Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис, Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:58:44

Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев*

© 2009. В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис

Мы рассматриваем дискретные нелинейные гиперболические уравнения на квадратах, в частности на решетке $\mathbb{Z}^2$. Поля ассоциированы с вершинами, и уравнение $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ связывает четыре вершины одной ячейки. Интегрируемость уравнений понимается как 3D-совместность. Это означает, что уравнения одного и того же типа можно приписать всем граням трехмерного куба так, что полученная система будет совместной. Это позволяет также распространить данные уравнения на многомерные решетки $\mathbb{Z}^N$. Мы классифицируем интегрируемые уравнения с комплексными полями x и с Q , являющимся мультиаффинным многочленом по всем аргументам. Метод основан на анализе сингулярных решений.

§1. Введение

Концепция совместности является центральной в теории интегрируемых систем. Она появляется уже в самом определении вполне интегрируемого по Лиувиллю–Арнольду гамильтонова потока, которое гласит, что поток должен быть включен в полное семейство коммутирующих (совместных) гамильтоновых потоков [1]. Аналогично, для солитонных (интегрируемых) уравнений в частных производных характерно то, что они не являются изолированными объектами, но всегда организованы в иерархии совместных систем. Условие существования набора коммутирующих систем может быть положено в основу *симметричного подхода* в задаче о выделении и классификации интегрируемых случаев среди того или иного типа уравнений общего вида [18]. Еще одним проявлением идеи совместности является связь между непрерывными и дискретными системами, основанная на понятии *преобразования Бэклунда* и *теореме Бьянки о перестановочности* [9]. Последняя играет роль одного из фундаментальных принципов в дискретной дифференциальной геометрии [12].

Итак, совместность дискретных уравнений выходит на центральную сцену. Мы говорим, что

d -мерное дискретное уравнение обладает свойством совместности, если оно может быть согласованно распространено на все d -мерные подрешетки в $(d + 1)$ -мерной решетке

(более точное определение дается ниже). Из сказанного выше следует, что связь данного понятия с интегрируемостью не является новой идеей. В случае $d = 1$ она использовалась как возможное определение интегрируемости отображений [24]. При $d = 2$ решающий шаг был сделан в [10] и, независимо, в [19]: было

*Работа первого автора поддержана DFG Research Unit 565 “Polyhedral Surfaces” и грантом РФФИ 04-01-00403. Работа второго автора поддержана DFG Research Unit 565 “Polyhedral Surfaces”. Работа третьего автора поддержана ESF Scientific Programme “Methods of Integrable Systems, Geometry, Applied Mathematics” (MISGAM).

показано, что интегрируемость в обычном смысле солитонной теории (как существование представления нулевой кривизны) *выводится* для двумерных систем из трехмерной совместности. Таким образом, последнее свойство может быть принято в качестве определения интегрируемости. Данный критерий допускает алгоритмическую проверку, без какой-либо дополнительной информации, кроме той, что заложена в самом уравнении. Более того, если результат проверки положителен, то мы получаем также дискретное представление нулевой кривизны.

Элементарным строительным блоком систем на квад-графах является квад-уравнение, т. е. уравнение

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad (1)$$

на четырехугольной ячейке, где полевые переменные $x_i \in \mathbb{CP}^1$ приписаны вершинам четырехугольника, как показано на рис. 1. На решетке $\mathbb{Z}^2$ уравнения такого типа можно интерпретировать как дискретные аналоги нелинейных гиперболических уравнений. Начально-краевые задачи типа Гурса для таких систем изучались в [6].

Предположение. В данной работе мы предполагаем, что Q является *мультиаффинным* многочленом, т. е. имеет степень 1 по каждому аргументу. Отсюда следует, что уравнение (1) можно разрешить относительно любой переменной, причем ответ является рациональной функцией от остальных трех переменных.

Рис. 1. Квад-уравнение $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$; переменные x_i приписаны вершинам

Общая идея интегрируемости как совместности изображается для уравнений данного типа рисунком 2. Мы приписываем шесть квад-уравнений граням координатного куба. Значок j обозначает сдвиг в направлении j -й координаты. Стартуя с произвольных значений x, x_1, x_2, x_3 , мы находим значения x_{12}, x_{13}, x_{23} при помощи трех уравнений на левой, передней и нижней гранях, а уравнения на правой, задней и верхней грани определяют, вообще говоря, три разных значения для x_{123} . Система называется 3D-совместной, если данные три значения тождественно равны для произвольных начальных данных x, x_1, x_2, x_3 .

В [3] мы классифицировали 3D-совместные системы частного вида. Уравнения на всех гранях предполагались одинаковыми с точностью до параметров, ассоциированных с тремя направлениями ребер. Кроме того, мы накладывали условия симметрии куба, а также некое дополнительное условие, так называемое свойство тетраэдральности (см. ниже). 3D-совместная система без этого свойства была найдена в [13], позднее было показано, что она линеаризуема [22].

Рис. 2. 3D-совместная система квад-уравнений.
Уравнения приписаны граням куба

В [26] было показано, что 3D-совместные уравнения из списка [3] удовлетворяют тесту на интегрируемость, основанному на понятии алгебраической энтропии.

Данный подход обобщался в различных направлениях. Системы с полями на ребрах ведут к отображениям Янга–Бакстера [25], [23], [20]. Квадрилициональные отображения Янга–Бакстера были классифицированы в [4]. 4D-совместность дискретных 3D-систем связана с функциональным уравнением тетраэдра, изучавшимся в [17], [16], [15], [8].

В настоящей статье мы возвращаемся к задаче классификации 3D-совместных мультиаффинных квад-уравнений в более общей постановке. Допускается а priori, что граням совместного куба могут отвечать разные квад-уравнения. Не накладываются ни условие симметрии, ни условие тетраэдральности. Это ведет к общей классификации интегрируемых квад-уравнений.

Схематически наш подход заключается в следующем.

а) Последовательно исключая переменные при помощи операций типа дискриминанта, можно устроить спуск от мультиаффинного многочлена от четырех переменных, ассоциированного с четырехугольником, к биквадратичным многочленам от двух переменных, ассоциированным с его сторонами, и, наконец, к многочленам четвертой степени от одной переменной, ассоциированным с вершинами (§2).

б) Анализируя сингулярные решения, мы доказываем, что биквадратичные многочлены, пришедшие на ребро куба с двух смежных граней, совпадают с точностью до постоянного множителя (см. §3). В этом месте требуется некоторое дополнительное условие невырожденности: мы предполагаем, что рассматриваемые биквадратичные многочлены не имеют множителей типа $x - \text{const}$. (Примеры уравнений без этого свойства приведены в §7).

с) Это позволяет сопоставить каждой вершине куба многочлен четвертой степени от соответствующей переменной; допустимые наборы многочленов классифицируются по модулю преобразований Мёбиуса, причем каждая переменная преобразуется независимо от других (§4).

д) В завершение мы обращаем процедуру, восстанавливая сначала биквадратичные многочлены на ребрах куба, а затем и сами мультиаффинные уравнения (§6).

