Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Шульман, Т. В. Шульман, О подмодулях Ли
и тензорных алгебрах, *Функц. анализ и его прил.*,
2009, том 43, выпуск 2, 91–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 07:42:48

Доказательство леммы 4. Предположим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_j} \mu(T^{n_j} E_j^i \cap E_j^i) (h_j^i + 1) \geq \rho > 0$$

для некоторой последовательности $n_j > H_j$. Покажем, что для любого измеримого множества B

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{n_j} B \cap B) \geq \rho \mu(B) \quad (*)$$

(свойство частичной жесткости с коэффициентом ρ). Множество B можно аппроксимировать ξ_j -измеримыми множествами B_j . Неравенства $\mu(T^{n_j} B_j \cap B_j) \geq \rho \mu(B_j) - \delta_j$, $\delta_j \rightarrow 0$, непосредственно устанавливаются для множеств B_j при условии, что величины $\mu(B_j | U_j^i)$ близки к $\mu(B_j)$ для большинства (в смысле веса) башен $U_j^i = E_j^i \cup T E_j^i \cup \dots \cup T^{h_j^i} E_j^i$.

Из эргодичности T и стремления величин h_j^i к бесконечности вытекает, что для большинства башен U_j^i величины $\mu(B | U_j^i)$ близки к $\mu(B)$ при фиксированном B . Учитывая, что $\mu(B_j \Delta B) \rightarrow 0$, получаем, что $\mu(B_j | U_j^i) \approx \mu(B_j)$ для большинства башен U_j^i . Таким образом, установлены неравенства $\mu(T^{n_j} B_j \cap B_j) \geq \rho \mu(B_j) - \delta_j$, что влечет за собой (*). Так как автоморфизм T не обладает свойством частичной жесткости, приходим к противоречию. $\square$

Автор благодарит Ж.-П. Тувено, а также В. Бергельсона за стимулирующие беседы. Автор также признателен рецензенту за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. В. Тихонов, УМН, **62**:1 (2007), 209–210. [2] С. В. Тихонов, Матем. сб., **198**:4 (2007), 135–158. [3] Я. Г. Синай, Матем. сб., **63**:1 (1964), 23–42. [4] А. Б. Каток, Функт. анализ и его прил., **1**:1 (1967), 75–85. [5] S. Kalikow, Ergodic Theory Dynamic Systems, **4** (1984), 237–259. [6] В. В. Рыжиков, Матем. сб., **183**:3 (1992), 133–160.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vryzh@mail.ru

Поступило в редакцию
7 мая 2007 г.

УДК 512.553+517.986.2

О подмодулях Ли и тензорных алгебрах

© 2009. В. С. Шульман, Т. В. Шульман

1. Введение. Пусть B — произвольная ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$. Подпространство $C \subset B$ называется ее идеалом Ли, если $ax - xa \in C$ для всех $a \in B$, $x \in C$. Структура идеалов Ли ассоциативных алгебр привлекала внимание алгебраистов и специалистов по теории банаховых алгебр, начиная с работ Херстейна [3] и Джекобсона и Риккарта [4]. Более общей является задача описания структуры подмодулей Ли в произвольном B -бимодуле $\mathcal{X}$ (это подпространства в $\mathcal{X}$, определяемые формально теми же условиями, что и идеалы Ли).

