Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Бруццо, Л. Чирио, П. Росси, В. Н. Рубцов, Эквивариантные когомологии и локализация для алгеброидов Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 22–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:53:52

Эквивариантные когомологии и локализация для алгеброидов Ли*

© 2009. У. Бруццо, Л. Чирio, П. Росси, В. Н. Рубцов

Пусть M — многообразие, снабженное действием группы Ли G , и A — алгеброид Ли над M , снабженный согласованным инфинитезимальным G -действием. По этим данным мы строим эквивариантные когомологии алгеброида Ли и доказываем для компактной группы G соответствующую формулу локализации. В качестве приложения мы доказываем аналог формулы Ботта.

§1. Введение

Понятие алгеброида Ли, которое можно рассматривать как естественное обобщение понятия касательного расслоения к многообразию, позволяет единым образом рассматривать различные геометрические структуры, такие, как пуассоновы многообразия, связности в главных расслоениях, слоения и т. д.

Поскольку довольно часто оказывается возможным связывать алгеброиды Ли и слоения с особенностями, язык алгеброидов Ли может оказаться полезным при обобщении многих конструкций (например, связностей) на особый случай. Недавно было предложено рассматривать новые теоретико-полевые модели, основанные на теории алгеброидов Ли, см., например, [23].

По каждому алгеброиду Ли внутренним образом определяется некоторая теория когомологий. С другой стороны, теория G -дифференциальных комплексов, развитая в [12], охватывает случай *эквивариантных когомологий алгеброида Ли*, которые определены, когда алгеброид Ли допускает (возможно, инфинитезимальное) действие группы Ли G , совместимое с ее действием на базовом многообразии M .

Возникает естественная проблема — можно ли обобщить на эту ситуацию стандартные формулы локализации для эквивариантных когомологий де Рама. Эта задача представляет также определенный интерес для приложений; так, формулы локализации недавно были использованы при вычислении статистической суммы для $N=2$ -суперсимметричной модели Янга–Миллса ([19], [4]). В этом случае соответствующие когомологии представляют собой эквивариантные когомологии де Рама пространства модулей инстантонов — оснащенных самодуальных связностей на $\mathbb{R}^4$ (т. е. соответствующий алгеброид Ли является касательным расслоением к пространству модулей инстантонов). Представляется весьма правдоподобным, что аналогичные вычисления для суперсимметричных теорий Янга–Миллса с различным числом суперзарядов могут быть

---

*Первый и четвертый авторы благодарны Университету Анже и Международной школе высших исследований за гостеприимство и финансовую поддержку во время взаимных визитов в эти институты, а также Федерацию MATPUL. Их исследование выполнено при частичной поддержке ИНФН, проект P114.

проведены единым образом при различных выборах структур алгеброидов Ли на пространстве модулей инстантонов.

В этой статье мы рассматриваем формулу локализации для эквивариантных когомологий алгеброида Ли в случае, когда этот алгеброид Ли A над (компактным ориентированным) многообразием M допускает (инфинитезимальное) действие группы Ли. Если «подкрутить» эти когомологии с помощью расслоения ориентации, естественным образом ассоциированного с A , то эквивариантный коцикл может быть проинтегрирован по M . Если при этом действие группы имеет только изолированные неподвижные точки, то значение этого интеграла может быть выражено с помощью конечной суммы подходящих вычетов в неподвижных точках.

Эта формула локализации сводится, разумеется, к обычной формуле локализации для эквивариантных когомологий де Рама, когда алгеброид Ли A является касательным расслоением TM . Подобным же образом она обобщает многие известные формулы локализации, давая их новые доказательства. Так, например, из нее вытекает обобщение на случай алгеброидов Ли разнообразных теорем Ботта о нулях векторных полей (а также соответствующих формул и теоремы Ценкла и Кубарского ([9], [15])). Наша формула обобщает обычную формулу Ботта ровно в том же самом смысле, в котором понятие алгеброида Ли обобщает понятие векторного расслоения. Более того, наша формула локализации применима также в случае, когда M является комплексным многообразием и A есть алгеброид Атьи голоморфного векторного расслоения E над M . В этом случае она дает аналог формул локализации Ботта–Баума [1], Черна [10], Карелла и Либермана [8], [7] и Лю [16]. Эти аспекты будут рассмотрены в нашей следующей работе [5]. Другая формула локализации для алгеброида Атьи, которую можно получить из нашей, была доказана в [22]. Можно привести еще множество интересных примеров-приложений.

Статья организована следующим образом. В §2 мы приводим базисные определения и некоторые конструкции, относящиеся к теории когомологий алгеброидов Ли. В §3 мы вводим эквивариантные когомологии алгеброидов Ли, следуя, в основном, теории G -дифференциальных комплексов, развитой в [12]. Там же мы доказываем нашу формулу локализации. В §4, следуя [17], мы рассматриваем один из возможных подходов к определению связности в алгеброиде Ли и используем эту связность для построения характеристических эквивариантных классов для алгеброидов Ли. Эти классы используются в §5 для доказательства аналога формулы Ботта.

Благодарности. Авторы благодарны анонимным рецензентам и члену редколлегии А. Рослomu за многочисленные полезные замечания и предложения, которые помогли существенно упростить, сократить и улучшить изложение. Эти предложения позволили нам переосмыслить некоторые принципиальные моменты. Мы благодарны А. Алексееву, П. Бресслеру и И. Космани-Шварцбах за внимание к работе.

§2. Когомологии алгеброидов Ли

Пусть M — гладкое многообразие. Будем обозначать через $\mathfrak{X}(M)$ пространство векторных полей на M с естественной скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$.

Определение 2.1. Алгеброидом Ли A над M называется векторное расслоение над M , снабженное морфизмом векторных расслоений $a: A \rightarrow TM$

(называемым *якорем*) и структурой алгебры Ли на пространстве глобальных сечений $\Gamma(A)$, так что

- 1) $a: \Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ есть гомоморфизм алгебр Ли;
- 2) для $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$ и для любой функции f выполняется следующее правило Лейбница:

$$\{\alpha, f\beta\} = f\{\alpha, \beta\} + a(\alpha)(f)\beta$$

(мы обозначаем через $\{\cdot, \cdot\}$ скобку на $\Gamma(A)$).