§2. Мультиаффинные и биквадратичные уравнения

Наш подход основан на спуске с граней на ребра и далее на вершины куба. В этом параграфе мы рассмотрим одну отдельную грань и опишем этот спуск безотносительно к 3D-совместности. Пусть $\mathcal{P}_n^m$ обозначает множество многочленов от n переменных степени m по каждой из них. Рассмотрим следующее действие преобразований Мёбиуса на многочлены $f \in \mathcal{P}_n^m$:

$$M[f](x_1, \dots, x_n) = (c_1x_1 + d_1)^m \cdots (c_nx_n + d_n)^m f\left(\frac{a_1x_1 + b_1}{c_1x_1 + d_1}, \dots, \frac{a_nx_n + b_n}{c_nx_n + d_n}\right),$$

где $a_id_i - b_ic_i = \Delta_i \neq 0$. Операции

$$\mathcal{P}_4^1 \xrightarrow{\delta_{x_i, x_j}} \mathcal{P}_2^2 \xrightarrow{\delta_{x_k}} \mathcal{P}_1^4, \quad \delta_{x,y}(Q) = Q_x Q_y - Q Q_{xy}, \quad \delta_x(h) = h_x^2 - 2h h_{xx},$$

ковариантны по отношению к преобразованиям Мёбиуса (индексы x, y обозначают частные производные). Точнее: если $Q \in \mathcal{P}_4^1$, $h \in \mathcal{P}_2^2$, то

$$\delta_{x_i, x_j}(M[Q]) = \Delta_i \Delta_j M[\delta_{x_i, x_j}(Q)], \quad \delta_{x_i}(M[h]) = \Delta_i^2 M[\delta_{x_i}(h)]. \quad (2)$$

В дальнейшем мы широко используем *относительные инварианты* многочленов относительно преобразований Мёбиуса. Для многочленов четвертой степени $r \in \mathcal{P}_1^4$ эти относительные инварианты хорошо известны и определяются как коэффициенты вейерштрассовской нормальной формы $r = 4x^3 - g_2x - g_3$. Для данного многочлена $r(x) = r_4x^4 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0$ они задаются формулами (см., например, [28])

$$\begin{aligned} g_2(r, x) &= \frac{1}{48}(2rr^{IV} - 2r'r''' + (r'')^2) = \frac{1}{12}(12r_0r_4 - 3r_1r_3 + r_2^2), \\ g_3(r, x) &= \frac{1}{3456}(12rr''r^{IV} - 9(r')^2r^{IV} - 6r(r''')^2 + 6r'r''r''' - 2(r'')^3) \\ &= \frac{1}{432}(72r_0r_2r_4 - 27r_1^2r_4 + 9r_1r_2r_3 - 27r_0r_3^2 - 2r_2^3). \end{aligned}$$

При мёбиусовой замене $x = x_1$ эти величины лишь умножаются на постоянные множители:

$$g_k(M[r], x) = \Delta_1^{2k} g_k(r, x), \quad k = 2, 3.$$

Для биквадратичных многочленов $h \in \mathcal{P}_2^2$,

$$h(x, y) = h_{22}x^2y^2 + h_{21}x^2y + h_{20}x^2 + h_{12}xy^2 + h_{11}xy + h_{10}x + h_{02}y^2 + h_{01}y + h_{00}, \quad (3)$$

относительными инвариантами являются величины

$$\begin{aligned} i_2(h, x, y) &= 2hh_{xxyy} - 2h_xh_{xyy} - 2h_yh_{xxy} + 2h_{xx}h_{yy} + h_{xy}^2 \\ &= 8h_{00}h_{22} - 4h_{01}h_{21} - 4h_{10}h_{12} + 8h_{02}h_{20} + h_{11}^2, \\ i_3(h, x, y) &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} h & h_x & h_{xx} \\ h_y & h_{xy} & h_{xxy} \\ h_{yy} & h_{xyy} & h_{xxyy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h_{22} & h_{21} & h_{20} \\ h_{12} & h_{11} & h_{10} \\ h_{02} & h_{01} & h_{00} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что i_3 можно определить также формулой

$$-4i_3(h, x, y) = \delta_{x,y}(\delta_{x,y}(h))/h.$$

Закон преобразования при мёбиусовых заменах $x = x_1$ и $y = x_2$ имеет вид

$$i_k(M[h], x, y) = \Delta_1^k \Delta_2^k i_k(h, x, y), \quad k = 2, 3.$$

Следующие свойства операций $\delta_{x,y}$, δ_x проверяются прямыми вычислениями.

Лемма 1. Для любого мультиаффинного многочлена $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{P}_4^1$ выполняются тождества

$$\delta_{x_3}(\delta_{x_1, x_2}(Q)) = \delta_{x_2}(\delta_{x_1, x_3}(Q)), \quad (4)$$

$$i_k(\delta_{x_1, x_2}(Q), x_3, x_4) = i_k(\delta_{x_3, x_4}(Q), x_1, x_2), \quad k = 2, 3. \quad (5)$$

Для любого биквадратичного многочлена $h(x_1, x_2) \in \mathcal{P}_2^2$ верно тождество

$$g_k(\delta_{x_1}(h), x_2) = g_k(\delta_{x_2}(h), x_1), \quad k = 2, 3. \quad (6)$$

Положим $h^{ij} = h^{ji} = \delta_{x_k, x_l}(Q)$, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда из леммы 1 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} r_4(x_4) & \xleftarrow{\delta_{x_3}} & h^{34}(x_3, x_4) & \xrightarrow{\delta_{x_4}} & r_3(x_3) \\ \delta_{x_1} \uparrow & & \uparrow \delta_{x_1, x_2} & & \uparrow \delta_{x_2} \\ h^{14}(x_1, x_4) & \xleftarrow{\delta_{x_2, x_3}} & Q(x_1, x_2, x_3, x_4) & \xrightarrow{\delta_{x_1, x_4}} & h^{23}(x_2, x_3) \\ \delta_{x_4} \downarrow & & \downarrow \delta_{x_3, x_4} & & \downarrow \delta_{x_3} \\ r_1(x_1) & \xleftarrow{\delta_{x_2}} & h^{12}(x_1, x_2) & \xrightarrow{\delta_{x_1}} & r_2(x_2) \end{array} \quad (7)$$

Более того, биквадратичные многочлены на противоположных сторонах имеют одинаковые инварианты i_2 , i_3 , а инварианты g_2 , g_3 совпадают для всех многочленов четвертой степени r_i . Данная диаграмма может быть дополнена многочленами h^{13} , h^{24} , отвечающими диагоналям (так что возникает граф тетраэдра), но они нам не понадобятся. Для введенных многочленов выполняется еще ряд интересных соотношений.

Лемма 2. Для любого мультиаффинного многочлена $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{P}_4^1$ выполнены следующие тождества (используются обозначения $h^{ij}(x_i, x_j) = \delta_{x_k, x_l}(Q) \in \mathcal{P}_2^2$):

$$4i_3(h^{12}, x_1, x_2)h^{14} = \det \begin{pmatrix} h^{12} & h_{x_1}^{12} & \ell \\ h_{x_2}^{12} & h_{x_1 x_2}^{12} & \ell_{x_2} \\ h_{x_2 x_2}^{12} & h_{x_1 x_2 x_2}^{12} & \ell_{x_2 x_2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\ell = h_{x_3 x_3}^{23} h^{34} - h_{x_3}^{23} h_{x_3}^{34} + h^{23} h_{x_3 x_3}^{34}$,

$$h^{12} h^{34} - h^{14} h^{23} = PQ, \quad P = \det \begin{pmatrix} Q & Q_{x_1} & Q_{x_3} \\ Q_{x_2} & Q_{x_1 x_2} & Q_{x_2 x_3} \\ Q_{x_4} & Q_{x_1 x_4} & Q_{x_3 x_4} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_4^1, \quad (9)$$

$$\frac{2Q_{x_1}}{Q} = \frac{h_{x_1}^{12} h^{34} - h_{x_1}^{14} h^{23} + h^{23} h_{x_3}^{34} - h_{x_3}^{23} h^{34}}{h^{12} h^{34} - h^{14} h^{23}}. \quad (10)$$

Тождество (8) показывает, что h^{14} можно выразить через три остальных биквадратичных многочлена (при условии, что $i_3(h^{12}) \neq 0$). Тождество (9) определяет Q как один из сомножителей в простом выражении, составленном из h^{ij} . Наконец, дифференцируя (10) по x_2 или x_4 , мы получаем соотношение вида $Q^2 = F[h^{12}, h^{23}, h^{34}, h^{14}]$, где F есть рациональное выражение от h^{ij} и их производных. Следовательно, если известны биквадратичные многочлены на трех сторонах из четырех, то Q находится явно. Конечно, из леммы 2 ясно, что не всякий набор из трех биквадратичных многочленов может быть получен как h^{ij} для некоторого $Q \in \mathcal{P}_4^1$.

