Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Зайденберг, Гиперболичность общих деформаций, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 39–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:06:23

Гиперболичность общих деформаций*

© 2009. М. Г. ЗАЙДЕНБЕРГ

Модифицируя метод деформаций из [16], мы строим дальнейшие примеры гиперболических по Кобаяши поверхностей в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ любой наперед заданной четной степени $d \geq 8$.

Напомним, что [8] по теореме Бруди компактное комплексное пространство X гиперболично по Кобаяши, если и только если любое голоморфное отображение $\mathbb{C} \rightarrow X$ постоянно. Пусть¹⁾ $X_0 = f_0^{-1}(0)$ — алгебраическая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, где f_0 — форма степени d . Мы скажем, что (очень) общая малая деформация гиперповерхности X_0 гиперболична, если для любой (очень) общей²⁾ гиперповерхности $X_{\infty} = f_{\infty}^{-1}(0)$ степени d в $\mathbb{P}^n$ и для всех достаточно малых $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (зависящих от X_{∞}) гиперповерхность $X_{\varepsilon} = (f_0 + \varepsilon f_{\infty})^{-1}(0)$ гиперболична по Кобаяши. Исходя из этого определения, можно сформулировать следующую версию гипотезы Кобаяши.

Ослабленная гипотеза Кобаяши. Пусть X — произвольная гиперповерхность степени $d \geq 2n - 1$ в $\mathbb{P}^n$. Тогда ее (очень) общая малая деформация гиперболична по Кобаяши.

Исходная гипотеза Кобаяши утверждает, в частности, что (очень) общая поверхность X в $\mathbb{P}^3$ степени $d \geq 5$ гиперболична по Кобаяши. Известно, что гиперболична по Кобаяши очень общая поверхность в $\mathbb{P}^3$ степени $d \geq 21$ (см. МакКвиллан [9] и Демайи–Эль Гуль [2]).

По теореме Бруди доказательство гиперболичности сводится к тому или иному принципу вырождения для целых кривых в X . Доказательство гипотезы Блоха, данное Грином и Гриффитсом [7], доставляет пример подобного принципа вырождения. В соответствии с этим принципом ([2], [9]) любая целая кривая $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X$ на очень общей поверхности $X \subseteq \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 21$ удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению. По поводу дальнейших продвижений, в том числе в высших размерностях, см. [3], [10]–[12], [15].

Метод деформаций позволяет получить примеры гиперболических поверхностей в $\mathbb{P}^3$ малой степени. Замечательная конструкция, принадлежащая Дювалю [4], дает пример гиперболической секстики³⁾ $X_{\varepsilon} \subseteq \mathbb{P}^3$. Здесь метод дефор-

* Настоящая работа выполнена во время визита автора в Математический институт Макса Планка в Бонне. Автор признателен этому институту за поддержку и отличные условия для работы.

¹⁾ Под $f^{-1}(0)$ мы понимаем здесь схемный прообраз, который может быть неприведенным.

²⁾ Гиперповерхность считается общей (соответственно очень общей), если в пространстве параметров она принадлежит дополнению к собственному алгебраическому подмножеству (соответственно дополнению к счетному объединению собственных алгебраических подмножеств).

³⁾ То есть поверхности шестой степени.

маций применяется в 5 этапов, так что $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)$ содержит 5 компонент, которые выбираются последовательно достаточно малыми. Таким образом, X_ε варьируется в 5-мерной линейной системе; однако деформация поверхности X_0 к X_ε не является ни линейной, ни очень общей.

В работе [16] строятся примеры специальных поверхностей X в $\mathbb{P}^3$ любой наперед заданной степени $d \geq 8$, таких, что их общая малая деформация гиперболична по Кобаяши. В этих примерах $X = X' \cup X''$ является объединением двух конусов в $\mathbb{P}^3$ с различными вершинами над гиперболическими плоскими кривыми в общем положении степеней, больших или равных четырем.