Морфизмы между двумя алгеброидами Ли (A, a) и (A', a') над одним и тем же базовым многообразием M определяются естественным образом, т.е. это морфизмы векторных расслоений $\phi: A \rightarrow A'$, такие, что отображение $\phi: \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A')$ является гомоморфизмом алгебр Ли и очевидная диаграмма, включающая два якоря, коммутативна.

С каждым алгеброидом Ли A можно связать когомологический комплекс $(C_A^\bullet, \delta)$, где $C_A^\bullet = \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$, а дифференциал δ определяется формулой

$$\begin{aligned} (\delta\xi)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} a(\alpha_i)(\xi(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \xi(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1}), \end{aligned}$$

где $\xi \in C_A^p$ и $\alpha_i \in \Gamma(A)$, $1 \leq i \leq p+1$. Получающиеся когомологии $H^\bullet(A)$ и называются когомологиями алгеброида Ли A .

Замечание 2.2. Следует заметить, что если A есть векторное расслоение, а δ — дифференцирование степени $+1$ в градуированной алгебре $\Gamma(\wedge^\bullet A^*)$, которое удовлетворяет условию $\delta^2 = 0$, то по δ можно построить якорь $a: A \rightarrow TM$ и скобку Ли на $\Gamma(A)$, превращающую A в алгеброид Ли. Просто следует положить

$$a(\alpha)(f) = \delta f(\alpha) \quad \text{для } \alpha \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M),$$

$$\xi(\{\alpha, \beta\}) = a(\alpha)(\xi(\beta)) - a(\beta)(\xi(\alpha)) - \delta\xi(\alpha, \beta) \quad \text{для } \alpha, \beta \in \Gamma(A), \xi \in \Gamma(A^*). \quad \square$$

Напомним несколько примеров алгеброидов Ли.

Пример 2.3. Инволютивное распределение на касательном расслоении (т.е. слоение) есть алгеброид Ли с инъективным якорем. $\square$

Пример 2.4 [24]. Пусть $\mathfrak{M} = (M, \mathcal{F})$ — супермногообразие; в частности, $\mathcal{F}$ есть пучок $\mathbb{Z}_2$ -градуированных $\mathbb{R}$ -алгебр на дифференцируемом многообразии M , такой, что его можно реализовать как пучок сечений расслоения алгебры внешних форм $\wedge^\bullet E$ векторного расслоения E . Пусть D — нечетное векторное поле на $\mathfrak{M}$, такое, что $D^2 = 0$. Тогда E^* с якорем и структурой алгебры Ли на $\Gamma(E^*)$, заданными, в соответствии с замечанием 2.2, полем D , которое рассматривается как дифференциал в комплексе $\Gamma(\wedge^\bullet E)$, является алгеброидом Ли. Безусловно, начиная с алгеброида Ли, мы можем построить супермногообразие с нечетным супервекторным полем, квадрат которого равен нулю, так что оба набора данных эквивалентны. $\square$

Пример 2.5. Пусть (M, Π) — пуассоново многообразие с пуассоновым тензором Π . В этом случае $A = T^*M$ со скобкой Ли дифференциальных 1-форм

$$\{\alpha, \beta\} = \mathcal{L}_{\Pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\Pi(\beta)}\alpha - d\Pi(\alpha, \beta), \quad (1)$$

(где $\mathcal{L}$ — производная Ли), а якорь есть пуассонов тензор (точнее, задаваемое им гамильтоново отображение). Когомологии алгеброида Ли A есть когомологии Пуассона–Лихнеровича многообразия (M, Π) . $\square$

Пример 2.6. Пусть $P \xrightarrow{p} M$ — главное расслоение со структурной группой G . Тогда имеется так называемая точная последовательность Атьи векторных расслоений над M

$$0 \rightarrow \text{ad}(P) \rightarrow TP/G \rightarrow TM \rightarrow 0 \quad (2)$$

(связность в P есть расщепление этой последовательности). Сечения векторного расслоения TP/G находятся во взаимно однозначном соответствии с G -инвариантными векторными полями на P . На глобальных сечениях TP/G существует естественная структура алгебры Ли; беря проекцию $TP/G \rightarrow TM$ в качестве якоря, мы получаем алгеброид Ли — *алгеброид Атьи*, ассоциированный с главным расслоением P .

Если E — векторное расслоение над M , мы можем также связать с ним алгеброид Атьи: действительно, в этом случае имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{End}(E) \rightarrow \text{Diff}_0^1(E) \rightarrow TM \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $\text{Diff}_0^1(E)$ — расслоение дифференциальных операторов 1-го порядка на E , имеющих скалярный символ [14], и вновь $\text{Diff}_0^1(E)$ с естественной структурой алгебры Ли на сечениях и естественной проекцией $\text{Diff}_0^1(E) \rightarrow TM$ в качестве якоря есть алгеброид Ли. Эти два понятия алгеброида Атьи совпадают, когда P есть расслоение линейных реперов в E (действительно, элемент в $T_u P$ задается эндоморфизмом слоя $E_{p(u)}$ и вектором в $T_{p(u)} M$).

Алгеброид Ли с сюръективным якорем (примером которого является алгеброид Атьи) называется *транзитивным*. $\square$

Следуя [11], мы опишем сейчас скрученную форму когомологий алгеброида Ли вместе с естественным спариванием на них. Это будет еще один необходимый ингредиент формулы локализации. Пусть Q_A — линейное расслоение $\wedge^r A \otimes \Omega_M^m$, где $r = \text{rk } A$ и $m = \dim M$ и Ω_M^m есть расслоение дифференциальных m -форм на M (далее мы всегда будем обозначать через $\Omega^m(M)$ глобальные сечения этого расслоения). Для каждого $s \in \Gamma(A)$ определим отображение $L_s = \{s, \cdot\}: \Gamma(\wedge^\bullet A^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$, положив

$$L_s(s_1 \wedge \cdots \wedge s_k) = \sum_{i=1}^k s_1 \wedge \cdots \wedge \{s, s_i\} \wedge \cdots \wedge s_k.$$

Более того, можно определить отображение

$$\begin{aligned} D: \Gamma(Q_A) &\rightarrow \Gamma(A^* \otimes Q_A) = \Gamma(A^*) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(Q_A), \\ D\tau(s) &= L_s(X) \otimes \mu + X \otimes \mathcal{L}_a(s)\mu, \end{aligned}$$

где $\tau = X \otimes \mu \in \Gamma(Q_A)$ и $s \in \Gamma(A)$. Мы рассмотрим скрученный комплекс $\tilde{C}_A^\bullet = \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes Q_A) = C_A^\bullet \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(Q_A)$, где $\xi \in C_A^\bullet = \bigoplus_{k=0}^r \Gamma(\wedge^k A^*)$, с дифференциалом $\tilde{\delta}$, определенным формулой

$$\tilde{\delta}(\xi \otimes \tau) = \delta\xi \otimes \tau + (-1)^{\deg(\xi)} \xi \otimes D\tau, \quad \xi \in C_A^\bullet.$$

Обозначим получившиеся когомологии через $H^\bullet(A, Q_A)$.