Биквадратичные многочлены h^{ij} для данного $Q \in \mathcal{P}_4^1$ тесно связаны с сингулярными решениями мультиаффинного уравнения

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \quad (11)$$

Многочлен $Q \in \mathcal{P}_4^1$ предполагается неприводимым (в частности, $Q_{x_i} \neq 0$: иначе многочлен Q следует считать приводимым, так как замена $x_i \mapsto 1/x_i$ переводит его в $x_i Q$). Очевидно, что уравнение (11) разрешимо относительно любой переменной: пусть $Q = p(x_j, x_k, x_l)x_i + q(x_j, x_k, x_l)$; тогда $x_i = -q/p$ для значений x_j, x_k, x_l общего положения. Однако значение x_i не определено в точках (x_j, x_k, x_l) , лежащих на кривой

$$S_i : p(x_j, x_k, x_l) = q(x_j, x_k, x_l) = 0, \quad Q \equiv px_i + q, \quad (12)$$

в $(\mathbb{CP}^1)^3$. Проекция этой кривой на координатную плоскость (j, k) есть в точности биквадратичная кривая $h^{jk} = pq_{x_l} - p_{x_l}q = 0$.

Определение 1. Решение (x_1, x_2, x_3, x_4) уравнения (11) называется *сингулярным* относительно x_i , если оно удовлетворяет также уравнению $Q_{x_i}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Кривая S_i называется *сингулярной кривой* для x_i .

Лемма 3. Если решение (x_1, x_2, x_3, x_4) уравнения (11) сингулярно относительно x_i , то $h^{jk} = h^{jl} = h^{kl} = 0$. Обратно, если для некоторого решения $h^{jk} = 0$, то это решение сингулярно либо относительно x_i , либо относительно x_l .

Доказательство. Так как $h^{jk} = Q_{x_i}Q_{x_l} - QQ_{x_i, x_l}$, то уравнения $h^{jk} = 0$ и $Q_{x_i}Q_{x_l} = 0$ эквивалентны на решениях уравнения $Q = 0$. $\square$

Мы используем следующее определение невырожденности биквадратичных многочленов.

Определение 2. Биквадратичный многочлен $h(x, y) \in \mathcal{P}_2^2$ называется *невырожденным*, если его класс эквивалентности по модулю преобразований Мёбиуса не содержит многочленов, делящихся на множитель вида $x - c$ или $y - c$, где $c = \text{const}$.

Согласно данному определению, невырожденный многочлен $h(x, y) \in \mathcal{P}_2^2$ либо неприводим, либо имеет вид $(\alpha_1 xy + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1)(\alpha_2 xy + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2)$, где $\alpha_i \delta_i \neq \beta_i \gamma_i$. В обоих случаях уравнение $h = 0$ определяет y как двузначную функцию от x и наоборот. С другой стороны, например, многочлен $h(x, y) = x - y^2$ (рассматриваемый как элемент из $\mathcal{P}_2^2$) является, согласно определению 2, вырожденным, так как инверсия $x \mapsto 1/x$ переводит его в $x(1 - xy^2)$.

Следующее понятие играет фундаментальную роль в нашем исследовании.

Определение 3. Мультиаффинная функция $Q \in \mathcal{P}_4^1$ относится к типу Q , если невырождены все четыре отвечающих ей биквадратичных многочлена $h^{jk} \in \mathcal{P}_2^2$, и к типу H в противном случае.

§3. 3D-совместность и биквадратичные кривые

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} A(x, x_1, x_2, x_{12}) &= 0, & \bar{A}(x_3, x_{13}, x_{23}, x_{123}) &= 0, \\ B(x, x_1, x_3, x_{13}) &= 0, & \bar{B}(x_2, x_{12}, x_{23}, x_{123}) &= 0, \\ C(x, x_2, x_3, x_{23}) &= 0, & \bar{C}(x_1, x_{12}, x_{13}, x_{123}) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

на кубе, см. рис. 3. Функции $A, \dots, \bar{C}$ считаются мультиаффинными (т.е. принадлежат $\mathcal{P}_4^1$) и а priori никак не связаны друг с другом. Для соответствующих биквадратичных многочленов мы будем использовать обозначение $A^{ij} = \delta_{x_k, x_l} A$.

Рис. 3. 3D-совместная система квад-уравнений. Уравнения ассоциированы с гранями куба: A и $\bar{A}$ с нижней и верхней, B и $\bar{B}$ с передней и задней, C и $\bar{C}$ с левой и правой.

Теорема 1. Пусть все шесть функций $A, \dots, \bar{C}$ относятся к типу Q , и пусть система (13) 3D-совместна. Тогда

1) для каждого ребра куба два биквадратичных многочлена, отвечающих этому ребру (пришедших с двух граней, смежных по данному ребру), совпадают с точностью до постоянного множителя;

2) произведение этих множителей вокруг любой вершины равно -1 , например,

$$A^{0,1} B^{0,3} C^{0,2} + A^{0,2} B^{0,1} C^{0,3} = 0; \quad (14)$$

3) система (13) обладает свойством тетраэдральности $\partial x_{123} / \partial x = 0$.

Доказательство. Исключение x_{12} , x_{13} и x_{23} приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} F(x, x_1, x_2, x_3, x_{123}) &= \bar{A}_{x_{13}, x_{23}} BC - \bar{A}_{x_{23}} B_{x_{13}} C - \bar{A}_{x_{13}} BC_{x_{23}} + \bar{A} B_{x_{13}} C_{x_{23}} = 0, \\ G(x, x_1, x_2, x_3, x_{123}) &= \bar{B}_{x_{12}, x_{23}} AC - \bar{B}_{x_{23}} A_{x_{12}} C - \bar{B}_{x_{12}} AC_{x_{23}} + \bar{B} A_{x_{12}} C_{x_{23}} = 0, \\ H(x, x_1, x_2, x_3, x_{123}) &= \bar{C}_{x_{12}, x_{13}} AB - \bar{C}_{x_{13}} A_{x_{12}} B - \bar{C}_{x_{12}} AB_{x_{13}} + \bar{C} A_{x_{12}} B_{x_{13}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь числа над аргументами функций F, G, H указывают степень, с которой данная переменная входит в правую часть (степень понимается в проективном смысле, см. пример в конце предыдущего параграфа). В силу 3D-совместности выражения для x_{123} как функции от x, x_1, x_2, x_3 , найденные из этих уравнений, должны совпадать. Следовательно, имеют место разложения на множители

$$F = f(x, \overset{2}{x}_3)K, \quad G = g(x, \overset{2}{x}_2)K, \quad H = h(x, \overset{2}{x}_1)K, \quad K = K(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3, \overset{1}{x}_{123}), \quad (15)$$

где f, g, h — некие многочлены степени 2 по второму аргументу. Степень по x следует уточнить.

Пусть начальные значения x, x_1, x_2 суть свободные переменные, а x_3 выберем так, чтобы выполнялось уравнение $f(x, x_3) = 0$. Тогда $F \equiv 0$ и, следовательно, система $B = C = \bar{A} = 0$ не дает определенного значения x_{123} . При этом уравнение $B = 0$ разрешимо относительно x_{13} , так как иначе начальные данные были бы связаны соотношением $B^{0,1}(x, x_1) = 0$. Аналогично, уравнение $C = 0$ разрешимо относительно x_{23} . Следовательно, неопределенность возникает из-за сингулярности уравнения $\bar{A} = 0$ относительно x_{123} . Следовательно, выполняется связь $\bar{A}^{3,13}(x_3, x_{13}) = 0$. В силу предположения теоремы x_{13} является (двузначной) функцией от x_3 и не зависит от x_1 . Это значит, что уравнение $B = 0$ сингулярно относительно x_1 и, следовательно, $B^{0,3}(x, x_3) = 0$. Аналогично, $C^{0,3}(x, x_3) = 0$.

Итак, мы доказали, что если $x_3 = \varphi(x)$ есть нуль многочлена f , то он является также нулем многочленов $B^{0,3}$ и $C^{0,3}$. Если один из этих трех многочленов неприводим, то отсюда уже следует их совпадение с точностью до постоянного множителя. Если многочлены приводимы, мы не можем этого утверждать, так как имеется возможность $f = a^2$, $B^{0,3} = ab$, $C^{0,3} = ac$, где a, b, c мультиаффинны по x, x_3 . Однако в любом случае $\deg_x f = 2$, и этого достаточно для завершения доказательства.

