Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Муссафир, Паруса и базисы Гильберта, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 43–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:38:31

УДК 512.7+514.17

Паруса и базисы Гильберта

© 2000. Ж.-О. МУССАФИР

Введение

Полиэдр Клейна — это выпуклая оболочка ненулевых целых точек симплицеального конуса $C \subset \mathbb{R}^n$. Имеется связь между этими полиэдрами и базисами Гильберта полугрупп целых точек, содержащихся в симплицеальном конусе.

В двумерном случае множество целых точек, лежащих на границе многоугольника Клейна, содержит базис Гильберта соответствующей полугруппы. Если размерность больше либо равна 3, это уже, вообще говоря, не так (см., например, [2]). Но мы дадим в трехмерном случае полное описание полиэдров, обладающих этим свойством. Мы приведем пример такого паруса и покажем, что наш критерий не выполняется в размерности 4.

§1. Базисы Гильберта

Приведем некоторые определения (полное изложение см. в [4]).

Пусть векторы $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию $\det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Определим векторы двойственного базиса $w_1, \dots, w_n$ условием $\langle a_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, \dots, n$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Симплицеальный конус, порожденный векторами $a_1, \dots, a_n$, — это множество

$$C = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \text{ где } \lambda_i \in \mathbb{R}^+\}.$$

Разумеется,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w_i, x \rangle \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть C — симплицеальный конус. Определим полугруппу M формулой $M = C \cap \mathbb{Z}^n$, и пусть K — выпуклая оболочка множества $M^* = M \setminus \{O\}$. Парус V — это граница множества K , а $E = \bigcup_{x \in M^*} C + x$. Будем называть конус C рациональным, если $a_i \in \mathbb{Z}$ при $i = 1, \dots, n$. В этом случае также будем говорить, что соответствующий парус рационален. Некоторые грани паруса не содержат начала координат. Объединение этих граней называется приведенным парусом и обозначается через $\tilde{V}$.

Скажем, что аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ является целочисленной, если она содержит $(n-1)$ -мерную целочисленную решетку. Мы будем также говорить о целочисленных прямых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C — симплицеальный конус, а M — полугруппа его целых точек. *Базис Гильберта* полугруппы M — это минимальное множество образующих этой полугруппы.

Существование такого минимального множества вытекает из леммы Цорна. Нетрудно видеть, что множество $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^n$ содержится в каждом базисе Гильберта полугруппы M . В самом деле, пусть B — базис Гильберта для M и $x \in \tilde{V} \cap \mathbb{Z}^n$.

Пусть F — грань, содержащая x , а H — гиперплоскость, содержащая F . Гиперплоскость H задается рациональным уравнением $v(x) = d$, где $d \in \mathbb{N}^*$, и отделяет O от M^* : $v(y) \geq d$ для всех y из M^* . Таким образом, если

$$x = a_1x_1 + \dots + a_kx_k, \quad a_i \in \mathbb{N}, x_i \in B,$$

то

$$v(x) = d \geq (a_1 + \dots + a_k)d.$$

Все a_i , кроме одного, равны нулю, и, следовательно, $x \in B$.

Следующая теорема является адаптацией результата из [2].

ТЕОРЕМА 1. *Существует единственное множество $S \subset M^*$, такое, что*

1) $E = \bigcup_{x \in S} C + x$;

2) *если $x, y \in S$, $x \neq y$, то $C + x \not\subset C + y$ и $C + y \not\subset C + x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упорядочим множества $x + C$, $x \in M^*$, по включению. Положим

$$S = \{x \in M^* \mid C + x \text{ максимально}\}.$$

Пусть $x \in M^*$. Если $C + x$ не содержится в $\bigcup_{x \in S} C + x$, то x не принадлежит S , $C + x$ не максимально и существует точка $x_1 \in M^*$, такая, что $C + x \subsetneq C + x_1$. Если бы точка x_1 лежала в S , мы бы имели $C + x \subsetneq C + x_1 \subset \bigcup_{x \in S} C + x$. Таким образом, $x_1 \notin S$. Построим последовательность $x_0 = x, x_1, x_2, \dots$, такую, что $C + x_0 \subsetneq C + x_1 \subsetneq C + x_2 \subsetneq \dots$.

