Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Кре́ц, Орисферическое преобразование на вещественных симметрических пространствах: ядро и коядро, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 37–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:17:16

Орисферическое преобразование на вещественных симметрических пространствах: ядро и коядро

© 2009. Б. КРЁЦ

В настоящей работе определяется орисферическое преобразование для полупростого симметрического пространства Y . Пространству Y при помощи естественного двойного расслоения ставится в соответствие более геометрическое пространство орисфер Ξ . Орисферическое преобразование связывает при помощи послойного интегрирования некоторые интегрируемые аналитические функции на Y с аналитическими функциями на Ξ . Мы находим ядро орисферического преобразования и устанавливаем инъективность орисферического преобразования на функциях, принадлежащих максимально непрерывному спектру пространства Y .

§1. Введение

Настоящая работа посвящена орисферическому преобразованию Радона на полупростых группах и их однородных пространствах. Это преобразование было введено в основополагающей работе Гельфанда и Граева [6], в которой авторы подробно рассматривают случай комплексной полупростой группы и закладывают основу для рассмотрения орисферического преобразования для других однородных пространств, в частности римановых симметрических пространств некомпактного типа.

Цель настоящей работы — дать определение орисферического преобразования для произвольного полупростого симметрического пространства и установить его основные свойства.

Обратимся непосредственно к предмету нашего исследования. Пусть $Y = G/H$ — полупростое неприводимое вещественное симметрическое пространство¹⁾. Мы будем рассматривать пространство $L^2(Y)$ функций на Y , квадратично-интегрируемых относительно G -инвариантной меры. Это гильбертово пространство имеет естественное разложение

$$L^2(Y) = L^2_{\text{mc}}(Y) \oplus L^2_{\text{mc}}(Y)^\perp$$

на максимально непрерывную часть и ее ортогональное дополнение.

Нам также понадобится функциональное пространство $\mathcal{A} := L^1(Y)^\omega$ аналитических векторов для левого регулярного представления группы G в $L^1(Y)$. Далее, положим

$$\mathcal{A}_{\text{mc}} := \mathcal{A} \cap L^2_{\text{mc}}(Y) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_{\text{mc}}^\perp := \mathcal{A} \cap L^2_{\text{mc}}(Y)^\perp.$$

Мы полагаем, что пространство $\mathcal{A}_{\text{mc}}$ плотно в $L^2(Y)_{\text{mc}}$, а $\mathcal{A}_{\text{mc}}^\perp$ плотно в подпространстве пространства $L^2(Y)_{\text{mc}}^\perp$, соответствующем представлениям основных

¹⁾Это означает, что G — связная вещественная полупростая группа Ли, а H — подгруппа неподвижных точек инволютивного автоморфизма σ группы G , для которого не существует σ -инвариантных нормальных подгрупп L группы G , таких, что $0 < \dim L < \dim G$.

серий, индуцированных с интегрируемых представлений соответствующих подгрупп Леви. Было бы интересно получить доказательства этого и аналогичных фактов в случае, когда $\mathcal{A}$ заменено другими функциональными пространствами.

Нас интересует открытое подмножество $\Xi = G/(M \cap H)N$ в пространстве вещественных орисфер общего положения, где MAN — минимальная $\sigma\theta$ -инвариантная¹⁾ параболическая подгруппа в G .

Обозначим через $C_0^\omega(\Xi)$ пространство аналитических функций на Ξ , обращающихся в нуль в бесконечности. В данной статье мы доказываем следующие утверждения:

- Отображение

$$\mathcal{R}: \mathcal{A} \rightarrow C_0^\omega(\Xi), \quad f \mapsto \left(gM_HN \mapsto \int_N f(gnH) dn \right),$$

определено. (Мы называем $\mathcal{R}$ (минимальным) орисферическим преобразованием.)

- $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}_{\text{mc}}^\perp} = 0$.
- $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}_{\text{mc}} \cap \mathcal{S}(Y)}$ инъективно²⁾.

Благодарности. Стимулом к получению этих результатов послужили обсуждения с С. Гиндикиным во время моего пребывания в Институте передовых исследований (IAS) в октябре 2006 г. Я рад возможности отметить вклад Гиндикина и гостеприимство института.

Я благодарен Хенрику Шлихткруллу, обнаружившему ошибку и несколько неточностей в более раннем варианте работы. Я также благодарен рецензенту, указавшему ошибку и внесшему полезные предложения сделать изложение в ряде мест более подробным.

§2. Вещественные симметрические пространства

2.1. Обозначения. В этом разделе мы вводим обозначения и напомним некоторые факты относительно вещественных симметрических пространств.

Пусть $G_{\mathbb{C}}$ — односвязная комплексная линейная алгебраическая группа, алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ которой полупроста. Зафиксируем вещественную форму G группы $G_{\mathbb{C}}$, т.е. G — множество неподвижных точек некоторого инволютивного антиголоморфного автоморфизма σ группы $G_{\mathbb{C}}$ и комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G совпадает с $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь τ — другой инволютивный автоморфизм группы $G_{\mathbb{C}}$, коммутирующий с σ . В частности, $\tau(G) = G$. Обозначим через $H_{\mathbb{C}} := G_{\mathbb{C}}^{\tau}$ и $H := G^{\tau}$ подгруппы неподвижных точек автоморфизма τ в группах $G_{\mathbb{C}}$ и G соответственно. Заметим, что группа $H_{\mathbb{C}}$ всегда связна, а группа H обычно нет; простейшим примером, иллюстрирующим эту ситуацию, является пара $(G_{\mathbb{C}}, G) = (\text{Sl}(2, \mathbb{C}), \text{Sl}(2, \mathbb{R}))$, для которой $(H_{\mathbb{C}}, H) = (\text{SO}(1, 1; \mathbb{C}), \text{SO}(1, 1; \mathbb{R}))$.