Приведем краткое изложение метода, использованного в [16] (см. дальнейшие ссылки в [13], [16]). Пусть даны две гиперповерхности X_0 и X_∞ в $\mathbb{P}^n$ одной и той же степени d . Рассмотрим пучок гиперповерхностей $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{C}}$, порожденный гиперповерхностями X_0 и X_∞ . Предположим, что для некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ соответствующие гиперповерхности X_{ε_n} не гиперболичны. Тогда существует последовательность целых кривых Бруди $\varphi_n: \mathbb{C} \rightarrow X_{\varepsilon_n}$, сходящаяся к (непостоянной) кривой Бруди $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X_0$. Предположим дополнительно, что гиперповерхность X_0 допускает рациональное отображение $\pi: X_0 \dashrightarrow Y_0$ в гиперболическое многообразие Y_0 (в кривую Y_0 рода ≥ 2 в случае, когда $\dim X_0 = 2$). Тогда композиция $\pi \circ \varphi$ обязательно постоянна при условии, что она определена. В любом случае предельная целая кривая $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X_0$ вырождается.

Для объединения $X_0 = X'_0 \cup X''_0$ двух конусов в $\mathbb{P}^3$ в общем положении имеется еще один запрет [16]: образ $\varphi(\mathbb{C})$ не должен пересекать двойную кривую $D = X'_0 \cap X''_0$ вне точек множества $D \cap X_\infty$. Поэтому в силу наших предположений о том, что степени этих конусов больше или равны четырем и что гиперповерхность X_∞ общая, целая кривая φ должна быть постоянной, что приводит к противоречию.

Это применимо, в частности, к объединению $X'_0 \cup X''_0$ двух конусов в $\mathbb{P}^3$ степени 4 в общем положении. Модифицируя конструкцию из [16], в настоящей заметке мы установим, помимо прочего, гиперболичность общих деформаций двойного проективного конуса в $\mathbb{P}^3$ степени 8, см. пример 2.1 ниже.

Автор признателен рецензенту, указавшему неточность в первоначальном варианте работы.

§1. Основная теорема

Основной результат работы — это следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть гиперповерхность $Y_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) гиперболична по Кобаяши, где $\mathbb{P}^n$ реализовано как гиперплоскость $H = \{z_{n+1} = 0\}$ в $\mathbb{P}^{n+1}$. Тогда общая малая деформация $X_\varepsilon \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ двойного проективного конуса $X_0 = 2\hat{Y}_0$ над Y_0 гиперболична по Кобаяши.*

Доказательство теоремы приведено в конце этого параграфа. Сначала мы изложим некоторые предварительные сведения. Мы обозначаем через Δ единичный круг в $\mathbb{C}$, через B^n — единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и через $\text{Hol}(B^n)$ — пространство всех голоморфных функций в шаре B^n . Через $\text{Hol}(X, Y)$, где X и Y — комплексные пространства, мы обозначаем пространство всех голоморфных отображений $X \rightarrow Y$ с его обычной топологией.

Лемма 1.2. Пусть функции $f_0, f_\infty \in \text{Hol}(B^n)$ таковы, что $f_0(0) = f_\infty(0) = 0$, дивизоры $X_0 = f_0^{-1}(0)$, $X_\infty = f_\infty^{-1}(0)$ не имеют общей компоненты, проходящей через начало координат, и дивизор X_∞ гладкий и приведенный в 0. Положим $\Gamma = X_0 \cap X_\infty$ и $X_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(0)$, где $f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_\infty$. Предположим, что $df_0|_\Gamma = 0$. Пусть, далее, (φ_n) , $\varphi_n \in \text{Hol}(\Delta, X_{\varepsilon_n})$, — последовательность голоморфных дисков, сходящаяся при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ к диску $\varphi \in \text{Hol}(\Delta, X_0)$ с $\varphi(0) = 0$. Тогда $d\varphi(0) \in T_0 X_\infty$.

Доказательство. Наше утверждение очевидно в случае, когда $\varphi(\Delta) \subseteq \Gamma$. Таким образом, мы будем далее предполагать, что $\varphi(\Delta) \not\subseteq \Gamma$.