Нетрудно проверить, что $(\langle w_i, x_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ — убывающие последовательности положительных чисел и что $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ сходится в $\mathbb{R}^n$. Но поскольку $M^* \subset \mathbb{Z}^n$, эта последовательность должна быть постоянной, начиная с некоторого места, что противоречит условию $C + x_k \subsetneq C + x_{k+1}$ для любого k . Отсюда получаем, что $E = \bigcup_{x \in S} C + x$. Множество S удовлетворяет также условию 2).

Сейчас мы должны показать, что S единственно. Пусть $S' \in M^*$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Если $x \in S$, то существует элемент $x' \in S'$, такой, что $x \in C + x'$ и $C + x \subset C + x'$. Но $C + x$ максимально; поэтому $x = x'$. Таким образом, $S \subset S'$. Обратно, если $x \in S'$ и $C + x$ не максимально, то найдется $y \in M^*$, такой, что $C + x \subset C + y$. Но поскольку $E = \bigcup_{x' \in S'} C + x'$, существует $x' \in S'$, такой, что $C + y \subset C + x'$. Мы нашли элементы x и x' в S' , такие, что $x \neq x'$ и $C + x \subset C + x'$. Это противоречит условию 2), так что $C + x$ максимально и $S' \subset S$. $\square$

Множество S , которое мы только что построили, является базисом Гильберта полугруппы M . Для того чтобы это доказать, нам понадобится очень простая лемма.

ЛЕММА 1. *Пусть M — полугруппа, связанная с симплицальным конусом C в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

1) *если $x_1, \dots, x_k \in M$ и $x_1 + \dots + x_k = 0$, то $x_i = 0$ для любых $i = 1, \dots, k$;*

2) *$C + x + y \subset (C + x) \cap (C + y)$ для любых $x, y \in M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $w_1, \dots, w_n$ векторы двойственного базиса для C . Так как $\langle w_1, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in M$, то равенство $x_1 + \dots + x_k = 0$ влечет за собой $\langle w_1, x_1 \rangle + \dots + \langle w_1, x_k \rangle = 0$. Это сумма неотрицательных чисел и, значит, они все равны нулю. Таким образом, $\langle w_1, x_1 \rangle = \dots = \langle w_1, x_k \rangle = 0$ и $x_i = 0$ для $i = 1, \dots, k$. Это доказывает п. 1). Пусть теперь $z \in C + x + y$. Существует $c \in C$, такой, что $z = x + y + c$. Поскольку $x, y \in M \subset C$, z принадлежит $(C + x) \cap (C + y)$. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *S — это единственный базис Гильберта полугруппы M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — базис Гильберта полугруппы M . Если $x \in S$, то x можно записать в виде

$$x = n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k, \quad n_i \in \mathbb{N}, b_i \in B.$$

Таким образом, $C + x \subset C + n_1 b_1$. Множество $C + x$ максимально, потому что $x \in S$, и, таким образом, $x = n_1 b_1$. Если $n_1 > 1$, то

$$C + x = C + n_1 b_1 \subsetneq C + (n_1 - 1)b_1.$$

Поскольку такого не может быть, $n_1 = 1$, $x \in B$ и $S \subset B$.

Пусть теперь $b \in B \subset M^*$, b принадлежит некоторому множеству $C + x$, где $x \in S$, и $b = x + c$, где $c \in \mathbb{Z}^n \cap C = M$. Таким образом,

$$b = x + n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k + mb, \quad n_i, m_i \in \mathbb{N}, b_i \in B, b_i \neq b,$$

и

$$x + n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k + (m - 1)b = 0.$$

Случай $m \neq 0$ невозможен, поскольку тогда из последнего равенства следовало бы, что $x = 0$. Таким образом,

$$b = x + n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k.$$

Так как x принадлежит $S \subset B$, то $b = x$ и $B = S$. □

Определим теперь отношение порядка на C . Пусть x и y — два элемента из C . Тогда

$$x \preceq y \iff \langle w_i, x \rangle \leq \langle w_i, y \rangle \text{ для любого } i = 1, \dots, n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если C — симплицальный конус, снабженный отношением порядка $\preceq$, то

- 1) $x \preceq y \iff C + y \subset C + x$ для любых $x, y \in C$;
- 2) S — множество минимальных элементов в M^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что п. 1) влечет за собой п. 2).