Действительно, отсюда следует, что $\deg_x K = 0$, т.е. выполняется свойство тетраэдральности. В свою очередь, из этого вытекает соотношение (14), как показано в [3]. Напомним это вычисление: перепишем систему (13) в виде

$$\begin{aligned} x_{12} &= a(x, x_1, x_2), & x_{13} &= b(x, x_1, x_3), & x_{23} &= c(x, x_2, x_3), \\ x_{123} &= d(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}(x_3, x_{13}, x_{23}) = \bar{b}(x_2, x_{12}, x_{23}) = \bar{c}(x_1, x_{12}, x_{13}) \end{aligned}$$

и получим дифференцированием

$$\begin{aligned} d_{x_1} &= \bar{a}_{x_{13}} b_{x_1}, & d_{x_2} &= \bar{a}_{x_{23}} c_{x_2}, & 0 &= \bar{a}_{x_{13}} b_x + \bar{a}_{x_{23}} c_x, \\ d_{x_1} &= \bar{b}_{x_{12}} a_{x_1}, & d_{x_3} &= \bar{b}_{x_{23}} c_{x_3}, & 0 &= \bar{b}_{x_{12}} a_x + \bar{b}_{x_{23}} c_x, \\ d_{x_2} &= \bar{c}_{x_{12}} a_{x_2}, & d_{x_3} &= \bar{c}_{x_{13}} b_{x_3}, & 0 &= \bar{c}_{x_{12}} a_x + \bar{c}_{x_{13}} b_x. \end{aligned}$$

Эти уравнения сразу дают соотношение

$$a_{x_2} b_{x_1} c_{x_3} + a_{x_1} b_{x_3} c_{x_2} = 0,$$

эквивалентное (14) в силу тождества $a_{x_2}/a_{x_1} = A^{0,1}/A^{0,2}$. Переменные в уравнении (14) разделяются: $B^{0,3}/C^{0,3} = -A^{0,2}/C^{0,2} \cdot B^{0,1}/A^{0,1}$, так что $B^{0,3}/C^{0,3}$ может зависеть лишь от x . В силу предположения теоремы это отношение постоянно. $\square$

Существуют 3D-совместные системы с уравнениями, не принадлежащими типу Q . Для таких систем утверждения теоремы 1 могут выполняться или не выполняться, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Простейшим 3D-совместным уравнением является линейное уравнение

$$x + x_i + x_j + x_{ij} = 0.$$

В этом случае все биквадратичные многочлены равны 1, так что утверждение 1) выполнено, а утверждение 2) — нет. Так как 2) есть следствие свойства тетраэдральности 3), то последнее также не выполняется. Действительно,

$$x_{123} = 2x + x_1 + x_2 + x_3.$$

Множитель f в этом примере также равен 1, но это совпадение нарушается при преобразованиях Мёбиуса. Действительно, в этом случае $\deg_x K = 1$, и после инверсии всех переменных $x_I \rightarrow 1/x_I$ мы приходим к $f = xx_3^2$, тогда как $B^{0,3}$ переходит в $x^2x_3^2$.

Пример 2. Уравнение Хиетаринты [13]

$$(x - e^{(j)})(x_{ij} - o^{(j)})(x_i - o^{(i)})(x_j - e^{(i)}) - (x - e^{(i)})(x_{ij} - o^{(i)})(x_i - e^{(j)})(x_j - o^{(j)}) = 0 \quad (16)$$

3D-совместно, но утверждение 1) не выполняется:

$$B^{0,3} = (e^{(3)} - o^{(1)})(o^{(1)} - o^{(3)})(x - e^{(3)})(x - e^{(1)})(x_3 - e^{(1)})(x_3 - o^{(3)}),$$

$$C^{0,3} = (e^{(3)} - o^{(2)})(o^{(2)} - o^{(3)})(x - e^{(3)})(x - e^{(2)})(x_3 - e^{(2)})(x_3 - o^{(3)}).$$

Множитель f пропорционален $(x - e^{(3)})(x_3 - e^{(1)})(x_3 - e^{(2)})$. Соответственно $\deg_x K = 1$ и свойство тетраэдральности не выполняется.

Пример 3. Вероятно, самый известный пример 3D-совместной системы — это дискретное потенциальное уравнение KdV

$$(x - x_{ij})(x_i - x_j) + \alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = 0. \quad (17)$$

В этом случае все утверждения теоремы выполняются, несмотря на вырожденность биквадратичных кривых:

$$B^{0,3} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)}, \quad C^{0,3} = \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}, \quad f = 1.$$

(Напомним, что степень понимается в проективном смысле. При инверсии эти многочлены превращаются в $x^2x_3^2$.)

Пример 4. Уравнение (Q_1)

$$Q(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \delta)$$

$$= \alpha^{(1)}(x - x_2)(x_1 - x_{12}) - \alpha^{(2)}(x - x_1)(x_2 - x_{12}) + \delta\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) = 0$$

составляет совместную систему не только с собственными копиями (см. [3] и теорему 4 ниже), но и с линейными уравнениями. А именно, система, образованная уравнениями

$$Q(x, x_1, x_{12}, x_2; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \delta) = 0, \quad x_{13} - x_3 = x_1 - x, \quad x_{23} - x_3 = x_2 - x$$

и их копиями на противоположных гранях, оказывается 3D-совместной. В этом случае ребру (x, x_3) отвечают многочлены

$$B^{0,3} = C^{0,3} = -1, \quad f = 1.$$

Однако, в отличие от предыдущего примера, свойство тетраэдральности не выполняется и $\deg_x K = 2$. Это значит, что многочлен f не биквадратичен и его образ при инверсии есть x_3^2 . Более того, биквадратичные многочлены, отвечающие ребру (x, x_1) , не совпадают:

$$A^{0,1} = \alpha^{(2)}(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})((x_1 - x)^2 - \delta(\alpha^{(1)})^2), \quad B^{0,1} = -1, \quad h = 1.$$

В этом примере мы видим, что возможна ситуация, когда предположения теоремы выполняются для одной части биквадратичных многочленов и не выполняются для другой.

§4. Классификация биквадратичных многочленов

Диаграмма (7) подсказывает алгоритм классификации мультиаффинных уравнений $Q = 0$ по модулю преобразований Мёбиуса. Первый шаг заключается в том, чтобы использовать преобразования Мёбиуса для приведения многочленов $r_i(x_i)$, ассоциированных с вершинами четырехугольника, к канонической форме. Согласно формулам (2),

$$\delta_{x_l}(\delta_{x_j, x_k}(M[Q])) = \Delta_j^2 \Delta_k^2 \Delta_l^2 M[\delta_{x_l}(\delta_{x_j, x_k}(Q))] = \frac{C}{\Delta_i^2} M[r_i],$$

где $C = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2$. Так как многочлен Q определен с точностью до произвольного множителя, мы можем считать, что мёбиусовы замены переменных в уравнении $Q = 0$ индуцируют преобразования

$$r_i \mapsto \frac{1}{\Delta_i^2} M[r_i]$$

многочленов r_i . Это позволяет привести каждый из r_i к одной из следующих форм:

$$r = (x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1), \quad r = x^2 - 1, \quad r = x^2, \quad r = x, \quad r = 1, \quad r = 0,$$

согласно следующим шести возможностям: r имеет четыре простых корня, два простых корня и один двойной, два двойных корня, простой и тройной корни, корень кратности четыре и, наконец, r равен нулю тождественно. В первой канонической форме мы всегда будем предполагать, что $k \neq 0, \pm 1$, так что вторая и третья формы не считаются частным случаем первой.

Не всякая пара многочленов может отвечать смежным вершинам, так как относительные инварианты многочленов в такой паре должны совпадать согласно (6). Мы определим все допустимые пары, а также решим задачу восстановления биквадратичного многочлена (3) по паре его дискриминантов

$$\delta_y(h) = h_y^2 - 2hh_{yy} = r_1(x), \quad \delta_x(h) = h_x^2 - 2hh_{xx} = r_2(y), \quad (18)$$

что равносильно решению системы из 10 (билинейных) уравнений для 9 неизвестных коэффициентов многочлена h .