Утверждение 1. В предположениях леммы $\varphi_n(t_n) \in \Gamma$ для некоторой последовательности $t_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим голоморфное отображение

$$F: B^n \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad z \mapsto (f_0(z), f_\infty(z)).$$

Легко видеть, что F обладает следующими свойствами:

- $F(0) = 0$;
- $F^{-1}(0) = \Gamma$;
- $F(X_{\varepsilon_n}) \subseteq l_n$, где $l_n = \{x + \varepsilon_n y = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$;
- $F(X_0) \subseteq l_0 = \{x = 0\}$;
- $F \circ \varphi_n(\Delta) \subseteq l_n$;
- $F \circ \varphi(\Delta) \subseteq l_0$, $F \circ \varphi(0) = 0$, $F \circ \varphi \neq 0$.

Пусть $F \circ \varphi_n = (x_n(t), y_n(t))$ и $F \circ \varphi = (0, y(t))$. Тогда $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $y(0) = 0$ и $y \not\equiv 0$, то $y_n \not\equiv 0$. В силу теоремы Руше существует такая последовательность $t_n \rightarrow 0$, что $y_n(t_n) = 0$, так что $x_n(t_n) = -\varepsilon_n y_n(t_n) = 0$. Следовательно, $\varphi_n(t_n) \in \Gamma = X_0 \cap X_\infty$, что и утверждалось. $\square$

Для завершения доказательства леммы удобно заменить исходную последовательность (φ_n) новой, (ψ_n) . Мы полагаем $\psi_n(t) = \varphi_n(a_n t + t_n)$, где (t_n) — последовательность из утверждения 1, а $a_n := 1 - |t_n| \rightarrow 1$. Таким образом, $\psi_n \in \text{Hol}(\Delta, X_{\varepsilon_n})$ и $\psi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$. К тому же $p_n := \psi_n(0) = \varphi_n(t_n) \in \Gamma$ для любого $n \geq 1$ и $v_n := d\psi_n(0) \rightarrow v := d\varphi(0)$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь доказательство сводится к следующему утверждению.

Утверждение 2. $v_n \in T_{p_n} X_\infty$ для любого $n \geq 1$.

Доказательство. Из тождества $f_{\varepsilon_n} \circ \psi_n \equiv 0$ получаем

$$0 = (f_{\varepsilon_n} \circ \psi_n)'(0) = (f_0 \circ \psi_n)'(0) + \varepsilon_n (f_\infty \circ \psi_n)'(0).$$

Так как по предположению $df_0|_\Gamma = 0$, в частности $df_0(p_n) = 0$ для любого $n \geq 1$, то $(f_0 \circ \psi_n)'(0) = 0$ для любого $n \geq 1$. Следовательно, также $(f_\infty \circ \psi_n)'(0) = 0$ для любого $n \geq 1$. Это доказывает утверждение 2. $\square$

Лемма 1.2 применима, в частности, в случае пучка гиперповерхностей степени d

$$X_\varepsilon = (f_0 + \varepsilon f_\infty)^{-1}(0) \quad \text{в } \mathbb{P}^{n+1},$$

который порожден гиперповерхностями

$$X_0 = X'_0 \cup X''_0 = f_0^{-1}(0) \quad \text{и} \quad X_\infty = f_\infty^{-1}(0).$$

Положим $D = X'_0 \cap X''_0$ и предположим, что $D \subseteq X_\infty$. Тогда для любой последовательности целых кривых $\varphi_n: \mathbb{C} \rightarrow X_{\varepsilon_n}$, сходящейся к $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X'_0$, в силу

леммы 1.2 имеем

$$d\varphi(t) \in T_P X'_0 \cap T_P X_\infty \quad \forall P = \varphi(t) \in D.$$

Далее мы обратимся к проблеме исчислительной геометрии о подсчете пересечения общей гиперповерхности с образующими данного конуса в $\mathbb{P}^{n+1}$.

Предложение 1.3. Пусть $\hat{Y} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ — проективный конус над проективным многообразием $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ с вершиной P . Рассмотрим общую гиперповерхность $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ степени $e \geq 2 \dim Y$. Тогда X трансверсально пересекает каждую образующую $l = (PQ)$ конуса $\hat{Y}$ (где Q пробегает Y) не менее чем в $e - 2 \dim Y$ различных точках.