Исходя из групп G и H , образуем однородное пространство $Y = G/H$; мы называем Y *вещественным (полупростым) симметрическим пространством*. Через $y_0 = H$ мы будем обозначать стандартную базисную точку в Y . Мы используем обозначение $Y_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ для комплексификации пространства Y и,

¹⁾ θ — инволюция Картана, коммутирующая с σ .

²⁾ Здесь $\mathcal{S}(Y)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций.

когда это удобно, будем рассматривать Y как подпространство в $Y_{\mathbb{C}}$, вложенное при помощи отображения

$$Y \hookrightarrow Y_{\mathbb{C}}, \quad gH \mapsto gH_{\mathbb{C}}.$$

Теперь введем обозначения для инфинитезимальных объектов. Группы Ли будут всегда обозначаться прописными латинскими буквами, например G , H , K и т. д., а соответствующие алгебры Ли — строчными готическими буквами, например $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ и т. д. Автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, являющийся дифференциалом автоморфизма τ группы G , будем обозначать той же буквой τ . Обозначим через $\mathfrak{q}$ собственное подпространство оператора τ в $\mathfrak{g}$, отвечающее собственному значению -1 . Заметим, что $\mathfrak{q}$ как H -модуль естественным образом отождествляется с касательным пространством $T_{y_o}Y$ многообразия Y в базисной точке.

С этого момента мы будем предполагать, что пространство Y неприводимо, т. е. τ -инвариантными идеалами в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ являются только $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$. Практически это означает, что группа G проста, за исключением случая $G/H = (H \times H)/H \simeq H$.

Напомним, что максимальные компактные подгруппы $K \subset G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с инволюциями Картана $\theta: G \rightarrow G$. Соответствие задается формулой $K = G^{\theta}$. Образует риманово симметрическое пространство некомпактного типа $X = G/K$ и обозначим его стандартную базисную точку через $x_o = K$. Как и раньше, мы будем обозначать той же буквой θ автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, являющийся дифференциалом инволюции θ . Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ — собственное подпространство оператора θ , отвечающее собственному значению -1 . Отождествим K -модуль $\mathfrak{p}$ с касательным пространством $T_{x_o}X$.

Согласно Берже, можно (и мы будем) считать, что подгруппа K τ -инвариантна. Это означает, что подпространства $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ являются τ -инвариантными. Зафиксируем максимальное коммутативное подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}$. Заметим, что подпространство $\mathfrak{a}$ определено однозначно с точностью до сопряжения при помощи группы $H \cap K$, см. [13, лемма 7.1.5]. Положим $A = \exp(\mathfrak{a})$.

Далее, рассмотрим централизатор $Z_G(A)$ подгруппы A . Заметим, прежде всего, что группа $Z_G(A)$ редуکتивна и допускает естественное разложение

$$Z_G(A) = A \times M,$$

(см. [10, предложение 7.82(a)]). Алгебра Ли группы M — это $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a}^{\perp}$, где $\mathfrak{a}^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Картана–Киллинга κ на $\mathfrak{g}$. Пусть M_0 — связная компонента единицы группы M . Тогда $M = M_0 F$, где $F \subset M \cap K$ — элементарная конечная 2-группа (см. [10, предложение 7.82(d) и теорема 7.52]).

Замечание 2.1. Если $\mathfrak{a}$ — максимальное коммутативное подпространство в $\mathfrak{p}$, то, как следует из явного описания группы F в [10, теорема 7.52], $F \subset H$. Однако в общем случае τ -инвариантная группа F не содержится в H .

Обозначим через $\mathfrak{m}_{\text{ns}}$ некомпактную полупростую часть алгебры Ли $\mathfrak{m}$ и заметим, что

$$\mathfrak{m}_{\text{ns}} \subset \mathfrak{h} \tag{2.1}$$

(ср. [13, лемма 7.1.4]). Пусть $M_H = M \cap H = Z_H(A)$, и пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_h + \mathfrak{m}_q$ — разложение пространства $\mathfrak{m}$ в сумму собственных подпространств, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1 . Заметим, что $\mathfrak{m}_h$ является алгеброй Ли

группы M_H . Таким образом, из (2.1) следует, что $\mathfrak{m}_q \subset \mathfrak{k}$ и, значит, множество $M_q = \exp(\mathfrak{m}_q)$ компактно. Кроме того,

$$M/F = M_H M_q / F, \quad \text{причем } M_H \cap M_q \text{ дискретно.}$$

Рассмотрим корневое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$. Для любого $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ положим

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{a} \ [Y, X] = \alpha(Y)X\}$$

и

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}\}.$$

Известно, что Σ является (возможно, неприведенной) системой корней, см. [13, предложение 7.2.1]. Таким образом, мы можем выбрать систему положительных корней $\Sigma^+ \subset \Sigma$ и определить соответствующую нильпотентную подалгебру

$$\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Положим $N := \exp(\mathfrak{n})$. Заметим, что $\tau(\mathfrak{n}) = \theta(\mathfrak{n})$. Имеет место разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \tau(\mathfrak{n}).$$

Обратимся теперь к пространству флагов группы G , ассоциированному с A и Σ^+ . Положим $P_{\min} := MAN$ и заметим, что $P_{\min}$ является минимальной $\theta\tau$ -инвариантной параболической подгруппой в G .

Разложение пространства флагов $G/P_{\min}$ на открытые H -орбиты важно для теории H -сферических представлений группы G . Для того чтобы описать это разложение, нам сначала понадобятся некоторые факты о группах Вейля.