Теорема 2. Биквадратичные многочлены с парой дискриминантов $(r_1(x), r_2(y))$ в канонической форме существуют для следующих пар, с точностью до перестановки x, y :

	$(y^2 - 1)(k^2 y^2 - 1)$	$y^2 - 1$	y^2	y	1	0
$(x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1)$	+					
$x^2 - 1$		+	+			
x^2			+			
x				+	+	
1					+	+
0						+

Эти многочлены h и их относительные инварианты i_2, i_3 перечислены в следующем списке:

$$(r(x), r(y)), \quad r(x) = (x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1):$$

$$h = \frac{1}{2\alpha}(k^2 \alpha^2 x^2 y^2 + 2Axy - x^2 - y^2 + \alpha^2), \quad A^2 = r(\alpha), \quad (19)$$

$$i_2 = 3(k^2 \alpha^2 + \alpha^{-2}) - k^2 - 1, \quad 4i_3 = A(k^2 \alpha - \alpha^{-3});$$

$$(x^2 - \delta, y^2 - \delta): \quad h = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}(x^2 + y^2) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}xy + \frac{\delta(1 - \alpha^2)}{4\alpha}, \quad (20)$$

$$i_2 = \frac{1 + 10\alpha^2 + \alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2}, \quad i_3 = \frac{\alpha^2(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3};$$

$$(x, y): \quad h = \frac{1}{4\alpha}(x - y)^2 - \frac{\alpha}{2}(x + y) + \frac{\alpha^3}{4}, \quad i_2 = \frac{3}{4\alpha^2}, \quad i_3 = \frac{1}{32\alpha^3}; \quad (21)$$

$$(x^2, y^2): \quad h = \lambda x^2 + \mu xy + \nu y^2, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad i_2 = 1 + 12\lambda\nu, \quad i_3 = -\lambda\mu\nu; \quad (22)$$

$$h = \lambda x^2 y^2 + \mu xy + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad i_2 = 1 + 12\lambda\nu, \quad i_3 = \lambda\mu\nu; \quad (23)$$

$$(1, 1): \quad h = \lambda(x \pm y)^2 + \mu(x \pm y) + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad i_2 = 12\lambda^2, \quad i_3 = \mp 2\lambda^3; \quad (24)$$

$$(0, 0): \quad h = (\varkappa xy + \lambda x + \mu y + \nu)^2, \quad i_2 = 12(\varkappa\nu - \lambda\mu)^2, \quad i_3 = 2(\varkappa\nu - \lambda\mu)^3; \quad (25)$$

$$(x^2 - 1, y^2): \quad h = \alpha y^2 \pm xy + \frac{1}{4\alpha}, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = 0; \quad (26)$$

$$(x, 1): \quad h = \pm \frac{1}{4}(y - \alpha)^2 \mp x, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0; \quad (27)$$

$$(1, 0): \quad h = \lambda y^2 + \mu y + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0. \quad (28)$$

Доказательство. Список получен прямым решением системы (18) для различных канонических пар (r_1, r_2) . Перебор сокращается, если заметить, что $g_2^3 \neq 27g_3^2$ только в одном случае и что относительные инварианты для многочлена $r_1 = ax^2 + bx + c$ суть $12g_2 = a^2$, $216g_3 = -a^3$, так что второй многочлен должен иметь вид $r_2 = ay^2 + by + \tilde{c}$. Решение для пары $(x, 0)$ оказывается пустым. $\square$

§5. Классификация мультиаффинных уравнений типа Q

Важно отметить, что после приведения многочленов $r_i(x_i)$ к каноническому виду еще остается некоторая свобода. А именно, можно применять преобразования Мёбиуса, не меняющие вид r , для дальнейшего упрощения биквадратичной кривой h и мультиаффинного уравнения Q . В частности, список из теоремы 2 является более детальным, чем просто список биквадратичных многочленов по модулю преобразований Мёбиуса.

Действительно, многочлен (22) превращается в (23) при инверсии x ; замена $x \mapsto -x$ позволяет зафиксировать знаки в многочленах (24), (26); в случае (27) знак фиксируется заменой $x \mapsto -x$, $y \mapsto iy$; многочлены (25), (28) допускают дальнейшее упрощение.

Однако преобразование переменной, отвечающей одной из четырех вершин четырехугольника, влияет на биквадратичные многочлены, отвечающие двум смежным сторонам, и, следовательно, а priori нельзя гарантировать, что все четыре биквадратичные кривые можно привести к некоторой определенной форме одновременно. Например, если каждой вершине отвечает многочлен $r_i = x_i^2$, то ребрам могут отвечать многочлены вида (22) или вида (23). Заранее не известно, можно ли привести все эти многочлены к одному и тому же виду (хотя бы и с разными коэффициентами). На самом деле это возможно, как показывает доказательство следующей теоремы.

Следующий шаг заключается в восстановлении мультиаффинных многочленов по биквадратичным. Так как нашей целью является классификация систем только типа Q , нам не нужно решать эту задачу во всей полноте. Мы отбрасываем случаи (26), (27) и (28), так как соответствующие биквадратичные кривые вырождены. По этой же причине накладываются дополнительные ограничения на значения параметров: $\lambda\nu \neq 0$ в случаях (22), (23), $\lambda \neq 0$ в случае (24) и $\kappa\nu - \lambda\mu \neq 0$ в случае (25).

Теорема 3. *Любое мультиаффинное уравнение типа Q эквивалентно, с точностью до преобразований Мёбиуса, одному из уравнений из следующего списка:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\alpha) \operatorname{sn}(\beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta)(k^2 x_1 x_2 x_3 x_4 + 1) - \operatorname{sn}(\alpha)(x_1 x_2 + x_3 x_4) \\ - \operatorname{sn}(\beta)(x_1 x_4 + x_2 x_3) + \operatorname{sn}(\alpha + \beta)(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha^{-1})(x_1 x_2 + x_3 x_4) + (\beta - \beta^{-1})(x_1 x_4 + x_2 x_3) - (\alpha\beta - \alpha^{-1}\beta^{-1})(x_1 x_3 + x_2 x_4) \\ + \frac{\delta}{4}(\alpha - \alpha^{-1})(\beta - \beta^{-1})(\alpha\beta - \alpha^{-1}\beta^{-1}) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) + \beta(x_1 - x_2)(x_4 - x_3) \\ - \alpha\beta(\alpha + \beta)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\alpha(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) + \beta(x_1 - x_2)(x_4 - x_3) - \delta\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0. \quad (32)$$

Доказательство. Пусть многочлены h^{12} , h^{23} , h^{34} и h^{14} имеют вид (19) с параметрами (α, A) , (β, B) , $(\tilde{\alpha}, \tilde{A})$ и $(\tilde{\beta}, \tilde{B})$ соответственно, лежащими на эллиптической кривой $A^2 = r(\alpha)$. Относительные инварианты i_2 , i_3 многочленов h^{12} и h^{34} должны совпадать в силу (5), и легко убедиться, что это условие

оставляет для $(\tilde{\alpha}, \tilde{A})$ только следующие возможные значения:

$$(\alpha, A), \quad (-\alpha, -A), \quad \frac{1}{k\alpha^2}(\alpha, -A), \quad \frac{1}{k\alpha^2}(-\alpha, A),$$

и аналогичные значения возможны для $(\tilde{\beta}, \tilde{B})$. На первый взгляд, нам предстоит перебор 16 четверок h^{ij} , но на самом деле ситуация значительно лучше. Действительно, согласно (2), при преобразовании Мёбиуса в уравнении $Q = 0$ выполняются соотношения

$$\delta_{x_k, x_l}(M[Q]) = \Delta_k \Delta_l M[\delta_{x_k, x_l}(Q)] = \frac{C}{\Delta_i \Delta_j} M[h^{ij}],$$

где $C = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$. Так как Q определен с точностью до умножения на константу, то можно считать, что мёбиусовы замены в уравнении $Q = 0$ индуцируют преобразования

$$h^{ij} \mapsto \frac{1}{\Delta_i \Delta_j} M[h^{ij}]$$

биквадратичных многочленов h^{ij} . В частности, если

$$h^{34} = h(x_3, x_4, -\alpha, -A) \quad \text{или} \quad h^{34} = h\left(x_3, x_4, \frac{1}{k\alpha}, -\frac{A}{k\alpha^2}\right),$$