Доказательство¹⁾. Мы используем далее следующие обозначения. Через $\mathbb{P}_e \simeq \mathbb{P}^N$ мы обозначим проективное пространство эффективных дивизоров степени e на $\mathbb{P}^{n+1}$, где $N = \binom{n+1+e}{n} - 1$, а через $\text{Gr}(n+2, 2)$ — грассманиан прямых на $\mathbb{P}^{n+1}$. Для $k \in \{1, \dots, e+1\}$ мы обозначим через $\Sigma_{e,k}$ множество всех эффективных дивизоров степени e на $\mathbb{P}^1$, имеющих не более чем $k-1$ приведенных точек. Легко видеть, что подмножество $\Sigma_{e,k} \subseteq \text{Sym}_e(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^e$ замкнуто по Зарисскому.

Для данной прямой $l \in \text{Gr}(n+2, 2)$ мы обозначим через $\Sigma_{e,k}(l)$ соответствующее множество дивизоров на l и через Z_l множество всех тех $X \in \mathbb{P}_e$, для которых либо $l \subseteq X$, либо $l \not\subseteq X$ и $X \cdot l \in \Sigma_{e,k}(l)$. Ясно, что замкнутые по Зарисскому подмножества Z_l в $\mathbb{P}_e$ попарно проективно эквивалентны. Далее, многообразие инцидентности

$$\mathcal{Z} = \{(l, X) \in \text{Gr}(n+2, 2) \times \mathbb{P}_e \mid X \in Z_l\}$$

также замкнуто по Зарисскому в $\text{Gr}(n+2, 2) \times \mathbb{P}_e$. Кроме того, $\text{pr}_1|_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z} \rightarrow \text{Gr}(n+2, 2)$ — расслоение со слоями $Z_l = (\text{pr}_1|_{\mathcal{Z}})^{-1}(l)$.

Для данного подмногообразия $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ соответствие $Y \ni Q \mapsto (PQ) \in \text{Gr}(n+2, 2)$ определяет замкнутое вложение $Y \hookrightarrow \text{Gr}(n+2, 2)$. Замкнутое по Зарисскому подмножество

$$\mathbb{P}(Y, e, k) := \text{pr}_2[(Y \times \mathbb{P}_e) \cap \mathcal{Z}] \subseteq \mathbb{P}_e$$

состоит из всех тех дивизоров $X \in \mathbb{P}_e$, которые пересекают трансверсально хотя бы одну образующую $l = (PQ)$ проективного конуса $\hat{Y}$ не более чем в $k-1$ различных точках, т. е. $X \in Z_l$. Имеем

$$\dim \mathbb{P}(Y, e, k) \leq \dim[(Y \times \mathbb{P}_e) \cap \mathcal{Z}] = \dim Y + \dim Z_l.$$

Значит,

$$\text{codim}(\mathbb{P}(Y, e, k), \mathbb{P}_e) \geq \text{codim}(Z_l, \mathbb{P}_e) - \dim Y = \text{codim}(\Sigma_{e,k}, \mathbb{P}^e) - \dim Y. \quad (1)$$

Мы покажем ниже, что

$$\text{codim}(\Sigma_{e,k}, \mathbb{P}^e) = 1 + \left\lfloor \frac{e-k}{2} \right\rfloor. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\text{codim}(\Sigma_{e,k}, \mathbb{P}^e) > \dim Y \iff k \leq e - 2 \dim Y. \quad (3)$$

¹⁾Нам приятно воспользоваться возможностью поблагодарить Берни Шиффмана. Его указания позволили значительно сократить первоначальное доказательство.

Открытое по Зарисскому подмножество $\mathbb{P}_e \setminus \mathbb{P}(Y, e, k) \subseteq \mathbb{P}_e$ состоит из всех тех эффективных дивизоров степени e в $\mathbb{P}^{n+1}$, которые трансверсально пересекают каждую образующую $l = (PQ)$ конуса $\widehat{Y}$ не менее чем в k различных точках. Из (1) и (3) вытекает, что это дополнение непусто при $k = e - 2 \dim Y$, как и утверждалось. Таким образом, нам остается проверить равенство (2).