Существует естественное отображение¹⁾ $p: \tilde{C}_A^\bullet \rightarrow \Omega^{\bullet-r+m}(M)$

$$p(\psi \otimes X \otimes \mu) = (a(\psi \lrcorner X)) \lrcorner \mu.$$

Предложение 2.7. Морфизм p является цепным²⁾ в том смысле, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_A^k & \xrightarrow{p} & \Omega^{k-r+m}(M) \\ \downarrow \tilde{\delta} & & \downarrow d \\ \tilde{C}_A^{k+1} & \xrightarrow{p} & \Omega^{k-r+m+1}(M) \end{array} \quad (4)$$

коммутативна с точностью до знака, т. е. на C_A^k

$$p \circ \tilde{\delta} = (-1)^k d \circ p. \quad (5)$$

Доказательство. Если мы определим производную Ли в $\tilde{C}_A^\bullet$, положив $L_s = i_s \circ \tilde{\delta} + \tilde{\delta} \circ i_s$ для элементов $s \in \Gamma(A)$, то получим коммутационное соотношение

$$p \circ L_s = \mathcal{L}_{a(s)} \circ p \quad (6)$$

на $\tilde{C}_A^k$. Используя это тождество, можно доказать (5) с помощью индукции по k . Для $k = r$ это тождество сводится к $0 = 0$. Для малых значений k достаточно проверить тождество для тех $c' \in \tilde{C}_A^k$, которые могут быть представлены в виде $c' = i_s c$ для некоторых $s \in \Gamma(A)$ и $c \in \tilde{C}_A^{k+1}$. Результат в этом случае следует из простых вычислений с использованием соотношения (6). $\square$

Пусть M — ориентированное компактное многообразие. Заметим, что в силу (канонического) изоморфизма $\tilde{C}_A^r \simeq \Omega^m(M)$ элементы $\tilde{C}_A^r$ можно интегрировать по M . Существует невырожденное спаривание

$$C_A^k \otimes_{C^\infty(M)} \tilde{C}_A^{r-k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \otimes (\psi \otimes X \otimes \mu) \mapsto \int_M (\xi \wedge \psi, X) \mu.$$

Для комплекса $\tilde{C}_A^\bullet$ имеется версия теоремы Стокса [11]: если $c \in \tilde{C}_A^{r-1}$, то

$$\int_M \tilde{\delta} c = 0.$$

Эта формула следует из тождества (5) для $k = r - 1$. Отсюда, в свою очередь, вытекает тот факт, что спаривание продолжается в когомологии и определяет билинейное отображение

$$H^\bullet(A) \otimes H^{r-\bullet}(A, Q_A) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (7)$$

Отметим, что это спаривание, вообще говоря, может быть вырожденным.

Мы имеем также естественный морфизм $C_A^\bullet \otimes_{C^\infty(M)} \tilde{C}_A^\bullet \rightarrow \tilde{C}_A^\bullet$, согласованный со степенями. Переходя снова к когомологиям, мы получаем произведение

$$H^i(A) \otimes H^j(A, Q_A) \rightarrow H^{i+j}(A, Q_A). \quad (8)$$

¹⁾Мы попеременно используем обозначения $\psi \lrcorner$ и i_ψ для свертки (внутреннего произведения) с элементом ψ , следуя подходящей формульной эстетике.

²⁾Мы благодарны А. Алексееву и А. Рослому, указавшим этот факт и предложившим его доказательство.

§3. Эквивариантные когомологии и локализация

В этом параграфе мы вводим эквивариантные когомологии для алгеброидов Ли, следуя, в основном, определениям и понятиям, которые использовались в [12] для определения эквивариантных когомологий пуассоновых многообразий (и оставаясь в рамках общей теории эквивариантных когомологий G -дифференциальных комплексов, развитой там). Затем мы предлагаем формулу локализации для эквивариантных когомологий алгеброидов Ли (теорема 3.2).

Предположим, что на алгеброиде Ли A задано действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. что существует отображение

$$b: \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(A). \quad (9)$$

Композиция с отображением якоря приводит к гомоморфизму алгебр Ли $\tilde{\rho} = a \circ b: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, т. е. к действию $\mathfrak{g}$ на M . Отображения алгебр Ли, подобные b , рассматривались в [18] в случае алгеброидов Атьи под названием «представление в дифференцированиях».

Пример 3.1 (см. [25]). Пусть Π — регулярный пуассонов тензор на M (т. е. Π имеет постоянный ранг), и пусть $\mathcal{S} = \text{Im}(\Pi)$ обозначает соответствующее симплектическое слоение. Семейство симплектических форм, определенных на листах слоения $\mathcal{S}$, задает изоморфизм $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}^*$. Следовательно, $\mathcal{S}^*$ является подрасслоением в TM и $\Gamma(\ker \Pi)$ есть идеал в $\Omega^1(M)$ относительно структуры алгеброида Ли T^*M , заданной скобкой (1). Более того, $\mathcal{S}^*$ является подалгеброидом Ли в TM ; его когомологии называются *касательными когомологиями Лихнеровича–Пуассона*. Теперь предположим, что на M задано действие ρ группы Ли G ; если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , то для каждого $\xi \in \mathfrak{g}$ будем обозначать через

$$\xi^* = \left. \frac{d}{dt} \rho_{\exp(-t\xi)} \right|_{t=0}$$

соответствующее фундаментальное векторное поле (таким образом, мы получаем гомоморфизм алгебр Ли $\tilde{\rho}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $\tilde{\rho}(\xi) = \xi^*$). Если G -действие является касательным к $\mathcal{S}^*$, то мы получим действие $b: \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^*)$ (эта конструкция в [12] называется *кокасательным поднятием*). $\square$

Если для $\xi \in \mathfrak{g}$ точка $x \in M$ является нулем векторного поля ξ^* , то мы получаем обычный эндоморфизм

$$L_{\xi, x}: T_p M \rightarrow T_p M, \quad L_{\xi, x}(v) = [\xi^*, v].$$

Рассмотрим градуированное векторное пространство

$$\mathfrak{A}^\bullet = \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^*) \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$$

с градуировкой

$$\deg(\mathcal{P} \otimes \beta) = 2 \deg(\mathcal{P}) + \deg \beta,$$

где $\mathcal{P} \in \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ и $\beta \in \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$.