то преобразование $x_3 \mapsto -x_3$, соответственно $x_3 \mapsto 1/(kx_3)$, приведет h^{34} к виду

$$-h(-x_3, x_4; -\alpha, -A), \quad \text{соответственно} \quad -kx_3^2 h\left(\frac{1}{kx_3}, x_4; \frac{1}{k\alpha}, -\frac{A}{k\alpha^2}\right), \quad (33)$$

что совпадает с $h(x_3, x_4, \alpha, A)$ в силу симметрий многочлена (19). Таким образом, сделав подходящую замену переменной x_3 (причем многочлен $r(x_3)$ не меняется), мы можем предполагать, не теряя общности, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{A}) = (\alpha, A)$. После этого многочлен h^{14} однозначно определяется по формуле (8), и оказывается, что при этом автоматически выполнено равенство $(\tilde{\beta}, \tilde{B}) = (\beta, B)$. Итак, замена одной переменной позволяет достичь совпадения параметров на противоположных сторонах квадрата. Прямое вычисление с использованием формулы (10) приводит к уравнению

$$\alpha\beta\gamma(k^2 x_1 x_2 x_3 x_4 + 1) + \alpha(x_1 x_2 + x_3 x_4) + \beta(x_1 x_4 + x_2 x_3) + \gamma(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0,$$

где $\gamma = (\alpha B + \beta A)/(k^2 \alpha^2 \beta^2 - 1)$, и, наконец, замена $\alpha \rightarrow \text{sn}(\alpha)$, $A \rightarrow \text{sn}'(\alpha)$ и аналогичная замена для β приводят его к виду (29).

В других случаях подходящая мёбиусова замена переменных x_2, x_3, x_4 также позволяет привести многочлены к виду $h^{12} = h(x_1, x_2, \alpha)$, $h^{23} = h(x_2, x_3, \beta)$, $h^{34} = h(x_3, x_4, \alpha)$. При этом прямое вычисление по формуле (8) доказывает, что, кроме того, $h^{14} = h(x_1, x_4, \beta)$. После этого ответ находится при помощи (10).

Подробнее, многочлены (20) приводят к уравнению (30). В этом случае из уравнений (5) следует, что параметры α многочленов h^{12} и h^{34} отличаются не более чем знаком. Это компенсируется заменой $x_3 \rightarrow -x_3$, возможной благодаря симметрии $h(x, y, \alpha) = -h(-x, y, -\alpha)$.

В случаях (22), (23) подходящие растяжения и, если необходимо, инверсии переменных x_2, x_3, x_4 позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду (20) без свободного члена; таким образом, мы приходим к тому же случаю при $\delta = 0$.

Многочлен (21) отвечает уравнению (31). Это наиболее простой случай, так как параметры фиксируются уже условием (5).

В случае (24) подходящие сдвиги и, если необходимо, смена знака переменных x_2, x_3, x_4 позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду $2h(x, y, \alpha) = \alpha^{-1}(x - y)^2 - \delta\alpha$ при $\delta = 1$. Аналогично, в случае (25) подходящее преобразование Мёбиуса общего вида приводит h^{12}, h^{23}, h^{34} к тому же виду с $\delta = 0$. В обоих случаях полуинварианты равны $i_2 = 3\alpha^{-2}$, $4i_3 = \alpha^{-3}$, следовательно, параметры h^{12} и h^{34} совпадают и дальнейшие замены не нужны. В результате получаем уравнение (32). $\square$

§6. Классификация 3D-совместных систем типа Q

Теорема 1 дает очень сильные необходимые условия для 3D-совместности в случае, когда все уравнения относятся к типу Q . Это позволит нам классифицировать в этом параграфе все такие системы. На этом заключительном этапе мы должны расположить вокруг куба найденные выше уравнения и выбрать параметры таким образом, чтобы выполнилось условие (14). Это условие может привести к смене знака или инверсии одного из параметров.

В следующей теореме мы возвращаемся к обозначениям переменных и параметров, отвечающим сдвигам на решетке. Порядок уравнений соответствует предыдущей теореме, а обозначения уравнений взяты из [3].

Теорема 4. *Любая 3D-совместная система (13) типа Q приводится преобразованиями Мёбиуса к одной из систем из следующего списка:*

$$\begin{aligned} & \operatorname{sn}(\alpha^{(i)}) \operatorname{sn}(\alpha^{(j)}) \operatorname{sn}(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) (k^2 x x_i x_j x_{ij} + 1) + \operatorname{sn}(\alpha^{(i)}) (x x_i + x_j x_{ij}) \\ & - \operatorname{sn}(\alpha^{(j)}) (x x_j + x_i x_{ij}) - \operatorname{sn}(\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) (x x_{ij} + x_i x_j) = 0, \end{aligned} \quad (Q_4)$$

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^{(i)} - \frac{1}{\alpha^{(i)}} \right) (x x_i + x_j x_{ij}) \\ & - \left(\alpha^{(j)} - \frac{1}{\alpha^{(j)}} \right) (x x_j + x_i x_{ij}) - \left(\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(j)}} - \frac{\alpha^{(j)}}{\alpha^{(i)}} \right) (x x_{ij} + x_i x_j) \\ & - \frac{\delta}{4} \left(\alpha^{(i)} - \frac{1}{\alpha^{(i)}} \right) \left(\alpha^{(j)} - \frac{1}{\alpha^{(j)}} \right) \left(\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(j)}} - \frac{\alpha^{(j)}}{\alpha^{(i)}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (Q_3)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^{(i)} (x - x_j) (x_i - x_{ij}) - \alpha^{(j)} (x - x_i) (x_j - x_{ij}) \\ & + \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} (\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) (x + x_i + x_j + x_{ij}) \\ & - \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} (\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) ((\alpha^{(i)})^2 - \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} + (\alpha^{(j)})^2) = 0, \end{aligned} \quad (Q_2)$$

$$\alpha^{(i)} (x - x_j) (x_i - x_{ij}) - \alpha^{(j)} (x - x_i) (x_j - x_{ij}) + \delta \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} (\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)}) = 0. \quad (Q_1)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что уравнения разных типов (29)–(32) совместными быть не могут, так как различны соответствующие сингулярные кривые. В частности, параметры k^2 в случае (29) и δ в случаях (30), (32) должны быть одни и те же на всех гранях куба. Более того, каждое уравнение списка обладает симметрией квадрата, т.е. инвариантно относительно замен $(x_1 \leftrightarrow x_2, x_3 \leftrightarrow x_4)$ и $(x_1 \leftrightarrow x_3, \alpha \leftrightarrow \beta)$.

Таким образом, уравнения на всех гранях могут отличаться лишь значениями α и β . Рассмотрим уравнения на трех гранях, сходящихся в одной вершине, для

определенности, x :

$$Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = 0, \quad Q(x, x_2, x_3, x_{23}, \beta, \tilde{\gamma}) = 0, \quad Q(x, x_3, x_1, x_{13}, \gamma, \tilde{\alpha}) = 0.$$

Пусть

$$\delta_{x_2, x_{12}} Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = \kappa(\alpha, \tilde{\beta}) h(x, x_1, \alpha).$$

Тогда в силу симметрии

$$\delta_{x_1, x_{12}} Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = \kappa(\tilde{\beta}, \alpha) h(x, x_2, \tilde{\beta})$$

и, согласно теореме 1, параметры должны быть связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{h(x, x_1, \alpha)}{h(x, x_1, \tilde{\alpha})} &= m(\alpha, \tilde{\alpha}), \quad \frac{h(x, x_2, \beta)}{h(x, x_2, \tilde{\beta})} = m(\beta, \tilde{\beta}), \quad \frac{h(x, x_3, \gamma)}{h(x, x_3, \tilde{\gamma})} = m(\gamma, \tilde{\gamma}), \\ \frac{\kappa(\alpha, \tilde{\beta}) \kappa(\beta, \tilde{\gamma}) \kappa(\gamma, \tilde{\alpha})}{\kappa(\tilde{\beta}, \alpha) \kappa(\tilde{\gamma}, \beta) \kappa(\tilde{\alpha}, \gamma)} m(\alpha, \tilde{\alpha}) m(\beta, \tilde{\beta}) m(\gamma, \tilde{\gamma}) &= -1. \end{aligned}$$