Доказательство равенства (2). Для набора $\bar{n} = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$, где $n_1 \leq \dots \leq n_s$ и $n_1 + \dots + n_s = e$, мы обозначим через $\Sigma_{\bar{n}}$ подмногообразие в $\mathbb{P}^e$, состоящее из всех эффективных дивизоров на $\mathbb{P}^1$ вида $D = \sum_{i=1}^s n_i [p_i]$, где $p_i \in \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, s$. Ясно, что $\dim \Sigma_{\bar{n}} = s = s(\bar{n})$. Далее, многообразие $\Sigma_{e,k}$ эффективных дивизоров степени e на $\mathbb{P}^1$, которые имеют не более чем $k - 1$ приведенных точек, допускает разложение

$$\Sigma_{e,k} = \bigcup_{n_k \geq 2} \Sigma_{\bar{n}}.$$

Имеем

$$\dim \Sigma_{e,k} = \max_{n_k \geq 2} \dim \Sigma_{\bar{n}} = \max_{n_k \geq 2} s(\bar{n}).$$

Если $e - k + 1$ четно, то этот максимум достигается при

$$n_1 = \dots = n_{k-1} = 1, \quad n_k = \dots = n_s = 2,$$

а в противном случае — при

$$n_1 = \dots = n_{k-2} = 1, \quad n_{k-1} = \dots = n_s = 2.$$

В любом случае

$$\text{codim}(\Sigma_{e,k}, \mathbb{P}^e) = e - \max_{n_k \geq 2} s(\bar{n}) = 1 + \left\lfloor \frac{e - k}{2} \right\rfloor.$$

Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим общую гиперповерхность X_∞ степени $2d = 2 \deg Y_0$ и пучок гиперповерхностей $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$, порожденный $X_0 = 2\widehat{Y}_0$ и X_∞ . Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и последовательность целых кривых Броди $\varphi_n: \mathbb{C} \rightarrow X_{\varepsilon_n}$, такая, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$, где $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X_0$ — непостоянная целая кривая. Пусть $\pi: \widehat{Y}_0 \dashrightarrow Y_0$ обозначает проекцию конуса на его основание. По предположению многообразие Y_0 гиперболично, следовательно, отображение $\pi \circ \varphi$ должно быть постоянным. Иначе говоря, $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq l$, где $l \cong \mathbb{P}^1$ — образующая конуса $\widehat{Y}_0$.

Пусть $Y_0 = f_0^{-1}(0)$, где f_0 — форма степени d от $z_0, \dots, z_n$. Имеем $df_0^2|_{\widehat{Y}_0} = 0$. Если прямая l и гиперповерхность X_∞ пересекаются трансверсально в некоторой точке $\varphi(t) \in l \cap X_\infty$, то $d\varphi(t) = 0$ в силу леммы 1.2.

Поскольку гиперповерхность $Y_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ гиперболична и $n \geq 2$, имеем

$$d = \deg Y_0 \geq \begin{cases} 4 = n + 2, & \text{если } n = 2, \\ 5 = n + 2, & \text{если } n = 3, \\ 2n - 2 \geq n + 2, & \text{если } n \geq 4. \end{cases}$$

В самом деле, на любой гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ степени $d \leq 2n - 3$ имеются проективные прямые и на любой квартике в $\mathbb{P}^3$ имеются рациональные или эллиптические кривые. Следовательно,

$$\deg X_\infty = 2d \geq 2n + 4 \geq 2 \dim Y_0 + 5.$$

В силу предложения 1.3 l и X_∞ пересекаются трансверсально не менее чем в 5 различных точках. Стало быть, непостоянная мероморфная функция $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow l \cong \mathbb{P}^1$ имеет не менее пяти кратных значений. Так как дефект кратного значения больше или равен $1/2$, это приводит к противоречию с соотношением дефектов. $\square$

§2. Примеры

По данной гиперболической гиперповерхности Y в $\mathbb{P}^n$ степени d теорема 1.1 позволяет построить новую гиперболическую гиперповерхность X в $\mathbb{P}^{n+1}$ степени $2d$. Итерируя эту конструкцию, мы получаем гиперболические гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ для всех $n \geq 3$. Их степени $d(n)$ растут экспоненциально вместе с n , в то время как лучшая известная на сегодняшний день асимптотика квадратична: $d(n) = 4(n - 1)^2$; см., например, [14]. Однако в малых размерностях эти степени не слишком высоки.