Пусть $\mathscr{W}$ — группа Вейля системы корней Σ . Она допускает аналитическое описание

$$\mathscr{W} = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$$

и содержит естественную подгруппу

$$\mathscr{W}_H := N_{H \cap K}(\mathfrak{a})/Z_{H \cap K}(\mathfrak{a}).$$

Зная $\mathscr{W}$ и $\mathscr{W}_H$, можно явно найти разложение группы G на открытые двойные классы смежности по $P_{\min} \times H$ (см. [12]):

$$G \doteq \coprod_{w \in \mathscr{W}/\mathscr{W}_H} P_{\min} w H, \quad (2.2)$$

где $\doteq$ означает равенство с точностью до конечного объединения $P_{\min} \times H$ -орбит строго меньшей размерности.

2.2. Орисферы. Данный раздел посвящен орисферам в симметрическом пространстве Y . *Орисферой (общего положения)* в Y мы будем называть орбиту максимальной размерности какой-либо подгруппы, сопряженной N (эта размерность равна $\dim N$). Совокупность всех орисфер мы будем обозначать через $\text{Nor}(Y)$. Отметим, что группа G естественным образом действует на $\text{Nor}(Y)$ слева.

Наша цель — показать, что $\text{Nor}(Y)$ является связным аналитическим многообразием. Для этого положим

$$G_h := \{x \in G \mid Nx \cdot y_o \in \text{Nor}(Y)\}$$

и отметим следующие очевидные факты:

- Множество G_h открыто, H -правоинвариантно и $P_{\min}$ -левоинвариантно.

- G_h содержит открытые двойные классы смежности $P_{\min}wH$ по $P_{\min} \times H$, где $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_H$, см. (2.2). В частности, G_h плотно в G .
- $\text{Nor}(Y) = \{gNx \cdot y_o \mid g \in G, x \in G_h\}$.
- (Инфинитезимальная характеристика) $G_h = \{x \in G \mid \text{Ad}(x^{-1})\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \{0\}\}$.

Замечание 2.2. Множество G_h , вообще говоря, больше, чем дизъюнктное объединение $\bigcup_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_H} P_{\min}wH$ (являющееся открытым плотным подмножеством в G). В частности, как мы покажем далее, оно связно. Например, если $G = \text{Sl}(2, \mathbb{R})$, $H = \text{SO}(1, 1; \mathbb{R})$, а $P_{\min}$ — подгруппа верхнетреугольных матриц с определителем единица, то подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{n}$ (обе одномерные) не могут быть сопряженными. Следовательно, в этом случае в силу инфинитезимальной характеристики $G_h = G$.

Далее, построим карты на $\text{Nor}(Y)$. Для этого введем G -многообразие $\Xi = G/M_H N$ и определим G -эквивариантное отображение

$$E: \Xi \rightarrow \text{Nor}(Y), \quad \xi = gM_H N \mapsto E(\xi) = gN \cdot y_o.$$

Можно проверить, как в [9, предложение 2.1], что E является вложением. Теперь будем сдвигать нашу карту при помощи элементов $x \in G_h$. Положим $L := MA$, $L^x = x^{-1}Lx$, $L_H^x := L^x \cap H$, $N^x := x^{-1}Nx$ и $\Xi_x := G/L_H^x N^x$. Тогда отображение

$$E_x: G/L_H^x N^x \rightarrow \text{Nor}(Y), \quad gL^x N^x \mapsto gN^x \cdot y_o,$$

является G -эквивариантным и инъективным. Отсюда непосредственно следует, что $(E_x, \Xi_x)_{x \in G_h}$ образуют аналитический атлас на $\text{Nor}(Y)$.

Лемма 2.3. $\text{Nor}(Y)$ связно.

Доказательство. Достаточно показать, что множество G_h связно. Мы знаем, что G_h — открытое и плотное $P_{\min} \times H$ -инвариантное подмножество в G . Число $P_{\min} \times H$ -орбит в G конечно, и все такие орбиты описаны явно, см. [12].

Так как G_h содержит все открытые орбиты, достаточно показать, что G_h содержит все орбиты коразмерности 1. Это, в свою очередь, следует из явного описания всех орбит в [12, теорема 3 (i)]: если $P_{\min}cH \subset G$ не открыта, то из [12] следует, что $\text{Ad}(c)\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$. В частности, если $P_{\min}cH$ имеет коразмерность 1, то $\text{Ad}(c)(\mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{h} = \text{Ad}(c)\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ и, следовательно, $\text{Ad}(c)\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Наша инфинитезимальная характеристика завершает доказательство. $\square$

В заключение мы обсудим полярные координаты на Ξ . Отображение

$$K/(M_H \cap K) \times A \rightarrow \Xi, \quad (k(M_H \cap K), a) \mapsto kaM_H N \quad (2.3)$$

является диффеоморфизмом. Мы будем часто рассматривать A как подпространство в Ξ , вложенное при помощи отображения

$$A \hookrightarrow \Xi, \quad a \mapsto aM_H N.$$

§3. Функциональные пространства и определение орисферического преобразования

Рассмотрим левое регулярное представление L группы G в пространстве $L^1(Y)$, т. е. для $g \in G$ и $f \in L^1(Y)$

$$[L(g)f](y) = f(g^{-1}y) \quad (y \in Y).$$

Пусть $\mathcal{A} := L^1(Y)^\omega$ — подпространство аналитических векторов для L . Условие $f \in \mathcal{A}$ означает, что $f \in C^\omega(Y)$ и существует такая окрестность U единицы в группе $G_{\mathbb{C}}$, что f голоморфно продолжается на подмножество

$$UG \cdot y_o \subset Y_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$$

(здесь мы считаем Y вложенным в $Y_{\mathbb{C}}$ при помощи отображения $gH \mapsto gH_{\mathbb{C}}$) так, что для любого компактного подмножества $C \subset U$