Если, как это обычно принято, обозначить через L_a и R_a соответственно операторы левого и правого умножения на a , то можно сказать, что подмодули Ли — это подпространства, инвариантные относительно множества $\Xi(\mathcal{X}, B)$ всех внутренних дифференцирований $\delta_a = L_a - R_a$, $a \in B$, бимодуля $\mathcal{X}$. Это показывает, что, изучая строение идеалов Ли алгебры B и подмодулей Ли ее бимодулей, естественно рассматривать алгебры $\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)$, порожденные множествами $\Xi(\mathcal{X}, B)$, для различных B -бимодулей $\mathcal{X}$. Оказывается, что в некоторых важных случаях эти алгебры допускают эффективное описание: они совпадают с алгебрами $\mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)$ всех элементарных операторов $\sum_{k=1}^n L_{a_k} R_{b_k}$ на $\mathcal{X}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_k a_k b_k = 0, \quad (1)$$

$$\sum_k b_k a_k = 0. \quad (2)$$

Мы будем обозначать алгебру всех элементарных операторов на B -бимодуле $\mathcal{X}$ через $El(\mathcal{X}, B)$. В наиболее часто рассматриваемом случае $\mathcal{X} = B$ сократим введенные обозначения до $El(B)$, $\mathcal{D}_{\text{Lie}}(B)$ и $\mathcal{M}_{\text{Lie}}(B)$.

Удобно (и представляет самостоятельный интерес) рассматривать соответствующие задачи в тензорных алгебрах. Пусть B — унитарная алгебра, и пусть B^{op} — ее «отражение», т. е. то же линейное пространство с умножением $a * b = ba$. Тогда всякий B -бимодуль $\mathcal{X}$ можно рассматривать как модуль над $B \otimes B^{\text{op}}$, и отображение $a \otimes b \rightarrow L_a R_b$ является эпиморфизмом алгебры $B \otimes B^{\text{op}}$ на алгебру $El(\mathcal{X}, B)$. При этом элементы вида $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ соответствуют внутренним дифференцированиям δ_a . Следовательно, если удастся доказать, что

$$\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B) = \mathcal{N}_{\text{Lie}}(B), \quad (3)$$

где $\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)$ — алгебра, порожденная всеми $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, а $\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B)$ — алгебра всех тензоров $\sum_k a_k \otimes b_k$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), то как немедленные следствия доказываются равенства

$$\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B) = \mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B) \quad (4)$$

для всех B -бимодулей $\mathcal{X}$.

Нас, в основном, интересуют аналогичные задачи для банаховых алгебр и бимодулей; алгебраические результаты при этом играют вспомогательную роль. Если B — банахова алгебра, а $\mathcal{X}$ — банахов B -бимодуль, то все элементарные операторы ограничены и можно рассмотреть замыкания (по операторной норме) $\overline{\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)}$, $\overline{\mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)}$ алгебр $\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)$ и $\mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)$ в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ всех ограниченных операторов на $\mathcal{X}$. Они могут совпадать даже в том случае, когда $\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B) \neq \mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)$.

Далее, всякий банахов B -бимодуль является банаховым модулем над проективным тензорным произведением $V_B = B \otimes B^{\text{op}}$. В V_B мы рассматриваем замыкания алгебр $\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)$ и $\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B)$, а также алгебру $\mathfrak{N}_{\text{Lie}}(B)$ всех элементов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k \in V_B$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), причем в данном случае суммы понимаются как суммы сходящихся по норме рядов. Нетрудно видеть, что

$$\overline{\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)} \subset \overline{\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B)} \subset \mathfrak{N}_{\text{Lie}}(B). \quad (5)$$

Нам не известны примеры, в которых $\overline{\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B)} \neq \mathfrak{N}_{\text{Lie}}(B)$. Если B коммутативна, то равенство сразу следует из тождества $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \otimes b_k - a_k b_k \otimes 1)$.

Заметим, что если B — алгебра функций на компакте K ($B \subset C(K)$), то $V_B \subset C(K \times K)$ и $\mathfrak{N}_{\text{Lie}}$ состоит из всех функций $f(x, y) \in V_B$, для которых

$$f(x, x) = 0.$$

Как и в чисто алгебраическом случае, из равенства

$$\overline{\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)} = \overline{\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B)} \quad (6)$$

немедленно следует

$$\overline{\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)} = \overline{\mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B)} \quad (7)$$

для любого $\mathcal{X}$.