Пример 2.1. Пусть $Y_0 \subseteq \mathbb{P}^2$ — гиперболическая кривая степени $d \geq 4$, и пусть $\hat{Y}_0 \subseteq \mathbb{P}^3$ — проективный конус над Y_0 . Тогда общая малая деформация двойного конуса $X_0 = 2\hat{Y}_0$ — гиперболическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ четной степени $2d \geq 8$.

Остальные примеры основаны на следующем принципе вырождения, доказательство которого проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 1.1.

Предложение 2.2. Пусть $X_0 = kZ$ ($k \geq 2$) для некоторой гиперповерхности $Z \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$, и пусть $X_\infty = \bigcup_{i=1}^d H_{a_i}$ ($a_1, \dots, a_d \in \mathbb{P}^1$) — объединение $d = \deg X_0 \geq 5$ различных гиперплоскостей из пучка гиперплоскостей $(H_a)_{a \in \mathbb{P}^1}$. Рассмотрим пучок гиперповерхностей $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ в $\mathbb{P}^{n+1}$, порожденный X_0 и X_∞ . Если последовательность целых кривых $\varphi_n: \mathbb{C} \rightarrow X_{\varepsilon_n}$ сходится при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ к целой кривой $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow Z$, то $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq Z \cap H_a$ для некоторого $a \in \mathbb{P}^1$.

Примеры 2.3. Пусть задан пучок плоскостей $(H_a)_{a \in \mathbb{P}^1}$ в $\mathbb{P}^3$. Используя предложение 2.2, можно продеформировать

- $X_0 = 5Z$, где $Z \subseteq \mathbb{P}^3$ — плоскость,
- тройную quadriку $X_0 = 3Z \subseteq \mathbb{P}^3$,
- двойную кубику, квартику, и т.д. $X_0 = 2Z \subseteq \mathbb{P}^3$,

превратив каждую из них в неприводимую поверхность $X_\varepsilon \in \langle X_0, X_\infty \rangle$ степени $d = \deg X_0$ (где, как и прежде, $X_\infty = \bigcup_{i=1}^d H_{a_i}$) таким образом, что предельная целая кривая $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow Z$ содержится в некотором сечении $Z \cap H_a$ ($a \in \mathbb{P}^1$).

Согласно известной гипотезе Богомолова–Грина–Гриффитса–Ленга о сильной алгебраической вырожденности (см., например, [1], [7]), на каждой проективной поверхности S общего типа имеется лишь конечное множество рациональных и эллиптических кривых и, более того, образ любой непостоянной целой кривой $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow S$ содержится в одной из них. В частности, эта гипотеза

должна выполняться для любой гладкой поверхности $S \subseteq \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 5$. Это согласуется с гипотезой Kobayashi. Действительно, в силу теоремы Клеменса–Ксю–Вуазан очень общая гладкая поверхность $S \subseteq \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 5$ не содержит рациональных и эллиптических кривых. Значит, в силу упомянутой гипотезы она должна быть гиперболической.

В этой связи метод деформации из предложения 2.2 приводит к следующему результату.

Следствие 2.4. Пусть $S \subseteq \mathbb{P}^3$ — проективная поверхность. Допустим, что S содержит такую кривую Z , что образ любой непостоянной целой кривой $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow S$ содержится¹⁾ в Z . Пусть X_∞ — объединение $d = 2 \deg S$ плоскостей из общего пучка плоскостей в $\mathbb{P}^3$. Тогда любая малая деформация X_ε двойной поверхности $X_0 = 2S$ в направлении X_∞ гиперболична.

Действуя в том же духе, мы можем применить предложение 2.2 в следующей ситуации.

Пример 2.5. Пусть X_0 — двойной проективный конус в $\mathbb{P}^3$ над гиперболической плоской кривой степени $d \geq 4$ и X_∞ — объединение $2d$ различных плоскостей из общего пучка плоскостей $(H_a)_{a \in \mathbb{P}^1}$. Тогда любая малая деформация X_ε конуса X_0 в направлении X_∞ — гиперболическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ степени $2d \geq 8$. В подходящих координатах $(Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3)$ в $\mathbb{P}^3$ такая поверхность может быть задана уравнением

$$Q(Z_0, Z_1, Z_2)^2 - P(Z_2, Z_3) = 0, \quad (4)$$

где P и Q — общие формы степени $d = 2k$ и k соответственно. Это не что иное, как примеры Дюваля–Фуджимото [5], [6].