$$\sup_{c \in C} \|f(c \cdot)\|_{L^1(Y)} < \infty \quad (3.1)$$

(см. [7, предложение A.2.1]). Для окрестности U единицы в группе $G_{\mathbb{C}}$ обозначим через $\mathcal{A}_U$ пространство голоморфных функций на $UG \cdot y_o$, удовлетворяющих условию (3.1) для любого компактного подмножества $C \subset U$. Заметим, что $\mathcal{A}_U$ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $\mathcal{O}(U, L^1(Y))$, и, таким образом, оно является пространством Фреше. Кроме того,

$$\mathcal{A} = \bigcup_U \mathcal{A}_U,$$

с непрерывными вложениями

$$\mathcal{A}_U \rightarrow \mathcal{A}_V, \quad f \mapsto f|_{VG \cdot y_o},$$

для $V \subset U$. Таким образом, пространство $\mathcal{A}$ снабжается структурой локально выпуклого топологического векторного пространства.

Отметим, что представление L задает аналитическое действие группы G на пространстве $\mathcal{A}$.

3.1. Определение орисферического преобразования. Начнем с ключевой технической леммы.

Лемма 3.1. Пусть $f \in \mathcal{A}$. Тогда

- (i) $\sup_{\substack{a \in A \\ k \in K}} \int_N |f(kan \cdot y_o)| dn < \infty$;
- (ii) $\sup_{\substack{a \in A \\ k \in K}} a^{-2\rho} \int_N |f(kna \cdot y_o)| dn < \infty$.

Доказательство. (i) Пусть $f \in \mathcal{A}$. Пусть $B_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$ и $B_{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{n}$ — шары с центром в нуле. Положим

$$U_A := \exp(B_{\mathfrak{a}} + iB_{\mathfrak{a}}) \subset A_{\mathbb{C}}, \quad U_N := \exp(iB_{\mathfrak{n}}) \exp(B_{\mathfrak{n}}) \subset N_{\mathbb{C}}.$$

Для достаточно малых $B_{\mathfrak{a}}$ и $B_{\mathfrak{n}}$ функция f продолжается до голоморфной функции в окрестности подмножества $KU_N U_A G \cdot y_o$, такой, что

$$\sup_{c \in KU_N U_A} \|f(c \cdot)\|_{L^1(Y)} < \infty.$$

Чтобы упростить обозначения, предположим, что $M \subset H$. Это не ограничивает общности, так как дополнение $M_q F$ к M_H в M компактно в силу (2.1). Тогда отображение

$$NA \rightarrow Y, \quad na \mapsto na \cdot y_o,$$

является открытым вложением. В частности, $NA \cdot y_o \subset Y$ открыто. Отсюда следует, что подмножество $U_A U_N AN \cdot y_o \subset Y_{\mathbb{C}}$ открыто, и мы можем считать,

что $U_A U_N A N \subset A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}$ вкладывается в $Y_{\mathbb{C}}$. Выберем $k \in K$ и определим голоморфную функцию F на $U_N U_A A N$ формулой $F(z) := f(kz \cdot y_o)$. В частности, мы получаем константу $C > 0$, такую, что для любого $an \in AN$

$$|F(an)| \leq C \int_{U_N U_A} |F(n'a'an)| da' dn',$$

где da' и dn' — меры Хаара на $A_{\mathbb{C}}$ и $N_{\mathbb{C}}$ (оценка Бергмана). Пусть dy — мера Хаара на Y . Заметим, что ограничение меры dy на AN есть $da dn$, где da и dn — меры Хаара на A и N соответственно. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_N |F(an)| dn &\leq C \int_{U_N U_A} \int_N |F(n'a'an)| da' dn' dn \\ &\leq C \int_{U_N} \int_{B_a} \int_A \int_N |F(n' \exp(iX) a'an)| dn' dX da' dn \\ &\leq C \int_{U_N} \int_{B_a} \int_Y |f(kn' \exp(iX)y)| dn' dX dy \\ &\leq C \cdot \text{vol}(U_N) \cdot \text{vol}(B_a) \sup_{c \in KU_A U_N} \|f(c \cdot)\|_{L^1(Y)} < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение не зависит от $a \in A$ и $k \in K$. Это доказывает (i). Теперь (ii) получается из (i) заменой переменной:

$$\int_N |f(kna \cdot y_o)| dn = \int_N |f(kaa^{-1}na \cdot y_o)| dn = a^{2\rho} \int_N |f(kan \cdot y_o)| dn \quad \square$$

Для любой функции $f \in \mathcal{A}$ определим ее орисферическое преобразование $\mathcal{R}(f)$ на Ξ формулой

$$\mathcal{R}(f)(gM_H N) := \int_N f(gn \cdot y_o) dn.$$

По предыдущей лемме интеграл в этом определении абсолютно сходится.

Обозначим через $C_0^\omega(\Xi)$ пространство аналитических функций на Ξ , обращающихся в нуль в бесконечности. В свете (2.3) обращение функции F в нуль в бесконечности означает, что

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ a \in A}} \sup_{k \in K} |F(kaM_H N)| = 0.$$

Предложение 3.2. 1. Если $f \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{R}(f) \in C_0^\omega(\Xi)$.

2. Отображение $\mathcal{R}: \mathcal{A} \rightarrow L^1(\Xi)^\omega \subset C_0^\omega(\Xi)$ непрерывно.