Мы будем рассматривать $\mathcal{P}$ как полиномиальную функцию на $\mathfrak{g}$ и определим эквивариантный дифференциал $\delta_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{A}^\bullet \rightarrow \mathfrak{A}^{\bullet+1}$,

$$(\delta_{\mathfrak{g}}(\mathcal{P} \otimes \beta))(\xi) = \mathcal{P}(\xi)(\delta(\beta) - i_{b(\xi)}\beta), \quad (10)$$

где обе части вычисляются на элементе $\xi \in \mathfrak{g}$. Если мы положим $\mathfrak{A}_G^\bullet = \ker \delta_{\mathfrak{g}}^2$, то $(\mathfrak{A}_G^\bullet, \delta_{\mathfrak{g}})$ будет комплексом, когомологии которого мы обозначим через $H_G^\bullet(A)$ и

назовем *эквивариантными когомологиями* алгеброида Ли A (или, более точно, пары (A, b)).

Рассматривая градуированное векторное пространство

$$\mathfrak{Q}^\bullet = \mathfrak{A}^\bullet \otimes \Gamma(Q_A) = \text{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^*) \otimes \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes Q_A)$$

с дифференциалом $\tilde{\delta}_{\mathfrak{g}}$, полученным с помощью дифференциалов $\delta_{\mathfrak{g}}$ и D , и полагая $\mathfrak{Q}_G^\bullet = \ker \tilde{\delta}_{\mathfrak{g}}^2$, можно также определить эквивариантные когомологии $H_G^\bullet(Q_A)$, в которых существует произведение

$$H_G^i(A) \otimes H_G^k(Q_A) \rightarrow H_G^{i+k}(Q_A).$$

Выпишем теперь формулу локализации. В силу предложения 2.7 ее правая часть может быть вычислена с помощью обычной формулы локализации в эквивариантных когомологиях де Рама; интеграл от эквивариантно замкнутого $\mathfrak{Q}_G^\bullet$ -коцикла $\gamma(\xi)$ является на самом деле интегралом от дифференциальной формы $p(\gamma(\xi))$, и $p(\gamma)$ является коциклом в эквивариантном комплексе де Рама согласно предложению 2.7. Действительно, теперь совсем просто доказать тождество

$$p(\tilde{\delta}_{\mathfrak{g}}(\gamma)) = (-1)^k d_{\mathfrak{g}}(p(\gamma)), \quad (11)$$

где $\gamma \in \mathfrak{Q}_G^k$ (здесь $d_{\mathfrak{g}}$ — дифференциал в обычных эквивариантных когомологиях де Рама). Оно следует из предложения 2.7 и равенств

$$\begin{aligned} i_{\xi^*} p(\gamma) &= i_{\xi^*} [a(\psi \lrcorner X) \lrcorner \mu] = (\xi^* \wedge a(\psi \lrcorner X)) \lrcorner \mu = a(b(\xi) \wedge (\psi \lrcorner X)) \lrcorner \mu \\ &= (-1)^{k-1} a((i_{b(\xi)} \psi) \lrcorner X) \lrcorner \mu = (-1)^{k-1} p(i_{b(\xi)} \gamma), \end{aligned}$$

если положить $\gamma = \psi \otimes X \otimes \mu$.

Пусть M — замкнутое многообразие с действием ρ компактной группы Ли G . Мы предположим также, что M ориентируемо и что $\xi \in \mathfrak{g}$ был выбран так, что $\xi^* = \tilde{\rho}(\xi)$ (соответствующие определения см. в примере 3.1) имеет только изолированные нули. Обозначим множество таких нулей через M_ξ . Заметим, что благодаря компактности группы G детерминант $\det(L_{\xi, x})$ отличен от 0 в каждом изолированном нуле x и m (размерность M) обязательно четна (что мы и будем предполагать в дальнейшем).

Если ранг r расслоения A меньше, чем размерность m многообразия M , то для каждого эквивариантно замкнутого элемента $\gamma \in \mathfrak{Q}_G^\bullet$ интеграл $\int_M \gamma(\xi)$ равен 0 по соображениям размерности, так как в этом случае $p(\gamma)_0 = 0$. (Здесь индекс 0 обозначает «кусочек» степени 0 в обычной градуировке де Рама.) Поэтому мы будем полагать далее $r \geq m$.

Теорема 3.2. *Пусть M — замкнутое ориентированное m -мерное многообразие, на котором действует компактная группа Ли G . Пусть A — алгеброид Ли ранга r над M , такой, что $r \geq m$, и предположим, что существует гомоморфизм алгебр Ли, такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{b} & \Gamma(A) \\ & \searrow \tilde{\rho} & \downarrow a \\ & & \mathfrak{X}(M) \end{array} \quad (12)$$

коммутативна; иными словами, отображение $\tilde{\rho}$ является гомоморфизмом алгебр Ли, $\tilde{\rho}(\xi) = \xi^*$ (здесь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G). Далее предположим, что $\xi \in \mathfrak{g}$ и соответствующее фундаментальное векторное поле ξ^* имеет только изолированные нули. Наконец, пусть $\gamma \in \Omega_G^\bullet$ — эквивариантно замкнутый коцикл, $\tilde{\delta}_g \gamma = 0$.

Тогда имеет место следующая формула локализации:

$$\int_M \gamma(\xi) = (-2\pi)^{m/2} \sum_{x \in M_\xi} \frac{p(\gamma(\xi))_0(x)}{\det^{1/2} L_{\xi,x}}. \quad (13)$$

Доказательство. Так как в левой части мы интегрируем обычную дифференциальную форму $p(\gamma(\xi))$, наша формула следует из тождества (11) и обычной формулы локализации. $\square$

Легко проверить, что в случае «тривиального» алгеброида, задаваемого на касательном расслоении с тождественным якорем, наша формула сводится к обычной формуле локализации для эквивариантных когомологий де Рама (см., например, [2]).