Если $C + y \subset C + x$, то $y \in C + x$; поэтому существует элемент $c \in C$, такой, что $y = c + x$. А поскольку $\langle w_i, c \rangle \geq 0$ при $i = 1, \dots, n$, имеем $x \preceq y$. Обратно, если $x \preceq y$, положим $c = y - x \in C$. Имеем $y = c + x \in C + x$ и $C + y \subset C + x$. □

§2. Паруса и базисы Гильберта

Е. И. Коркина приводит в [2] пример рационального симплицального конуса C с таким парусом V , что $V \cap \mathbb{Z}^3$ не содержит базиса Гильберта для $C \cap \mathbb{Z}^3$.

В $\mathbb{R}^n$ имеется простое достаточное условие, при котором $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^n$ является базисом Гильберта для $C \cap \mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что многогранник в $\mathbb{R}^n$ *целочисленный*, если его вершины принадлежат $\mathbb{Z}^n$. Будем говорить, что многогранник в $\mathbb{R}^n$ *пустой*, если он является целочисленным и не содержит никаких целых точек, кроме вершин.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть C — симплицальный конус в $\mathbb{R}^n$, а $\tilde{V}$ и M — соответствующие приведенный парус и полугруппа. Если каждая грань паруса $\tilde{V}$ разбивается на целочисленные симплексы с определителем ± 1 , то $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^n$ является базисом Гильберта полугруппы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in C \cap \mathbb{Z}^n$ и $x \neq 0$. Прямая, соединяющая начало координат и x , пересекает парус $\tilde{V}$ в точке (см. [4]), которая принадлежит

некоторой грани этого паруса, а следовательно, и некоторому симплексу $\sigma = (O, x_1, \dots, x_n)$, такому, что $x_i \in \mathbb{Z}^n$ и $\det(x_1, \dots, x_n) = \pm 1$. Точка x , таким образом, принадлежит рациональному симплицальному конусу, порожденному $x_1, \dots, x_n$ (координаты точки x в этом базисе неотрицательны).

Пусть (e_i) — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, а $H \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ — такой оператор, что $He_i = x_i$ при $i = 1, \dots, n$. Имеем

$$H^{-1}x = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad \text{где } a_i \in \mathbb{N},$$

и x является положительной линейной комбинацией точек x_i . □

В размерности 3 имеется необходимое и достаточное условие. Нам понадобится следующая лемма:

ЛЕММА 2. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}^3$ — такие точки, что $\det(a, b, c) \neq 0$. Пусть σ — симплекс с вершинами O (начало координат), a, b и c . Пусть Π — параллелепипед с вершинами $O, a, b, c, b+c, c+a, a+b, a+b+c$ (обозначим Π через $P(a, b, c)$). Предположим, что целочисленное расстояние от начала координат до плоскости, содержащей a, b и c , равно d и, наконец, что симплекс σ пустой. Обозначим через v линейную рациональную форму, такую, что $v(a) = v(b) = v(c) = d$.

В Π найдется целая точка x , такая, что $v(x) = d + 1$. Если $d \geq 2$, то можно выбрать x в $\overset{\circ}{\Pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Целочисленное расстояние от точки $A \in \mathbb{Z}^n$ до целочисленной аффинной гиперплоскости H — это отношение евклидова расстояния от A до H к минимальному расстоянию от целой точки (не лежащей в H) до H . Обозначим его через $d(A, H)$. Например, целочисленное расстояние от $(0, 0, d)$ до $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ равно d . При вычислении целочисленных расстояний мы всегда будем возвращаться к этой ситуации (что, конечно, возможно).

Предположим, что точки a, b и c принадлежат плоскости $z = d$ (в координатах x, y и z). Положим $\Pi' = P(O, a, b - a, c - a)$, и пусть H_k — плоскости, задаваемые уравнениями $z = k$ при $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 1).

Рис. 1.

Согласно лемме Минковского, $\Pi' \cap H_k$ содержит по крайней мере одну целую точку при $0 \leq k \leq d$.