Завершая введение, авторы хотели бы выразить признательность Матею Брешару за полезные обсуждения рассмотренных в работе вопросов.

2. Алгебраические результаты.

Теорема 1. *Любая унитарная алгебра B с одной образующей удовлетворяет условию (3).*

Весьма элементарное, но полезное приложение теоремы 1 можно получить, рассматривая алгебру M_n всех $n \times n$ -матриц как бимодуль над алгеброй D_n диагональных матриц.

Для любого подмножества K прямого произведения $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ обозначим через $Z(K)$ пространство всех матриц $a \in M_n$, таких, что $a_{jk} = 0$ при $(j, k) \notin K$.

Следствие 2. *Всякий D_n -подмодуль Ли в M_n — это прямая сумма $S = G + Z(K)$, где G — подпространство в D_n , а K — подмножество в $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, не пересекающее диагональ.*

Как следствие получается хорошо известное описание идеалов Ли в M_n (см., например, [3], где подобный результат получен для матриц над произвольной алгеброй):

Следствие 3. *Любой идеал Ли в M_n — это 0 , M_n , $\mathbb{C}1$ либо пространство M_n^0 всех матриц с нулевым следом.*

Покажем теперь, что равенство (3) выполняется не для всех (и даже не для всех коммутативных) алгебр.

Теорема 4. (i) Пусть $B = \mathcal{P}_2$ — алгебра многочленов от двух переменных (x_1, x_2) , а $\mathcal{P}_4 = B \otimes B$ — алгебра многочленов от четырех переменных. Подалгебра в $\mathcal{P}_4$, порожденная многочленами вида $q(x_1, x_2) - q(x_3, x_4)$, строго содержится в идеале всех многочленов $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяющих условию $p(x_1, x_2, x_1, x_2) = 0$.

(ii) Равенство (3) неверно, если B есть F_2 , свободная алгебра с двумя образующими a, b . В частности, элемент $aba \otimes 1 - ba \otimes a - ab \otimes a + b \otimes a^2$ принадлежит $\mathcal{N}_{\text{Lie}}(B) \setminus \mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)$.

Следующая теорема устанавливает справедливость равенства (3) для некоторых важных примеров некоммутативных алгебр.

Условимся обозначать символом $\tilde{B}$ унитаризацию алгебры B (результат присоединения к B единицы).

Теорема 5. *Равенство (3) выполнено, если $B = \widetilde{F(E)}$, где $F(E)$ — алгебра всех операторов конечного ранга на линейном пространстве E , и, в частности, если B есть $M_n(\mathbb{C})$, алгебра всех матриц порядка n .*

Обратимся к рассмотрению элементарных операторов. В этом случае речь идет о справедливости равенства

$$\mathcal{D}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B) = \mathcal{M}_{\text{Lie}}(\mathcal{X}, B). \quad (8)$$

Легко видеть, что если для алгебры $\tilde{B}$ выполнен аналог равенства (3), то равенство (8) верно для всех B -модулей. Таким образом, мы сразу получаем следующий результат:

Следствие 6. *Для алгебр M_n , $F(E)$ и для любой алгебры с одной образующей равенство (8) справедливо при всех $\mathcal{X}$.*

Следующее утверждение усиливает ч. (ii) теоремы 4.

Теорема 7. $\mathcal{M}_{\text{Lie}}(F_2) \neq \mathcal{D}_{\text{Lie}}(F_2)$.

3. Результаты о банаховых алгебрах. Пусть B — банахова алгебра. В этом случае естественным аналогом равенства (3) является равенство (6), которое для коммутативной алгебры B эквивалентно условию

$$\overline{\mathcal{T}_{\text{Lie}}(B)} = \mathfrak{N}_{\text{Lie}}(B). \quad (9)$$

Наша задача — исследовать вопрос о справедливости этих условий для различных банаховых алгебр.

Отметим, прежде всего, некоторые следствия теоремы 1.