Замечание 3.3. Если $r \geq m$ и ранг линейного отображения a в точке p не максимален (т.е. меньше, чем m), то $p(\gamma(\xi))_0(x) = 0$.

Замечание 3.4. В качестве частного случая теоремы 3.2 рассмотрим формулу локализации, связанную с действием векторного поля на M . Пусть M — компактное ориентируемое m -мерное многообразие, и пусть $X \in \Gamma(TM)$ — векторное поле на M с изолированными нулями, порождающее действие окружности. Пусть A — алгеброид Ли ранга r над M , такой, что существует $\tilde{X} \in \Gamma(A)$, для которого $a(\tilde{X}) = X$ (где a — отображение якоря). Тогда для интегрирования формы $\gamma \in \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes \wedge^r A \otimes \wedge^m T^*M)$, такой, что $\tilde{\delta}_X \gamma := (\tilde{\delta} - i_{\tilde{X}})\gamma = 0$, применима формула локализации (3.2).

Предположение, что X порождает действие окружности, можно заменить предположением, что X есть изометрия римановой метрики на M . $\square$

§4. Связности и характеристические классы алгеброидов Ли

Используя понятие характеристических классов алгеброидов Ли, можно рассмотреть некоторые приложения формул локализации. Мы начнем с введения понятия *A-связности*, см. [17].

Пусть A — алгеброид Ли с якорем a , и пусть $P \xrightarrow{p} M$ — главное расслоение со структурной группой K . Заметим, что поднятие $p^*A = A \times_M P$ допускает естественное K -действие и $A \simeq p^*A/K$. Касательное расслоение TP также допускает естественное K -действие, и мы имеем $p_*(vk) = p_*(v)$ для $v \in TP$ и $k \in K$, и, следовательно, мы имеем индуцированное отображение $p_*: TP/K \rightarrow TM$, являющееся якорем алгеброида Атьи, ассоциированного с расслоением P , см. последовательность (2).

Определение 4.1. *A-связностью* в P называется отображение расслоений $\eta: p^*A \rightarrow TP$, такое, что

(1) следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} p^*A & \xrightarrow{\eta} & TP \\ \downarrow & & \downarrow p_* \\ A & \xrightarrow{a} & TM \end{array}$$

(2) η является K -эквивариантным, т. е. $\eta(uk, \alpha) = R_{k*}\eta(u, \alpha)$ для всех $k \in K$, $u \in P$, $\alpha \in A$. (Здесь R_k обозначает правое структурное действие элемента $k \in K$ на P .)

Если P является расслоением реперов алгеброида Ли A , то η называется A -линейной связностью.

Будучи эквивариантным отображением, A -связность η в главном K -расслоении определяет отображение расслоений $\omega_\eta: A \rightarrow TP/K$, называемое 1-сечением связности η . Имеем $p_* \circ \omega_\eta = a$.

Замечание 4.2. 1. Обычное понятие связности получается, когда мы полагаем $A = TM$, и η тогда оказывается соответствующим горизонтальным поднятием, $\eta: p^*TM \rightarrow TP$.

2. Обычная связность в P (рассматриваемая как соответствующее горизонтальное поднятие $\zeta: p^*TM \rightarrow TP$) определяет A -связность η в P , если положить $\eta = \zeta \circ p^*a$. $\square$

Если $E \xrightarrow{p_E} M$ есть векторное расслоение, ассоциированное с P с помощью представления группы K в некотором векторном пространстве, то A -связность в P определяет аналогичную структуру в E , т. е. отображение расслоений $\eta_E: p_E^*A \rightarrow TE$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p_E^*A & \xrightarrow{\eta_E} & TE \\ A \downarrow & & \downarrow p_{E*} \\ A & \xrightarrow{a} & TM \end{array}$$

коммутативна. A -связность η_E определяет обычным путем ковариантную производную $\nabla: \Gamma(A) \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$: если $\phi: TP/K \rightarrow \text{Diff}_0^1(E)$ — естественное отображение¹⁾, то положим $\nabla_\alpha = (\phi \circ \omega_\eta)(\alpha)$. Эта ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_\alpha(fs) = f\nabla_\alpha(s) + a(\alpha)(f)s \quad (14)$$

для любой функции f на M .

Введем понятие G -эквивариантной A -связности. Предположим, что группа Ли G действует на M и что это действие ρ поднимается до действия $\hat{\rho}$ на A ;

¹⁾Сечение X расслоения TP/K является K -инвариантным векторным полем на P . Так как имеется очевидное отображение $TP \rightarrow \text{Diff}_0^1(P \times V)$, где V обозначает стандартный слой расслоения E , в силу эквивариантности X задает дифференциальный оператор на E со скалярным символом.

это означает, что для каждого $g \in G$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{\rho}_g} & A \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ TM & \xrightarrow{\rho_{g*}} & TM \end{array}$$

Кроме того, мы предположим, что ρ поднимается также до действия $\tilde{\rho}$ на главном K -расслоении P , перестановочного со структурным K -действием.

Определение 4.3. G -эквивариантная A -связность η в P есть такая A -связность η , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^*A & \xrightarrow{\hat{\rho}_g} & p^*A \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ TP & \xrightarrow{\tilde{\rho}_{g*}} & TP \end{array}$$

коммутативна для всех $g \in G$.

Так как действие группы G на P перестановочно с действием группы K , мы получаем индуцированное действие $\tilde{\rho}_*$ на TP/K , и утверждение о G -эквивариантности связности η может быть сформулировано в терминах 1-сечения связности ω_η как коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{\rho}_g} & A \\ \omega_\eta \downarrow & & \downarrow \omega_\eta \\ TP/K & \xrightarrow{\tilde{\rho}_{g*}} & TP/K \end{array}$$

Кривизна $\mathcal{R}_\eta$ A -связности η в главном K -расслоении P определяется в терминах отображения ω_η как элемент из $\Gamma(\wedge^2 A^* \otimes TP/K)$, заданный формулой

$$\mathcal{R}_\eta(\alpha, \beta) = [\omega_\eta(\alpha), \omega_\eta(\beta)] - \omega_\eta(\{\alpha, \beta\}).$$