Пусть x — целая точка в $\Pi' \cap H_1$, и рассмотрим симплекс $\sigma' = -\sigma + b + c - a$. Этот симплекс содержится в Π' и является пустым, поскольку σ пустой. Мы видим, таким образом, что x не принадлежит внутренности симплекса σ или σ' (но x может быть вершиной одного из этих симплексов). Отсюда вытекает, что $x + a \in \Pi$, и так как $v(x) = 1$, то $v(a + x) = d + 1$.

Обратимся теперь к последнему утверждению и рассмотрим октаэдр Ω с вершинами $O, b, c, b - a, c - a, b + c - a$. Грани этого октаэдра параллельны граням симплексов σ и σ' . Целая точка в Ω должна либо быть вершиной, либо лежать в $\overset{\circ}{\Omega}$. Заметим, что вершины октаэдра Ω лежат на плоскостях H_0 и H_d . Таким образом, если $d \geq 2$, то точка x , выбранная в $\Pi \cap H_1$, принадлежит $\overset{\circ}{\Omega}$ и $x + a \in \Pi$. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть C — симплицальный конус в $\mathbb{R}^3$, а $\tilde{V}$ и M — соответствующие приведенный парус и полугруппа. Следующие свойства эквивалентны:

- 1) $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^3$ является базисом Гильберта для M ;
- 2) целочисленное расстояние между гранями паруса $\tilde{V}$ и началом координат равно 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — целочисленная плоскость, такая, что $d(O, H) = 1$, и пусть x_1, x_2 и x_3 — три целые точки в H , такие, что $\det(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Если треугольник (x_1, x_2, x_3) пустой, нетрудно проверить, что $\det(x_1, x_2, x_3) = \pm 1$.

Предположим, что целочисленное расстояние от граней паруса $\tilde{V}$ до начала координат равно 1. Если F — грань паруса $\tilde{V}$, то она представляет собой компактный многоугольник с целыми вершинами, лежащий на аффинной целочисленной плоскости H . Разобьем F на пустые треугольники. Предыдущее замечание показывает, что мы можем применить предложение 2 и заключить, что $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^3$ является базисом Гильберта для M .

Теперь предположим, что приведенный парус $\tilde{V}$ содержит грань F , такую, что $d(O, F) = d \geq 2$. Пусть (a, b, c) — пустой треугольник, содержащийся в F . Симплекс (O, a, b, c) пуст. Пусть теперь v — линейная форма, такая, что $v(a) = v(b) = v(c) = d$. Во внутренности параллелепипеда $P(a, b, c)$ существует такая целая точка x , что $v(x) = d + 1$ (x не принадлежит V). Для всякой точки $z \in V$ имеем $v(z) \geq d$, так что если x является целочисленной линейной комбинацией точек из $V \cap \mathbb{Z}^3$,

$$x = n_1 u_1 + \cdots + n_k u_k, \quad \text{где } n_i \in \mathbb{N}, u_i \in V \cap \mathbb{Z}^3,$$

то

$$v(x) = d + 1 \geq (n_1 + \cdots + n_k)d.$$

Но неравенство $d \geq 2$ влечет за собой равенство $n_1 + \cdots + n_k = 1$, и все n_i равны 0, кроме одного, равного 1. Мы получили противоречие, которое показывает, что $\tilde{V} \cap \mathbb{Z}^3$ не является базисом Гильберта для M . $\square$

§3. Примеры

Мы вычислили несколько рациональных трехмерных парусов, но ни один из них не удовлетворяет условиям теоремы 3. Тем не менее такие паруса существуют. Простейший из них — парус симплицеального конуса, порожденного точками $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Можно получить более сложный пример следующим образом. Положим $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$ и $a_3 = (0, 0, 1)$. Эти три точки определяют симплицеальный конус, который можно расширить. Ищем точку a_4 , такую, что

- (1) $\det(a_1, a_2, a_4) = \pm 1$;
- (2) $\det(a_1, a_3, a_4) = \pm 1$;
- (3) грани приведенного паруса симплицеального конуса, порожденного точками a_2 , a_3 и a_4 , — треугольники (a_1, a_2, a_3) , (a_1, a_2, a_4) и (a_1, a_3, a_4) .