Доказательство. (i) Как и раньше, можно без ограничения общности считать, что $M \subset H$, поскольку разность $M \setminus H$ компактна в силу (2.1). Покажем сначала, что $F := \mathcal{R}(f)|_A \in C_0^\omega$. Так как f лежит в $L^1(Y)$ и $dy|_{AN} = da dn$, то $F \in L^1(A)$. Кроме того, $F \in L^1(A)^\omega$, т.е. F является аналитическим вектором для регулярного представления группы A в пространстве $L^1(A)$. Таким образом, из стандартной леммы Соболева следует, что $F \in C_0^\omega(A)$.

Наконец, введение дополнительного параметра k , пробегающего компактную группу K , не создает дополнительных трудностей.

(ii) Это утверждение следует из (i) и последней (ключевой) оценки в доказательстве леммы 3.1(i). $\square$

Замечание 3.3. На самом деле можно определить орисферическое преобразование так, чтобы образ любой функции был определен на всем пространстве орисфер $\text{Nor}(Y)$. Вернемся к множеству $G_h \subset G$ и пространству параметров $\Xi_x = G/L_H^x N^x$ для любого элемента $x \in G_h$. Для любой функции $f \in \mathcal{A}$ можно положить

$$\mathcal{R}_x(f)(gL_H^x N^x) = \int_N f(gx^{-1}nx \cdot y_o) dn.$$

Полученная функция $\mathcal{R}_x(f)$, как мы видели выше, лежит в $C_0^\omega(\Xi_x) \cap L^1(\Xi_x)$. В итоге получаем корректно определенное G -эквивариантное отображение

$$\mathcal{R}: \mathcal{A} \rightarrow C^\omega(\text{Nor}(Y)).$$

§4. Ядро орисферического преобразования: дискретный спектр

В этом параграфе мы покажем, что пересечение дискретного спектра представления группы G в пространстве $L^2(Y)$ с $\mathcal{A}$ лежит в ядре отображения $\mathcal{R}$. На самом деле мы докажем более сильное утверждение: пересечение с $\mathcal{A}$ ортогонального дополнения максимально непрерывного спектра лежит в этом ядре.

Вернемся к минимальной $\theta\tau$ -инвариантной параболической подгруппе

$$P_{\min} = MAN.$$

В дальнейшем мы будем обозначать буквой Q $\theta\tau$ -инвариантную параболическую подгруппу, содержащую $P_{\min}$. Множество таких подгрупп конечно. Пусть

$$Q = M_Q A_Q N_Q$$

— стандартное разложение группы Q . Заметим, что

- $M_Q \supset M$,
- $A_Q \subset A$,
- $N_Q \subset N$.

Назовем две параболические подгруппы Q и Q' ассоциированными, если существует элемент $n \in N_K(A)$, такой, что $nA_Q n^{-1} = A_{Q'}$. Это задает отношение эквивалентности $\sim$ на параболических подгруппах. Соответствующие классы эквивалентности мы будем обозначать через $[Q]$. В случаях, когда из контекста ясно, о чем идет речь, мы будем опускать скобки и писать Q вместо $[Q]$.

Из теоремы Планшереля ([3], [5]) следует, что

$$L^2(Y) = \bigoplus_{Q \supset P_{\min}/\sim} L^2(Y)_Q$$

где $L^2(Y)_Q = L^2(Y)_{[Q]}$ обозначает часть, соответствующую представлениям, индуцированным с Q с помощью представлений дискретных серий групп $M_Q/M_Q \cap wHw^{-1}$, где w пробегает множество представителей элементов из $\mathcal{W}/\mathcal{W}_H$.

Так как $\mathcal{A} \subset C_0^\omega(Y)$, см. [11], то $\mathcal{A} \subset L^2(Y)$. Однако $\mathcal{A}$ может не быть плотным в $L^2(Y)$: оно не имеет компонент, лежащих в той части пространства $L^2(Y)_Q$, которая соответствует представлениям, индуцированным с неинтегрируемых представлений дискретной серии групп $M_Q/M_Q \cap wHw^{-1}$.

Пусть $\mathcal{A}_Q = L^2(Y)_Q \cap \mathcal{A}$. Для крайних вариантов выбора Q мы будем использовать специальные обозначения

$$L^2(Y)_{\text{disc}} := L^2(Y)_G \quad \text{и} \quad L^2(Y)_{\text{mc}} := L^2(Y)_{P_{\min}}$$

и говорить о *дискретной* и *максимально непрерывной* части квадратично интегрируемого спектра. Соответственно определим $\mathcal{A}_{\text{disc}}$ и $\mathcal{A}_{\text{mc}}$. Отметим следующее: мы полагаем, что

$$\mathcal{A}_{\text{mc}} \text{ плотно в } L^2(Y)_{\text{mc}}$$

(эвристическое соображение в пользу этого состоит в том, что $M/M \cap H$ компактно).

Теорема 4.1. $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{\text{disc}}) = \{0\}$.

Доказательство. Доказательство то же самое, что и в случае группового пространства (хорошее изложение см. в [14, теорема 7.2.2])

Пусть $f \in \mathcal{A}_{\text{disc}}$. Надо проверить, что $\mathcal{R}(f) = 0$. Так как $\mathcal{R}$ непрерывно (предложение 3.2), при помощи стандартных соображений плотности можно свести задачу к случаю, когда функция f лежит в каком-то одном представлении дискретной серии и является K -конечным вектором. Пусть

$$V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})f$$

— соответствующий модуль Хариш-Чандры. Положим $T := [\mathcal{R}|_V]|_A$. Тогда T пропускается через модуль ЖКаке $j(V) = V/\mathfrak{n}V$. Напомним, что $j(V)$ является допустимым конечно порожденным $(M, \mathfrak{a})$ -модулем, а значит,

$$\dim \mathcal{U}(\mathfrak{a})T(f) < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$T(f)(a) = \sum_{\mu} a^{\mu} p_{\mu}(\log a) \quad (a \in A),$$

где p_{μ} — многочлен, а μ пробегает конечное подмножество в $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (см. [14, 8.A.2.10]). Так как $T(f) \in C_0^{\omega}(A)$, мы заключаем, что $T(f) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{R}(f) = 0$ в силу K -финитности функции f . $\square$

В качестве следствия предыдущей теоремы получаем основной результат этого раздела.

