обладает свойством частичной жесткости, приходим к противоречию. $\square$

Автор благодарит Ж.-П. Тувено, а также В. Бергельсона за стимулирующие беседы. Автор также признателен рецензенту за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. В. Тихонов, УМН, **62**:1 (2007), 209–210. [2] С. В. Тихонов, Матем. сб., **198**:4 (2007), 135–158. [3] Я. Г. Синай, Матем. сб., **63**:1 (1964), 23–42. [4] А. Б. Каток, Функц. анализ и его прил., **1**:1 (1967), 75–85. [5] S. Kalikow, Ergodic Theory Dynamic Systems, **4** (1984), 237–259. [6] В. В. Рыжиков, Матем. сб., **183**:3 (1992), 133–160.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vryzh@mail.ru

Поступило в редакцию
7 мая 2007 г.

УДК 512.553+517.986.2

О подмодулях Ли и тензорных алгебрах

© 2009. В. С. Шульман, Т. В. Шульман

1. Введение. Пусть B — произвольная ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$. Подпространство $C \subset B$ называется ее идеалом Ли, если $ax - xa \in C$ для всех $a \in B$, $x \in C$. Структура идеалов Ли ассоциативных алгебр привлекала внимание алгебраистов и специалистов по теории банаховых алгебр, начиная с работ Херстейна [3] и Джекобсона и Риккарта [4]. Более общей является задача описания структуры подмодулей Ли в произвольном B -бимодуле $\mathcal{X}$ (это подпространства в $\mathcal{X}$, определяемые формально теми же условиями, что и идеалы Ли).