В заключение мы обратимся к проблеме Kobayashi о гиперболичности дополнения к общей гиперповерхности. Рассмотрим объединение $2n + 1$ гиперплоскостей $L = \bigcup_{i=1}^{2n+1} L_i$ в $\mathbb{P}^n$ в общем положении. Согласно версии леммы Бореля в формулировке Кирнана–Кобаяши и М. Грина, дополнение $\mathbb{P}^n \setminus L$ гиперболично по Кобаяши. В частности, это верно для объединения 5 прямых в $\mathbb{P}^2$ в общем положении. Более того [17], это объединение можно продеформировать к гладкой квинтике, дополнение к которой гиперболично. Эта малая деформация совершается в 5 этапов и не является ни линейной, ни очень общей. Стало быть, возникает следующий вопрос.

Вопрос 2.6. Пусть L (соответственно M) — объединение $2n + 1$ (соответственно $2n - 1$) гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$ в общем положении. Верно ли, что дополнение к общей малой линейной деформации гиперповерхности L гиперболично по Кобаяши (соответственно общая малая линейная деформация гиперповерхности M гиперболична по Кобаяши)? Верно ли, в частности, что объединение пяти прямых в $\mathbb{P}^2$ (пяти плоскостей в $\mathbb{P}^3$) в общем положении допускает общую малую линейную деформацию к неприводимой квинтике в $\mathbb{P}^2$, дополнение к которой гиперболично (соответственно к неприводимой гиперболической квинтике в $\mathbb{P}^3$)?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Bogomolov, B. de Oliveira, *Hyperbolicity of nodal hypersurfaces*, J. Reine Angew. Math., **596** (2006), 89–101.

¹⁾Последнее выполняется, например, в ситуации, когда S гиперболична по модулю Z .

- [2] J.-P. Demailly, J. el Goul, *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math., **122**:3 (2000), 515–546.
- [3] S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, *Effective algebraic degeneracy*, <http://arxiv.org/abs/0811.2346>.
- [4] J. Duval, *Une sextique hyperbolique dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$* , Math. Ann., **330** (2004), 473–476.
- [5] J. Duval, *Lettre à J.-P. Demailly*, 30.10.1999 (не опубликовано).
- [6] H. Fujimoto, *A family of hyperbolic hypersurfaces in the complex projective space*. The Chuang special issue, Complex Variables Theory Appl., **43**:3–4 (2001), 273–283.
- [7] M. Green, Ph. Griffiths, *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, in: The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980, 41–74.
- [8] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. An Introduction*, 2nd ed., World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2005.
- [9] M. McQuillan, *Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds*, Geom. Funct. Anal., **9** (1999), 370–392.
- [10] M. Păun, *Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity*, Math. Ann., **340**:4 (2008), 875–892.
- [11] E. Rousseau, *Equation différentielles sur les hypersurfaces de $\mathbb{P}^4$* , J. Math. Pure Appl., **86**:4 (2006), 322–341.
- [12] E. Rousseau, *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in $\mathbb{P}^4$* , Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **16**:2 (2007), 369–383.
- [13] B. Shiffman, M. Zaidenberg, *Constructing low degree hyperbolic surfaces in $\mathbb{P}^3$* . Special issue for S. S. Chern, Houston J. Math., **28**:2 (2002), 377–388.
- [14] B. Shiffman, M. Zaidenberg, *Hyperbolic hypersurfaces in $\mathbb{P}^n$ of Fermat–Waring type*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**:7 (2002), 2031–2035.
- [15] Y.-T. Siu, *Hyperbolicity in complex geometry*, in: The legacy of Niels Henric Abel, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 543–566.
- [16] Б. Шиффман, М. Зайденберг, *Новые примеры поверхностей в $\mathbb{CP}^3$, гиперболических по Kobayashi*, Функц. анализ и его прил., **39**:1 (2005), 90–94.
- [17] М. Зайденберг, *Устойчивость гиперболической вложенности и конструирование примеров*, Матем. сб., **135**(177):3 (1988), 361–372.

Université Grenoble I, Institut Fourier
e-mail: zaidenbe@ujf-grenoble.fr

Поступило в редакцию
1 октября 2007 г.