В случае (29) прямое вычисление показывает, что $\kappa(\alpha, \beta) = 2 \operatorname{sn}(\alpha) \operatorname{sn}(\beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta)$ и

$$h(x, y, \alpha) = \frac{1}{2 \operatorname{sn}(\alpha)} (k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha) x^2 y^2 + 2 \operatorname{sn}'(\alpha) xy - x^2 - y^2 + \operatorname{sn}^2(\alpha)),$$

следовательно, $\tilde{\alpha}$ может принимать значения $\pm \alpha$ и аналогично обстоит дело с β, γ . Очевидно, что с точностью до перенумерации, возможны два случая:

$$\tilde{\alpha} = -\alpha, \quad \tilde{\beta} = -\beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma \quad \text{или} \quad \tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma.$$

Более того, это фактически один и тот же случай, так как мы можем сделать замену $(\alpha, \tilde{\beta}) \rightarrow (-\alpha, -\tilde{\beta})$, не меняющую уравнение $Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha, \tilde{\beta}) = 0$, как легко видно из (29). Нетрудно проверить, что расстановка знаков на всем кубе всегда приводится к той, что указана в системе (Q_4) .

Далее, рассмотрим случай (30). Здесь

$$\kappa(\alpha, \beta) = -\frac{(1 - \alpha^2 \beta^2)(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}{\alpha^2 \beta^2},$$

$$h(x, y, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} (x^2 + y^2) - \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} xy + \frac{(1 - \alpha^2)\delta}{4\alpha}$$

и $\tilde{\alpha} = \alpha$ или $\tilde{\alpha} = 1/\alpha$. Учитывая инвариантность уравнения (30) относительно одновременной инверсии α, β , можно положить, не теряя общности,

$$\tilde{\alpha} = 1/\alpha, \quad \tilde{\beta} = 1/\beta, \quad \tilde{\gamma} = 1/\gamma,$$

что приводит к системе (Q_3) . В случаях (31), (32) имеем соответственно

$$\kappa(\alpha, \beta) = -4\alpha\beta(\alpha + \beta), \quad h(x, y, \alpha) = \frac{1}{4\alpha} (x - y)^2 - \frac{\alpha}{2} (x + y) + \frac{\alpha^3}{4},$$

$$\kappa(\alpha, \beta) = -2\alpha\beta(\alpha + \beta), \quad h(x, y, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} (x - y)^2 - \frac{\alpha\delta}{2},$$

и можно положить $\tilde{\alpha} = -\alpha, \tilde{\beta} = -\beta, \tilde{\gamma} = -\gamma$ в точности, как и выше. Это дает системы $(Q_2), (Q_1)$. $\square$

Основное уравнение (Q_4) списка впервые было выведено в [2] и далее изучалось в [5]. Представление Лакса для (Q_4) было найдено в [19] методом, основанным на трехмерной совместности. Якобиева форма (Q_4) , представленная в теореме 4, была найдена в [14]. Уравнения (Q_1) и $(Q_3|_{\delta=0})$ восходят к [21]. Уравнения (Q_2) и $(Q_3|_{\delta=1})$ в явном виде появились впервые в [3].

§7. Примеры систем типа H

В отличие от систем типа Q , системы типа H можно рассматривать как «вырожденные». Их классификация представляется довольно утомительной задачей, и сейчас мы не можем предложить эффективной процедуры ее решения. С другой стороны, примеры из §3 показывают, что этот класс нельзя просто отбросить как «патологический». Действительно, пример дискретного КдФ (17) наводит на мысль, что в некоторых случаях вырождение биквадратичной кривой может быть несущественным обстоятельством, не отражающимся на свойствах интегрируемости уравнения. Здесь мы рассмотрим еще несколько примеров такого сорта, отвечающих случаям (22), (23) при $\lambda\mu = 0$, (24) при $\lambda = 0$ и (25) при $\lambda\nu - \lambda\mu = 0$, которые мы исключили из рассмотрения в предыдущем параграфе. Оказывается, что если мы применим тот же алгоритм к этим случаям (хотя теперь для этого нет оснований), то будет воспроизведен список H из нашей предыдущей статьи [3]:

$$\alpha^{(i)}(xx_i + x_jx_{ij}) - \alpha^{(j)}(xx_j + x_ix_{ij}) + \delta((\alpha^{(i)})^2 - (\alpha^{(j)})^2) = 0, \quad (H_3)$$

$$(x - x_{ij})(x_i - x_j) + (\alpha^{(j)} - \alpha^{(i)})(x + x_i + x_j + x_{ij}) + (\alpha^{(j)})^2 - (\alpha^{(i)})^2 = 0, \quad (H_2)$$

$$(x - x_{ij})(x_i - x_j) + \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)} = 0. \quad (H_1)$$

Можно непосредственно проверить, что все утверждения теоремы 1 остаются верны для этих уравнений, хотя биквадратичные кривые и вырождены.

Рассматривая асимметричные случаи (26), (27), (28) с разными многочленами в вершинах, мы находим, что возможны следующие варианты, с точностью до перестановок (ясно, что когда рассматривается одно уравнение, диагонали и стороны равноправны):

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 1, x_2^2, x_3^2, x_4^2), \quad (x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, x_3^2, x_4^2), \quad (x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, x_3^2 - 1, x_4^2), \\ (x_1, 1, 1, 1), \quad (x_1, x_2, 1, 1), \quad (x_1, x_2, x_3, 1), \\ (1, 0, 0, 0), \quad (1, 1, 0, 0), \quad (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что варианты типа $\begin{pmatrix} r_2(x_4) & r_1(x_3) \\ r_1(x_1) & r_2(x_2) \end{pmatrix}$ реализуются и приводят к следующему списку 3D-совместных уравнений:

$$\alpha(x_1x_2 + x_3x_4) - \beta(x_1x_4 + x_2x_3) + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\delta + \frac{\varepsilon x_2x_4}{\alpha\beta}\right) = 0, \quad (H_3^\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (\beta - \alpha)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \beta^2 - \alpha^2 \\ + \varepsilon(\beta - \alpha)(2x_2 + \alpha + \beta)(2x_4 + \alpha + \beta) + \varepsilon(\beta - \alpha)^3 = 0, \end{aligned} \quad (H_2^\varepsilon)$$

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (\beta - \alpha)(1 + \varepsilon x_2x_4) = 0. \quad (H_1^\varepsilon)$$

Этот список можно рассматривать как деформацию списка H , который отвечает случаю $\varepsilon = 0$. Однако здесь мы использовали обозначение с циклическими индексами вместо сдвигowych, так как из-за потери симметрии расположение уравнений на гранях куба требует более явного описания (см. ниже). Отметим, что в (H_1^ε) многочлен $1 + \varepsilon x_2 x_4$ можно заменить на многочлен $\kappa x_2 x_4 + \mu(x_2 + x_4) + \nu$ с произвольными коэффициентами. Соответствующие биквадратичные многочлены и их дискриминанты указаны в следующей таблице (с точностью до нормировки $Q \rightarrow \mu(\alpha, \beta)Q$):

	$h(x_1, x_2)$	$r_1(x_1)$	$r_2(x_2)$
(H_3^ε)	$x_1 x_2 + \varepsilon \alpha^{-1} x_2^2 + \delta \alpha$	$x_1^2 - 4\delta \varepsilon$	x_2^2
(H_2^ε)	$x_1 + x_2 + \alpha + 2\varepsilon(x_2 + \alpha)^2$	$1 - 8\varepsilon x_1$	1
(H_1^ε)	$1 + \varepsilon x_2^2$	-4ε	0

Каждое из этих уравнений обладает симметрией ромба

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) = -Q(x_3, x_2, x_1, x_4, \beta, \alpha) = -Q(x_1, x_4, x_3, x_2, \beta, \alpha),$$

но не квадрата, так как вершинам x_1, x_2 отвечают многочлены с нулями разной кратности. Уравнения 3D-совместны на черно-белой решетке $i + j + k \pmod{2}$. То есть каждой грани соответствует копия уравнения, причем так, что параметры на противоположных ребрах совпадают и $x, x_{12}, x_{13}, x_{23}$ — вершины одного типа (здесь мы опять переключаемся на обозначения при помощи сдвигов, как на рис. 3):

$$Q(x, x_i, x_{ij}, x_j, \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}) = 0, \quad Q(x_{ik}, x_k, x_{jk}, x_{123}, \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}) = 0, \\ \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Очевидно, что уравнения на противоположных гранях куба не совпадают, но тем не менее систему можно распространить на всю решетку $\mathbb{Z}^3$. Выполняется свойство тетраэдральности.