По построению $p_* \circ \mathcal{R}_\eta = 0$, так что $\mathcal{R}_\eta$ есть элемент из $\Gamma(\wedge^2 A^* \otimes \text{ad}(P))$. Кривизна $\mathcal{R}_\eta$ удовлетворяет аналогу структурных уравнений и тождеств Бьянки. Эти уравнения подходящим образом формулируются в терминах так называемой внешней A -производной

$$D_A: \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes TP/K) \rightarrow \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A^* \otimes TP/K),$$

$$\begin{aligned} (D_A \chi)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} [\omega_\eta(\alpha_i), \chi(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1})] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \chi(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1}), \end{aligned}$$

в виде

$$\mathcal{R}_\eta = D_A \omega_\eta - \frac{1}{2} [\omega_\eta, \omega_\eta], \quad D_A \mathcal{R}_\eta = 0. \quad (15)$$

Заметим, что эквивариантность связности выражается условием

$$[D_A, \mathcal{L}_{\tilde{\xi}^*}] = 0$$

для всех $\xi \in \mathfrak{g}$. Здесь $\mathcal{L}_{\tilde{\xi}^*}$ — производная Ли сечений расслоения TP/K относительно сечения $\tilde{\xi}^*$ расслоения TP/K , индуцированного векторным полем на P , порождающим действие группы G (т. е. $\mathcal{L}_{\tilde{\xi}^*}(v) = [\tilde{\xi}^*, v]$).

Если связность η эквивариантна, то мы можем рассматривать эквивариантную версию этих соотношений, определив, в частности, эквивариантную внешнюю A -производную $D_A^{\mathfrak{g}}$, действующую на $\text{Sym}^{\bullet}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Gamma(\wedge^{\bullet} A^* \otimes TP/K)$, формулой

$$(D_A^{\mathfrak{g}}\chi)(\xi) = D_A(\chi(\xi)) - (i_{\tilde{\xi}^*} \otimes \text{id})(\chi(\xi)).$$

Кроме того, мы определим эквивариантную кривизну $R_{\eta}^{\mathfrak{g}}$ связности η формулой

$$(R_{\eta}^{\mathfrak{g}}\chi)(\xi) = R_{\eta}(\chi(\xi)) + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}^*}(\chi(\xi)) - [D_A, i_{\tilde{\xi}^*} \otimes \text{id}](\chi(\xi)) = R_{\eta}(\chi(\xi)) + \mu(\chi(\xi)),$$

где последнее равенство определяет «отображение момента» μ . Далее, квадратные скобки в этих уравнениях являются антикоммутаторами. Легкое вычисление показывает, что эквивариантная кривизна удовлетворяет эквивариантному тождеству Бьянки

$$D_A^{\mathfrak{g}}R_{\eta}^{\mathfrak{g}} = 0. \quad (16)$$

Мы можем также выразить тождества (15) и (16) в локальной форме, включающей *локальное 1-сечение связности*, определенное следующим образом. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия M , над которым наше расслоение P тривиализуется. Тогда мы получаем локальный изоморфизм

$$\psi_j: (TP/K)|_{U_j} \rightarrow TU_j \times \mathfrak{k},$$

где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы K . Локальные 1-сечения связности определяются условием

$$\omega_j(\alpha) = \text{pr}_2 \circ \psi_j \circ \omega_{\eta}(\alpha)$$

(где pr_2 — проекция на второй сомножитель в $TU_j \times \mathfrak{k}$), и по аналогии определим локальные 2-сечения кривизны $\mathcal{R}_j$. Тождества (15) теперь запишутся в виде

$$\mathcal{R}_j = \delta\omega_j + \frac{1}{2}[\omega_j, \omega_j], \quad \delta\mathcal{R}_j + [\omega_j, \mathcal{R}_j] = 0. \quad (17)$$

Таким же образом эквивариантная кривизна может быть представлена локальным 2-сечением $\mathcal{R}_j^{\mathfrak{g}}$, которое ввиду тождеств (17) удовлетворяет тождествам

$$\delta_{\mathfrak{g}}\mathcal{R}_j^{\mathfrak{g}} + [\omega_j, \mathcal{R}_j^{\mathfrak{g}}] = 0. \quad (18)$$

Гомоморфизм Черна–Вейля определяется следующим образом. Пусть $I^{\bullet}(\mathfrak{k}) = (\text{Sym}^{\bullet}\mathfrak{k}^*)^K$. Выберем A -связность η в P и для любого полинома $Q \in I^{\ell}(\mathfrak{k})$ степени ℓ определим элемент $\lambda_Q \in C_A^{2\ell}$,

$$\lambda_Q(\alpha_1, \dots, \alpha_{2\ell}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \tilde{Q}(\mathcal{R}_{\eta}(\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}), \dots, \mathcal{R}_{\eta}(\alpha_{\sigma_{2\ell-1}}, \alpha_{\sigma_{2\ell}})),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам из 2ℓ объектов, а $\tilde{Q}$ есть поляризация полинома Q , т. е. единственная Ad -инвариантная симметрическая функция от ℓ переменных в $\mathfrak{k}$, такая, что $\tilde{Q}(\chi, \dots, \chi) = Q(\chi)$ для всех $\chi \in \mathfrak{k}$. Можно показать, что это δ -коцикл и что результирующий класс когомологий $[\lambda_Q]$ не зависит от связности и, следовательно, определен гомоморфизм градуированных колец $\lambda: I^{\bullet}(\mathfrak{k}) \rightarrow H^{2\bullet}(A)$. Если $\tilde{\lambda}: I^{\bullet}(\mathfrak{k}) \rightarrow H_{dR}^{2\bullet}(M)$ обозначает

обычный гомоморфизм Черна–Вейля в когомологии де Рама в M , то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I^\bullet(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & H_{dR}^{2\bullet}(M) \\ & \searrow \lambda & \downarrow a^* \\ & & H^{2\bullet}(A) \end{array} \quad (19)$$

Используя гомоморфизм Черна–Вейля, можно ввести различного сорта характеристические классы для алгеброида Ли A . Однако диаграмма (19) показывает, что, к сожалению, эти характеристические классы суть не что иное, как образ при отображении a^* характеристических классов расслоения E . Чтобы это доказать, выберем любую (обычную) связность в P , чтобы вычислить характеристические классы в $H_{dR}^{2\bullet}(M)$, и A -связность, ассоциированную с ней (см. замечание 4.2(2)), чтобы вычислить характеристические классы в $H^\bullet(A)$. Два таких характеристических класса связаны морфизмом a^* из диаграммы (19).