Следствие 8. *Пусть B — алгебра функций на компакте $K \subset \mathbb{C}$, полная по норме, в которой многочлены образуют плотную подалгебру. Пусть $\mathcal{W} = B \hat{\otimes} B$ и $E_{\text{Lie}} \subset \mathcal{W}$ — множество всех элементов вида $a \hat{\otimes} 1 - 1 \hat{\otimes} a$, где $a \in B$. Тогда замкнутая подалгебра $\mathcal{T}_{\text{Lie}}$ алгебры $\mathcal{W}$, порожденная множеством E_{Lie} , совпадает с идеалом $J = \{f(x, y) \in \mathcal{W} : f(x, x) = 0\}$.*

Применим следствие 8 к рассмотрению подмодулей Ли.

Пусть $\mathfrak{T}(\mathbb{D})$ — алгебра абсолютно сходящихся рядов Тейлора на единичном круге. Нетрудно видеть, что функции из $\mathfrak{T}(\mathbb{D})$ можно применять к любому оператору U нормы ≤ 1 , причем $\|f(U)\| \leq \|f\|_{\mathfrak{T}(\mathbb{D})}$. Следовательно, функции из алгебры $\mathcal{S} = \mathfrak{T}(\mathbb{D}) \hat{\otimes} \mathfrak{T}(\mathbb{D})$ можно применять к любым двум коммутирующим операторам U, V с нормами ≤ 1 , причем выполняется неравенство $\|f(U, V)\| \leq \|f\|_{\mathcal{S}}$.

Следствие 9. *Пусть $\mathcal{X}$ — банахов бимодуль над банаховой алгеброй $\mathcal{A}$. Если $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| \leq 1$, то для любой функции $f(\lambda, \mu)$ из $\mathcal{S}$, такой, что $f(\lambda, \lambda) = 0$, оператор $f(L_a, R_a)$ оставляет инвариантным любой замкнутый подмодуль Ли в $\mathcal{X}$.*

Если $\mathcal{X}$ — гильбертово пространство, то, используя неравенство фон Неймана, можно в последнем следствии заменить $\mathfrak{T}(\mathbb{D})$ более широкой алгеброй $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ (алгеброй непрерывных функций на единичном круге, аналитических внутри круга), а $\mathcal{S}$ соответственно — алгеброй $\mathcal{A}(\mathbb{D}) \hat{\otimes} \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Более того, можно расширить $\mathcal{A}(\mathbb{D}) \hat{\otimes} \mathcal{A}(\mathbb{D})$ до $\mathcal{A}(\mathbb{D} \otimes \mathbb{D})$ (эта алгебра действует на парах коммутирующих сжатий в силу теоремы Андо [2] о дилатации).

Наша следующая цель — рассмотрение случая, когда $B = C(K)$, где компакт K произволен (не предполагается, что $K \subset \mathbb{C}$).

Банахова алгебра $V(K) = C(K) \hat{\otimes} C(K)$ называется алгеброй Варопулоса. Она естественно реализуется как регулярная симметричная банахова алгебра функций на $K \times K$. Теория таких алгебр и ее приложения к анализу подробно изложены в [5].

Теорема 10. *Замкнутая подалгебра в $V(K)$, порожденная всеми функциями $f(x) - f(y)$, совпадает с идеалом всех функций из $V(K)$, обращающихся в нуль на диагонали.*

Укажем одно приложение к теории инвариантных подпространств. Известная теорема Арвесона [1] гласит, что ультраслабо замкнутая алгебра операторов в гильбертовом пространстве H , содержащая максимальную абелеву симметричную подалгебру (сокращенно, masa) и отличная от всей алгебры $B(H)$, должна иметь нетривиальные инвариантные подпространства. Мы обобщим этот результат бернсайдовского характера на операторные алгебры Ли.