Если $a_4 = (x, y, z)$, то из первого условия вытекает, что $z = \pm 1$, а из второго — что $y = \pm 1$. Условие (3) говорит о том, что O отделена от a_4 плоскостью (a_1, a_2, a_3) , от a_2 — плоскостью (a_1, a_3, a_4) и от a_3 — плоскостью (a_1, a_2, a_4) . Из этих условий вытекают неравенства $x + y + z > 1$, $y(x + y + z - 1) < 0$ и $z(x + y + z - 1) < 0$. Таким образом, y и z должны быть отрицательными числами. Следовательно, $y = z = -1$. Наконец, можно выбрать $x = 4$: $a_4 = (4, -1, -1)$.

Мы получили рациональный приведенный парус с тремя гранями, такими, что целочисленное расстояние от каждой грани до начала координат равно 1. Мы можем сделать еще один шаг вперед и попытаться найти точку $a_5 = (x, y, z)$, такую, что

- (1) $\det(a_2, a_4, a_5) = \pm 1$;
- (2) $\det(a_2, a_3, a_5) = \pm 1$;
- (3) грани приведенного паруса симплицеального конуса, порожденного точками a_3 , a_4 и a_5 , — треугольники (a_1, a_2, a_3) , (a_1, a_2, a_4) , (a_1, a_3, a_4) , (a_2, a_4, a_5) и (a_2, a_3, a_5) .

Из этих условий получаем $4z + x = \pm 1$ и $x = \pm 1$. Принимая во внимание условие (3), выбираем $a_5 = (-1, 3, 0)$. Можно проверить, что парус симплицеального конуса, порожденного a_3 , a_4 и a_5 — в точности то, что нам нужно. Мы можем продолжить наши построения, но только слегка видоизменив конструкцию. Первые два уравнения, которые мы написали для нахождения точек a_4 и a_5 , определяют две плоскости. Пересечение соответствующих плоскостей, определяемых для нахождения точки a_6 , не содержит ни одной целой точки.

Мы построим плоскость R , такую, что

- (1) R содержит a_3 и a_4 ;
- (2) $d(O, R) = 1$;
- (3) O отделена от a_i при $i = 1, \dots, 5$ плоскостью R ,

и плоскость L , такую, что

- (1) L содержит a_3 и a_5 ;
- (2) $d(O, L) = 1$;
- (3) O отделена от a_i при $i = 1, \dots, 5$ плоскостью L .

Прямая $L \cap R$ является целочисленной и содержит целую точку a_3 . Выберем точку a_6 на этой прямой, учитывая то, что O и a_6 должны быть отделены друг от друга плоскостью (a_3, a_4, a_5) . Повторяя описанные шаги, можно получить рациональный парус со сколь угодно большим числом граней.

Мы должны отметить, что теорема 3 не выполняется в размерности $n \geq 4$. В самом деле, пусть σ — целочисленный симплекс в $\mathbb{R}^4$ с вершинами O , $a_1 = (0, 0, 0, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, $a_3 = (0, 1, 0, 1)$ и $a_4 = (1, 1, -d, 1)$, где $d \in \mathbb{N}^*$. Пусть C , V и M — соответствующие симплициальный конус, парус и полугруппа. Заметим, что точки a_i лежат на гиперплоскости $t = 1$ (в координатах x, y, z, t), что $\det(a_1, a_2, a_3, a_4) = d$ и что в гиперплоскости $t = 1$ симплекс (a_1, a_2, a_3, a_4) пустой. Таким образом, $V \cap \mathbb{Z}^4$ не является базисом Гильберта для M .

Мне приятно поблагодарить В. И. Арнольда, который терпеливо следил за работой, и Е. И. Коркину за помощь, особенно с примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V. I.* A-graded algebras and continued fractions. Commun. Pure Appl. Math., **42**, 993–1000 (1989).
2. *Korkina E.* Classification of A-graded algebras with 3 generators. Indag. Math. (N.S.), **3** (1), 27–40 (1992).
3. *Коркина Е. И.* Двумерные непрерывные дроби. Простейшие примеры. Труды МИАН, **209**, 143–166 (1995).
4. *Lachaud G.* Voiles et Polyédres de Klein. Prétirage 95–22, Laboratoire de Mathématiques Discrètes, C.N.R.S., 1995.

CEREMADE, University Paris 9
e-mail: msfr@pi.ceremade.dauphine.fr

Поступило в редакцию
16 сентября 1998 г.