Теорема 4.2. Пусть $Q \supsetneq P_{\min}$. Тогда $\mathcal{R}(\mathcal{A}_Q) = \{0\}$.

Доказательство. Если $Q = G$, то утверждение является частным случаем предыдущей теоремы. Мы сведем общий случай к этому. Пусть $P_{\min} \subsetneq Q \subsetneq G$. Положим $\Xi_Q = G/(M_Q \cap H)N_Q$ и, как и в (2.3), получим диффеоморфную параметризацию $[K \times_{M_Q \cap K} M_Q/M_Q \cap H] \times A \rightarrow \Xi_Q$.

Так же как и в разд. 3.1, заключаем, что отображение

$$\mathcal{R}_Q: \mathcal{A} \rightarrow L^1(\Xi_Q)^{\omega}, \quad f \mapsto \left(g(M_Q \cap H)N_Q \mapsto \int_{N_Q} f(gnH) dn \right),$$

определено, G -эquivариантно и непрерывно.

Далее, заметим, что

$$N = N_Q \rtimes N^Q,$$

где $\{1\} \neq N^Q \subset M_Q$. Как и выше, отображение

$$\mathcal{R}^Q: L^1(\Xi_Q)^{\omega} \rightarrow L^1(\Xi)^{\omega}, \quad f \mapsto \left(gM_H N \mapsto \int_{N^Q} f(gn(M_Q \cap H)N_Q) dn \right),$$

определено, equivариантно и непрерывно.

Теперь заметим, что

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^Q \circ \mathcal{R}_Q. \quad (4.1)$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{A}_Q$. Без ограничения общности можно считать, что f лежит в волновом пакете, индуцированном с некоторого представления σ дискретной серии, реализующегося в $L^2(M_Q/M_Q \cap H)$.

Заметим, что $M_Q/M_Q \cap H$ естественным образом вкладывается в пространство Ξ_Q , причем ограничения функций из $L^1(\Xi_Q)^\omega$ на $M_Q/M_Q \cap H$ остаются интегрируемыми. Следовательно, ограничение функции $F := \mathcal{R}_Q(f)$ на $M_Q/M_Q \cap H$ также интегрируемо.

Докажем, что $F|_{M_Q/M_Q \cap H}$ лежит в σ -изотипическом классе. Сначала заметим, что $L^1(\Xi_Q)^\omega \subset L^2(\Xi_Q)$. В силу поэтажного индуцирования

$$L^2(\Xi_Q) = \text{Ind}_{(M_Q \cap H)N_Q}^G \text{triv} \simeq \text{Ind}_{M_Q N_Q}^G L^2(M_Q/M_Q \cap H).$$

Таким образом, если $L^2(M_Q/M_Q \cap H) = \int_{\widehat{M}_Q}^\oplus m_\pi \mathcal{H}_\pi d\mu(\pi)$ — разложения Планшереля, то имеет место изоморфизм G -модулей

$$L^2(\Xi_Q) \simeq \int_{\widehat{M}_Q}^\oplus m_\pi \text{Ind}_{M_Q N_Q}^G \mathcal{H}_\pi d\mu(\pi).$$

Теперь заметим, что группа A_Q действует справа на Ξ_Q , и это действие коммутирует с действием группы G (в следующем параграфе будет подробно рассмотрен случай $Q = P_{\min}$). Это дает дальнейшее разложение левого регулярного представления L_Q группы G в пространстве $L^2(\Xi_Q)$:

$$L_Q \simeq \int_{\widehat{M}_Q}^\oplus m_\pi \int_{ia_Q^*}^\oplus \text{Ind}_{M_Q A_Q N_Q}^G [\pi \otimes (-\lambda - \rho_Q) \otimes 1] d\lambda d\mu(\pi).$$

Так как R_Q является G -эквивариантным, мы можем заключить, что $R_Q(f) \in \text{Ind}_{M_Q N_Q}^G \sigma$.

Из нашего утверждения и предыдущей теоремы вытекает, что

$$\mathcal{R}^Q(F)|_{M_Q/M_H N_Q} = 0.$$

Пользуясь эквивариантностью отображений $\mathcal{R}_Q$ и $\mathcal{R}^Q$, мы можем заменить функцию f (а значит, и F) любым ее сдвигом при помощи группы G . Следовательно, $\mathcal{R}^Q(F) = 0$, что и требовалось. $\square$

§5. Ограничение орисферического преобразования на максимально непрерывный спектр

Цель этого параграфа — показать, что $\mathcal{R}$ точно на максимально непрерывном спектре.