В дальнейшем мы будем работать с характеристическими классами «понtringинского типа»: а именно, мы возьмем $\mathfrak{k} = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, так что P будет расслоением линейных реперов комплексного векторного расслоения E . Мы полагаем, что E является комплексификацией некоторого вещественного векторного расслоения. Пусть Q_i есть i -й элементарный Ad -инвариантный полином, и обозначим через λ_i соответствующий характеристический класс. Эти характеристические классы равны нулю, когда i нечетно (для проверки зафиксируем связность в P , совместимую с послойной метрикой на E , и вычислим характеристические классы с помощью индуцированной A -связности).

Если $Q \in I^\bullet(\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}))$ есть Ad -инвариантный однородный симметрический полином степени $2i$ на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, то $Q(\mathcal{R}_\eta^g) \in \mathfrak{A}_G^{4i}$. Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 4.4. *Элемент $Q(\mathcal{R}_\eta^g)$ является δ_g -замкнутым. Соответствующий класс когомологий $\lambda_Q^g(A) \in H_G^{4i}(A)$ не зависит от эквивариантной связности η .*

Доказательство. Сначала показываем, что элемент $Q(\mathcal{R}_\eta^g)$ есть δ_g -коцикл, используя формулу (18). Чтобы проверить второе утверждение, заметим, что если η, η' — две эквивариантные A -связности в главном расслоении P , то можно определить 1-параметрическое семейство связностей

$$\eta_t = t\eta' + (1-t)\eta$$

с $0 \leq t \leq 1$, и пусть

$$\begin{aligned} & q(\eta, \eta')(\alpha_1, \dots, \alpha_{2i}) \\ &= i \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \int_0^1 \tilde{Q} \left(\frac{d}{dt} \omega_{\eta_t}(\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}), \mathcal{R}_{\eta_t}^g(\alpha_{\sigma_3}, \alpha_{\sigma_4}), \dots, \mathcal{R}_{\eta_t}^g(\alpha_{\sigma_{2i-1}}, \alpha_{\sigma_{2i}}) \right) dt, \end{aligned}$$

где $\tilde{Q}$ — поляризация полинома Q . Непосредственное вычисление с использованием тождества (18) и формулы

$$\frac{d}{dt} \mathcal{R}_{\eta_t}^g = D_A^g \frac{d}{dt} \omega_{\eta_t}$$

показывает теперь, что

$$Q(\mathcal{R}_{\eta'}^{\mathfrak{g}}) - Q(\mathcal{R}_{\eta}^{\mathfrak{g}}) = \delta_{\mathfrak{g}} q(\eta, \eta'),$$

откуда и следует утверждение. $\square$

Если Q является стандартным i -м элементарным Ad-инвариантным полиномом ς_i на $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, мы обозначим через $\lambda_i^{\mathfrak{g}}(A)$ ($i = 1, \dots, r$) соответствующий эквивариантный характеристический класс (являющийся нулевым при нечетных i). Как и выше, эти классы являются просто образами при морфизме a^* (сопряженном отображению якоря) эквивариантных классов Черна (комплексифицированного) векторного расслоения E .

§5. Формула Ботта

В качестве приложения нашей теоремы локализации мы докажем результат, который обобщает классическую формулу Ботта [3], а также аналогичные результаты Ценкла и Кубарского [9], [15]. Формула Ботта (в разных вариантах) соответствует разным предположениям относительно векторного поля, входящего в формулу. Рассматриваемый нами случай обобщает обычную формулу Ботта для векторного поля, порождающего действие окружности и имеющего изолированные особенности.

Пусть Φ есть моном от $n = [r/4]$ переменных. Обозначим через W_{Φ} его *полный вес*, определенный приписыванием веса $4i$ его i -й переменной. Мы свяжем с мономом Φ вещественное число, сопоставляемое алгеброиду A . Предположим, что $W_{\Phi} \leq r$, и пусть $\Xi^{\mathfrak{g}}$ есть эквивариантный скрученный коцикл степени $r - W_{\Phi}$, т.е. $\Xi^{\mathfrak{g}} \in \Omega_G^{r-W_{\Phi}}$. Пусть $\Xi = \Xi^{\mathfrak{g}}(0) \in \tilde{C}_A^{r-W_{\Phi}}$ обозначает член степени нуль в $\Xi^{\mathfrak{g}}$ (как функции от $\xi \in \mathfrak{g}$). Он удовлетворяет соотношению $\tilde{\delta}\Xi = 0$. Можно положить

$$\Phi_{\Xi}(A) = (-2\pi)^{-m/2} \int_M \Phi(\lambda_2(A), \dots, \lambda_{2n}(A)) \wedge \Xi,$$

где λ_i — характеристические классы векторного расслоения A (они были определены в предыдущем параграфе). Это число зависит только от алгеброида Ли A и от класса когомологий Ξ . Мы также определим элемент

$$\begin{aligned} \Phi_{\Xi}^{\mathfrak{g}}(A) &= (-2\pi)^{-m/2} \int_M \Phi(\lambda_2^{\mathfrak{g}}(A), \dots, \lambda_{2n}^{\mathfrak{g}}(A)) \wedge \Xi^{\mathfrak{g}} \\ &= (-2\pi)^{-m/2} \int_M \Phi(\varsigma_2(\mathcal{R}_{\eta} + \mu), \dots, \varsigma_{2n}(\mathcal{R}_{\eta} + \mu)) \wedge \Xi^{\mathfrak{g}} \end{aligned} \quad (20)$$

в $\text{Sym}^{\bullet}(\mathfrak{g}^*)$. Разумеется, $\Phi_{\Xi}(A) = \Phi_{\Xi}^{\mathfrak{g}}(A)(0)$. Получаем следующий результат в духе формулы Ботта, который является непосредственным следствием из теоремы 3.2.

Теорема 5.1. Пусть A — алгеброид Ли ранга r над m -мерным компактным ориентированным многообразием M , и пусть $\alpha \in \Gamma(A)$ — сечение, порождающее действие окружности на A и такое, что $a(\alpha)$ имеет изолированные нули. Пусть Φ — полином от $n = [r/4]$ переменных, мономы которого имеют полный вес W_{Φ} . Тогда если $r \geq m \geq W_{\Phi}$, то

$$\Phi_{\Xi}(A) = \sum_{x \in M_{a(\alpha)}} \frac{\Phi(c_2(L_{a(\alpha),x}), \dots, c_{2n}(L_{a(\alpha),x})) p(\Xi^{\mathfrak{g}})_0}{\det^{1/2} L_{a(\alpha),x}}, \quad (21)$$

где классы $c_i(L_{a(\alpha),x})$ суть эквивариантные классы Черна эндоморфизма $L_{a(\alpha),x}$, действующего в касательном пространстве $T_x M$ в нуле x поля $a(\alpha)$ (см. [3]).