Следствие 11. *Содержащая masa алгебра Ли операторов в H либо имеет нетривиальные инвариантные подпространства, либо плотна в $B(H)$ относительно ультраслабой топологии.*

Пример банаховой алгебры, для которой равенство (9) не выполнено, можно построить аналогично нашему алгебраическому контрпримеру:

Теорема 12. *Для алгебры $B = T(\mathbb{D}^2)$ абсолютно сходящихся рядов Тейлора от двух переменных равенство (9) не выполняется.*

Укажем одно из возможных применений к описанию идеалов Ли.

Пусть F — равномерно-гиперфинитная C^* -алгебра, т.е. унитарная C^* -алгебра, содержащая возрастающую последовательность (сеть в несепарабельном случае) $*$ -подалгебр F_n , изоморфных полным матричным алгебрам, объединение F_∞ которых плотно в F . Нетрудно видеть, что F имеет единственный нормализованный след τ ; положим $F^0 = \ker \tau$.

Следствие 13. *Пусть B — унитарная банахова алгебра и $A = B \hat{\otimes} F$, где F — равномерно-гиперфинитная C^* -алгебра. Тогда всякий замкнутый идеал Ли L в A содержит элементы из $B \otimes F_\infty$; более того $L = \overline{L \cap (B \otimes F_\infty)}$.*

Следствие 14. *Для любого замкнутого идеала Ли L алгебры $A = B \hat{\otimes} F$ найдутся замкнутый идеал I алгебры B и ее замкнутый идеал Ли M , такие, что $L = I \hat{\otimes} F^0 + M \hat{\otimes} 1$.*

Перейдем к рассмотрению алгебры $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ всех компактных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{X}$ обладает свойством аппроксимации: $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{F}(\mathfrak{X})}$. Следующий результат показывает, что равенство (6) «почти выполнено» для алгебры $\widetilde{\mathcal{K}(\mathfrak{X})}$ всех компактных операторов с присоединенной единицей.

Теорема 15. *Если $B = \widetilde{\mathcal{K}(\mathfrak{X})}$, то $\mathcal{M}_{\text{Lie}}(B)^2 \subset \overline{\mathcal{F}_{\text{Lie}}(B)}$.*

Мы закончим рассмотрением условия (7) для $B = \mathcal{K}(H)$, где H — гильбертово пространство, а $\mathcal{K} = B$ (случай элементарных операторов на самой алгебре).

Известно, что для $\mathcal{K}(H)$ сопряженным пространством является $C_1(H)$, идеал всех ядерных операторов. Обозначим через $C_1^0(H)$ подпространство в $C_1(H)$, состоящее из операторов с нулевым следом.

Теорема 16. *Пусть $B = \mathcal{K}(H)$. Тогда*

- (i) $\overline{D_{\text{Lie}}(B)} \cap \mathcal{K}(B) = \{T \in \mathcal{K}(B) : T^* B^* \subset C_1^0(H)\};$
 (ii) $\overline{D_{\text{Lie}}(B)} = \overline{M_{\text{Lie}}(B)}.$

Авторы выражают признательность рецензентам за полезные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. Arveson, Ann. of Math., **100** (1974), 433–532. [2] T. Andô, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 88–90. [3] I. N. Herstein, Amer. J. Math., **77** (1955), 279–285. [4] N. Jacobson, C. Rickart, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), 479–502. [5] N. Varopoulos, Acta Math., **119** (1967), 51–112.

Вологодский государственный технический университет,
 кафедра высшей математики
 e-mail: shulman_v@yahoo.com

Поступило в редакцию
 30 июля 2007 г.

University of Copenhagen, Department of Mathematics
 e-mail: tatiana_shulman@yahoo.com

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 20.03.2009. Подписано к печати 24.04.2009. Формат 70 × 100/16
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 2,2 тыс. Бум. л. 3,0
 Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 264 экз. Заказ 179.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
 Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
 117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
 Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6