Напомним некоторые факты о спектре представления группы G в $L^2(\Xi)$ и максимально непрерывном спектре на Y . Мы начнем с «орициклической картины». На однородном пространстве Ξ имеется G -инвариантная мера. Таким образом, левые сдвиги аргумента функции на Ξ при помощи группы G задают унитарное представление, скажем L , группы G в пространстве $L^2(\Xi)$; это представление определяется формулой

$$(L(g)f)(\xi) = f(g^{-1} \cdot \xi) \quad (f \in L^2(\Xi), g \in G, \xi \in \Xi).$$

Важно отметить, что действие группы G на пространстве Ξ допускает коммутирующее с ним правое действие группы A

$$\xi \cdot a = gaMN \quad (\xi = gM_H N \in \Xi, a \in A),$$

поскольку A нормализует $M_H N$. Поэтому формула

$$(R(a)f)(\xi) = a^\rho \cdot f(\xi \cdot a) \quad (f \in L^2(\Xi), a \in A, \xi \in \Xi)$$

задает унитарное представление $(R, L^2(\Xi))$ группы A , коммутирующее с представлением L группы G . Соответственно мы определяем преобразование Фурье по группе A для подходящей функции f на Ξ формулой

$$\mathcal{F}_A(f)(\lambda, gM_H N) := \int_A [R(a)f](gM_H N) a^\lambda da \quad (\lambda \in i\mathfrak{a}^*).$$

Для любого $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ положим

$$L^2(\Xi)_\lambda := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ измерима,} \right. \\ \left. f(\cdot man) = a^{-\rho-\lambda} f(\cdot) \quad \forall man \in M_H AN, \int_K |f(k)|^2 dk < \infty \right\}.$$

Аналогично, обозначим через $C^\infty(\Xi)_\lambda$ пространство гладких элементов из $L^2(\Xi)_\lambda$. Разложение пространства $L^2(\Xi)$ задается следующим образом:

$$L^2(\Xi) \simeq \int_{i\mathfrak{a}^*}^\oplus L^2(\Xi)_\lambda d\lambda,$$

где изоморфизм определяется преобразованием Фурье по группе A

$$f \mapsto (\lambda \mapsto \mathcal{F}_A(f)(\lambda, \cdot)).$$

Напомним теперь разложение Планшереля для максимально непрерывного спектра (см. [1]). Предварительно сделаем несколько общих замечаний. Пусть π — представление группы L в топологическом пространстве V . Двойственное представление в (сильном) двойственном топологическом пространстве V^* мы будем обозначать через π^* .

Пусть $\sigma \in \widehat{M/M_H}$ и V_σ — пространство унитарного представления σ .

Для любого $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ положим

$$\mathcal{H}_{\sigma, \lambda} := \left\{ f : G \rightarrow V_\sigma \mid f \text{ измерима,} \right. \\ \left. f(\cdot man) = a^{-\rho-\lambda} \sigma(m)^{-1} f(\cdot) \quad \forall man \in P_{\min}, \int_K \langle f(k), f(k) \rangle_\sigma dk < \infty \right\}.$$

Группа G действует в пространстве $\mathcal{H}_{\sigma, \lambda}$ левыми сдвигами. Полученное таким образом представление в гильбертовом пространстве обозначим через $\pi_{\sigma, \lambda}$.

Замечание 5.1. Представления группы G в $\mathcal{H}_{\sigma, \lambda}$ и в $L^2(\Xi)_\lambda$ связаны следующим образом. Если μ_σ — неподвижный относительно действия группы M_H элемент из V_σ^* (единственный с точностью до пропорциональности), то отображение

$$\mathcal{H}_{\sigma, \lambda} \rightarrow L^2(\Xi)_\lambda, \quad f \mapsto \mu_\sigma(f),$$

G -эквивариантно и инъективно. Это отображение можно сделать изометрией с помощью подходящей нормировки элемента μ_σ . Используя поэтажное индуцирование, получаем отождествление

$$\widehat{\bigoplus_{\sigma \in M/M_H} \mathcal{H}_{\sigma, \lambda}} = L^2(\Xi)_\lambda,$$

являющееся изометрией.

Иногда полезно реализовывать пространство $\mathcal{H}_{\sigma, \lambda}$ как пространство V_σ -значных функций на $\overline{N} := \theta(N)$; в этом случае мы говорим о некомпактной реализации. Определим весовую функцию на $\overline{N}$ формулой

$$w_\lambda(\overline{n}) = a^{2 \operatorname{Re} \lambda},$$

где элемент $a \in A$ определяется условием $\overline{n} \in KaN$. Тогда отображение

$$\mathcal{H}_{\sigma, \lambda} \rightarrow L^2(\overline{N}, w_\lambda(\overline{n}) d\overline{n}) \otimes V_\sigma, \quad f \mapsto f|_{\overline{N}},$$

является изометрическим изоморфизмом.

Отметим следующие факты:

- Представление $\pi_{\sigma, \lambda}$ неприводимо при значениях λ общего положения.
- Представление $\pi_{\sigma, \lambda}$ унитарно для $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$.
- Двойственное представление к $\pi_{\sigma, \lambda}$ канонически изоморфно представлению $\pi_{\sigma^*, -\lambda}$, причем спаривание задается формулой

$$\langle f, g \rangle := \int_{\overline{N}} (f(\overline{n}), g(\overline{n}))_\sigma d\overline{n},$$

где $f \in \mathcal{H}_{\sigma, \lambda}$, $g \in \mathcal{H}_{\sigma^*, -\lambda}$, а $(\cdot, \cdot)_\sigma$ — естественное спаривание между V_σ и V_σ^* .

Далее, напомним описание H -неподвижных элементов в пространстве обобщенных функций $(\mathcal{H}_{\sigma, \lambda}^\infty)^*$. Прежде всего, для любого $w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}$ положим

$$V^*(\sigma, w) := (V_\sigma^*)^{w^{-1} M_H w}.$$

Заметим, что это пространство одномерно. Пусть

$$V^*(\sigma) := \bigoplus_{w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}} V^*(\sigma, w) \simeq \mathbb{C}^{|\mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}|}.$$

Для любого $w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}$ рассмотрим ортогональную проекцию

$$V^*(\sigma) \rightarrow V^*(\sigma, w), \quad \eta \mapsto \eta_w.$$

Далее мы будем писать $\operatorname{Re} \lambda >> 0$, если

$$(\operatorname{Re} \lambda - \rho)(\alpha^\vee) > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+.$$