Доказательство. Правая часть формулы (21) получается из правой части формулы (13), если учесть следующие два факта. Первый: мы можем вычислить эквивариантные характеристические классы, входящие в $\Phi_{\Xi}^g(A)$, выбирая в главном расслоении $GL(A)$ эквивариантную A -связность, индуцированную обычной эквивариантной связностью ζ в векторном расслоении A . Таким образом,

$$\Phi(\lambda_2^g(A), \dots, \lambda_{2n}^g(A)) = a^*(\Phi(\nu_2^g(A), \dots, \nu_{2n}^g(A))),$$

где классы ν_i^g — это эквивариантные классы Черна комплексификации векторного расслоения A . Второй: если R_{ζ}^g есть эквивариантная кривизна связности ζ , то для каждой элементарной симметрической функции ς_i и каждого нуля x поля $a(\alpha)$

$$(\varsigma_i(R_{\zeta}^g))_0(x) = c_i(L_{a(\alpha),x}).$$

□

Если $A = TM$, формула (21) сводится к обычной формуле Ботта.

§6. Заключительные замечания

Как мы покажем в работе [5], теорема 5.1 обобщает несколько формул локализации для случая действия голоморфного поля на комплексном многообразии, которое эквивариантно поднимается до действия на голоморфном векторном расслоении, см. [1], [10], [8], и, в частности, воспроизводит теорему о вычетах Гротендика.

С другой стороны, наша формула допускает обобщения в нескольких направлениях. Одним из них могла бы быть формула локализации для эквивариантных когомологий, ассоциированных с действием группы Ли на алгеброиде Куранта. Такая формула объединяла бы несколько формул, появившихся недавно в литературе и связанных, в основном, с обобщенными структурами Калаби–Яу ([6], [20], [21], [13]), и давала бы нашу формулу в случае замены алгеброида Куранта на алгеброид Ли.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. F. Baum, R. Bott, *On the zeroes of meromorphic vector fields*, in: Essays in Topology and Related Topics. Memoires dédiés à Georges de Rham, Springer-Verlag, New York, 1970, 29–47.
- [2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 298, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] R. Bott, *Vector fields and characteristic numbers*, Michigan Math. J., **14** (1967), 231–244.
- [4] U. Bruzzo, F. Fucito, J. F. Morales, A. Tanzini, *Multi-instanton calculus and equivariant cohomology*, J. High Energy Physics, **2003**:5 (2003), 54–76 (electronic).
- [5] U. Bruzzo, V. Rubtsov, *Holomorphic Atiyah algebroids and localization* (в печати).
- [6] H. Bursztyn, G. R. Cavalcanti, M. Gualtieri, *Reduction of Courant algebroids and generalized complex structures*, Adv. Math., **211**:2 (2007), 726–765.
- [7] J. B. Carrell, *A remark on the Grothendieck residue map*, Proc. Amer. Math. Soc., **70**:1 (1978), 43–48.

- [8] J. B. Carrell, D. I. Lieberman, *Vector fields and Chern numbers*, Math. Ann., **225**:3 (1977), 263–273.
- [9] B. Cenk, *Zeros of vector fields and characteristic numbers*, J. Diff. Geom., **8** (1973), 25–46.
- [10] S.-S. Chern, *Meromorphic vector fields and characteristic numbers*, Scripta Math., **29**:3–4 (1973), 243–251.
- [11] S. Evens, J.-H. Lu, A. Weinstein, *Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **50** (1999), 417–436.
- [12] V. L. Ginzburg, *Equivariant Poisson cohomology and a spectral sequence associated with a moment map*, Internat. J. Math., **10** (1999), 977–1010.
- [13] S. Hu, B. Uribe, *Extended manifolds and extended equivariant cohomology*, <http://arxiv.org/abs/math/0608319>.
- [14] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Vector fields and generalized vector fields on fibered manifolds*, in: Geometry and Differential Geometry (Proc. Conf. Univ. Haifa, Israel, 1979), Lecture Notes in Math., vol. 792, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 307–355.
- [15] J. Kubarski, *Bott's vanishing theorem for regular Lie algebroids*, Trans. Amer. Math. Soc., **348**:6 (1996), 2151–2167.
- [16] K. Liu, *Holomorphic equivariant cohomology*, Math. Ann., **303**:1 (1995), 125–148.
- [17] R. Loja Fernandes, *Lie algebroids, holonomy and characteristic classes*, Adv. Math., **170**:1 (2002), 119–179.
- [18] K. C. H. Mackenzie, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 213, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [19] N. A. Nekrasov, *Seiberg–Witten potential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys., **7**:5 (2003), 831–864.
- [20] Y. Nitta, *Reduction of generalized Calabi–Yau structures*, J. Math. Soc. Japan, **59**:4 (2007), 1179–1198.
- [21] Y. Nitta, *Duistermaat–Heckman formula for a torus action on a generalized Calabi–Yau manifold and localization formula*, <http://arxiv.org/abs/math/0702264v1>.
- [22] В. Рубцов, *Топологические инварианты эллиптических комплексов Спенсера уравнений Ли*, Известия ВУЗов, Математика, **1992**:5 (1992), 74–92.
- [23] T. Strobl, *Algebroid Yang–Mills theory*, Phys. Rev. Lett., **93**:21 (2004), 211601.
- [24] А. Ю. Вайнтроп, *Алгебroidы Ли и гомологические векторные поля*, УМН, **52**:2 (1997), 161–162.
- [25] I. Vaisman, *Remarks on the Lichnerowicz–Poisson cohomology*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **40**:4 (1990), 951–963.

Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste
 Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Trieste
 e-mail: bruzzo@sissa.it

Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste
 Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Trieste
 e-mail: cirio@sissa.it

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Trieste
 e-mail: issoroloap@gmail.com

Université d'Angers, Département de Mathématiques
 ИТЭФ, теоретический отдел, Москва
 e-mail: volodya@math.cnrs.fr

Поступило в редакцию
 17 января 2006 г.
 В переработанном виде
 28 июня 2008 г.