Наконец, отметим, что удастся также скомбинировать уравнения с симметрией квадрата и трапеции. Рассмотрим опять уравнение (Q_1) . Пусть одной паре противоположных граней отвечают уравнения

$$Q_1(x, x_1, x_{12}, x_2; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})_{\delta=1} = 0, \quad Q_1(x_3, x_{13}, x_{123}, x_{23}; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})_{\delta=0} = 0,$$

а двум остальным парам — уравнения

$$Q(x, x_i, x_{i,3}, x_3, \alpha^{(i)}, \varepsilon) = 0, \quad Q(x_j, x_{ij}, x_{123}, x_{j,3}, \alpha^{(i)}, \varepsilon) = 0, \quad \{i, j\} = \{1, 2\},$$

где многочлен

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4, \gamma, \varepsilon) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + \gamma(\varepsilon^{-1} - \varepsilon x_3 x_4)$$

фактически тот же, что и в (H_1^ε) , с точностью до перестановки x_2, x_3 . Это неуклюжее сооружение оказывается 3D-совместным и даже обладает свойством тетраэдральности. Эта система также может быть продолжена на решетку $\mathbb{Z}^3$.

§8. Заключительные замечания

Известны некоммутативные аналоги некоторых уравнений Q -типа. В частности, квантовая версия $(Q_1|_{\delta=0})$ появилась в [27]. В [11] подход, основанный на совместности, был сформулирован в некоммутативном контексте, с полями, принимающими значения в произвольной ассоциативной алгебре. Само определение трехмерной совместности в этом случае остается прежним, но предположение о мультиаффинности заменяется на требование, чтобы уравнение можно было привести к линейному виду $px = q$ относительно любой переменной x . Эти два свойства в некоммутативном случае не эквивалентны, как видно из следующих примеров. Первый был найден в [11], а два других найдены В. В. Соколовым и В. Э. Адлером (не опубликовано):

$$\alpha^{(1)}(x - x_2)(x_2 - x_{12})^{-1} = \alpha^{(2)}(x - x_1)(x_1 - x_{12})^{-1}, \quad (\widehat{Q}_1|_{\delta=0})$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(x_1 - x_{12} + \alpha^{(2)})(x - x_1 - \alpha^{(1)})^{-1} \\ = \alpha^{(2)}(x_2 - x_{12} + \alpha^{(2)})(x - x_2 - \alpha^{(2)})^{-1}, \end{aligned} \quad (\widehat{Q}_1|_{\delta=1})$$

$$\begin{aligned} (1 - (\alpha^{(1)})^2)(x_1 - \alpha^{(2)}x_{12})(\alpha^{(1)}x - x_1)^{-1} \\ = (1 - (\alpha^{(2)})^2)(x_2 - \alpha^{(1)}x_{12})(\alpha^{(2)}x - x_2)^{-1}. \end{aligned} \quad (\widehat{Q}_3|_{\delta=0})$$

Существование некоммутативных аналогов уравнений (Q_2) , $(Q_3|_{\delta=1})$ и (Q_4) остается открытым вопросом. Хотя анализ сингулярных решений может быть важен и в этой задаче как общий принцип, наша техника, основанная на алгебраических свойствах мультиаффинных и биквадратичных многочленов, непосредственно не применима. Более общие квантовые системы со свойством совместности найдены недавно в [8], [7].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [2] V. E. Adler, *Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation*, Internat. Math. Res. Notices, **1** (1998), 1–4.
- [3] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach*, Comm. Math. Phys., **233**:3 (2003), 513–543.
- [4] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Geometry of Yang–Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings*, Comm. Anal. Geom., **12**:5 (2004), 967–1007.
- [5] V. E. Adler, Yu. B. Suris, *Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve*, Internat. Math. Res. Notices, **47** (2004), 2523–2553.
- [6] V. E. Adler, A. P. Veselov, *Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs*, Acta Appl. Math., **84**:2 (2004), 237–262.
- [7] V. Bazhanov, V. Mangazeev, S. Sergeev, *Faddeev–Volkov solution of the Yang–Baxter equation and discrete conformal symmetry*, Nuclear Phys. B, **784**:3 (2007), 234–258.
- [8] V. Bazhanov, S. Sergeev, *Zamolodchikov’s tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, J. Phys. A., **39**:13 (2006), 3295–3310.
- [9] L. Bianchi, *Vorlesungen über Differenzialgeometrie*, Teubner, Leipzig, 1899.
- [10] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Integrable systems on quad-graphs*, Internat. Math. Res. Notices, **11** (2002), 573–611.
- [11] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Integrable non-commutative equations on quad-graphs. The consistency approach*, Lett. Math. Phys., **61**:3 (2002), 241–254.

- [12] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure*, Graduate Studies in Math., vol. 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [13] J. Hietarinta, *A new two-dimensional lattice model that is “consistent around a cube”*, J. Phys. A, **37**:6 (2004), L67–L73.
- [14] J. Hietarinta, *Searching for CAC-maps*, J. Nonlinear Math. Phys., **12**, Suppl. 2 (2005), 223–230.
- [15] Р. М. Кашаев, И. Г. Корепанов, С. М. Сергеев, *Функциональное уравнение тетраэдров*, ТМФ, **117**:3 (1998), 370–384.
- [16] I. G. Korepanov, *Algebraic Integrable Dynamical Systems, 2+1-Dimensional Models in Wholly Discrete Space-Time, and Inhomogeneous Models in 2-Dimensional Statistical Physics*, <http://arxiv.org/abs/solv-int/9506003>.
- [17] J.-M. Maillet, F. W. Nijhoff, *Integrability for multidimensional lattice models*, Phys. Lett. B, **224**:4 (1989), 389–396.
- [18] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем*, УМН, **42**:4 (1987), 3–53.
- [19] F. W. Nijhoff, *Lax pair for the Adler (lattice Krichever–Novikov) system*, Phys. Lett. A, **297** (2002), 49–58.
- [20] V. Papageorgiou, A. Tongas, A. Veselov, *Yang–Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs*, J. Math. Phys, **47**:8 (2006), 083502.
- [21] G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel, J. van der Linden, *Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations*, Phys. A, **125**:2–3 (1984), 344–380.
- [22] A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, *Deconstructing an integrable lattice equation*, J. Phys. A, **39**:8 (2006), L145–L149.
- [23] Yu. B. Suris, A. P. Veselov, *Lax pairs for Yang–Baxter maps*, J. Nonlinear Math. Phys., **10**:suppl. 2 (2003), 223–230.
- [24] А. П. Веселов, *Интегрируемые отображения*, УМН, **46**:5 (1991), 3–45.
- [25] A. P. Veselov, *Yang–Baxter maps: dynamical point of view*, in: Combinatorial Aspect of Integrable Systems, MSJ Mem., vol. 17, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 145–167.
- [26] C. Viallet, *Algebraic Entropy for Lattice Equations*, <http://arxiv.org/abs/math-ph/0609043>.
- [27] A. Volkov, *Quantum lattice KdV equation*, Lett. Math. Phys., **39**:4 (1997), 313–329.
- [28] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927, reprinted in 1996.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: adler@itp.ac.ru

Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin
e-mail: bobenko@math.tu-berlin.de

Zentrum Mathematik, Technische Universität München
e-mail: suris@ma.tum.de

Поступило в редакцию
4 июня 2007 г.