Таким образом, для $\operatorname{Re} \lambda >> 0$ формула

$$j(\sigma^*, -\lambda)(\eta)(g) = \begin{cases} a^{-\rho+\lambda} \sigma^*(m^{-1}) \eta_w, & \text{если } g = h w m a n \in H w M A N, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

определяет непрерывный H -неподвижный элемент в $\mathcal{H}_{\sigma^*, -\lambda}$. Можно мероморфно продолжить элемент $j(\sigma^*, \cdot)$ по переменной λ и получить соотношение

$$j(\sigma^*, -\lambda)(V^*(\sigma)) = ((\mathcal{H}_{\sigma, \lambda}^\infty)^*)^H$$

для значений λ общего положения. Для больших λ обратное отображение к j задается формулой

$$((\mathcal{H}_{\sigma,\lambda}^\infty)^*)^H \ni \nu \mapsto (\nu(w))_{w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}} \in V^*(\sigma).$$

Для любого гладкого вектора $v \in \mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ и $\eta \in V(\sigma^*)$, положив

$$F_{v,\eta}(gH) = \langle \pi_{\sigma,\lambda}(g^{-1})v, j(\sigma^*, -\lambda)(\eta) \rangle,$$

мы получаем гладкую функцию на $Y = G/H$. Тогда по теореме Планшереля для $L^2(Y)_{\text{мс}}$, см., например, [1], существует мероморфное отображение

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \text{Gl}(V(\sigma^*)), \quad \lambda \mapsto C(\sigma, \lambda),$$

такое, что отображение

$$\Phi: \widehat{\bigoplus_{\sigma \in \widehat{M/M_H}} \int_{i\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{\sigma,\lambda} \otimes V^*(\sigma) d\lambda} \rightarrow L^2(Y)_{\text{мс}},$$

определенное для гладких векторов формулой

$$\sum_{\sigma} (v_{\sigma,\lambda} \otimes \eta)_{\lambda} \mapsto \left(gH \mapsto \sum_{\sigma} \int_{i\mathfrak{a}_+^*} F_{v_{\sigma,\lambda}, j^0(\sigma^*, -\lambda)(\eta)}(gH) d\lambda \right),$$

где $j^0(\sigma, \lambda) := j(\sigma, \lambda) \circ C(\sigma, \lambda)$, продолжается до унитарной G -эквивалентности. Здесь $\mathfrak{a}_+^*$ обозначает камеру Вейля в $\mathfrak{a}^*$.

Замечание 5.2. Пусть $\mathcal{W} = \mathcal{W}_H$ (это так в групповом случае). Тогда пространство $V(\sigma^*)$ одномерно, и с помощью замечания 5.1 мы получаем следующий изоморфизм:

$$\widehat{\bigoplus_{\sigma \in \widehat{M/M_H}} \int_{i\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{\sigma,\lambda} \otimes V(\sigma^*) d\lambda} \simeq \int_{i\mathfrak{a}_+^*} L^2(\Xi)_{\lambda} d\lambda.$$

Таким образом, можно считать, что Φ определено на подпространстве пространства $L^2(\Xi)$.

Обратное к отображению Φ есть максимально непрерывное преобразование Фурье $\mathcal{F}$ (или $\mathcal{F}_{\text{мс}}$). Для $f \in L^2(Y)_{\text{мс}} \cap L^1(Y)$ преобразование Фурье задается формулой

$$\mathcal{F}(f)(\sigma, \lambda, \eta)(g) := \int_Y f(y) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(y^{-1}g) dy,$$

где $\sigma \in \widehat{M/M_H}$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ и $\eta \in (V^*(\sigma))^* \simeq V(\sigma^*)$. Нам еще нужно установить связь между преобразованием Фурье и орисферическим преобразованием.

5.1. Связь между преобразованием Фурье и орисферическим преобразованием. Теперь мы можем описать, как связаны отображения $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathcal{F}_A^w$ преобразование $\mathcal{F}_A$ на $\Xi_w = G/M_H N^w$. Пусть $f \in C_c^\infty(Y)$.

Развернем определения:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\sigma, \lambda, \eta)(g) &= \int_Y f(gy) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(y^{-1}) dy \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{W} / \mathcal{W}_H} \int_{ANM/wM_Hw^{-1}} f(ganmw \cdot y_o) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(w^{-1}m^{-1}a^{-1}n^{-1}) da dn dm \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{W} / \mathcal{W}_H} \int_{AM/wM_Hw^{-1}} \mathcal{R}_w(f)(gtawM_HN^w) a^{\rho+\lambda} j^0(\sigma, \lambda)(w^{-1}m^{-1}) da dm \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{W} / \mathcal{W}_H} \int_{M/wM_Hw^{-1}} [\mathcal{F}_A^w \circ \mathcal{R}_w](f)(w^{-1}\lambda, gtawM_HN^w) j^0(\sigma, \lambda)(w^{-1}m^{-1}) dm \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{W} / \mathcal{W}_H} \int_{M/wM_Hw^{-1}} [\mathcal{F}_A^w \circ \mathcal{R}_w](f)(w^{-1}\lambda, gtawM_HN^w) \sigma(m) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(w^{-1}) dm.
 \end{aligned}$$

Отметим, что $j^0(\sigma, \lambda)(\eta)$ является обобщенной функцией и априори значение $j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(w^{-1})$ имеет смысл, только когда $\operatorname{Re} \lambda$ достаточно мало. Эта проблема решается мероморфным продолжением функции $j(\sigma, \lambda)$. Это продолжение на самом деле можно получить с помощью итеративной процедуры, начинающей с малых значений $\operatorname{Re} \lambda$ и дающей большие значения с помощью некоторого дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами [4]. Это позволяет заменить пространство $C_c^\infty(Y)$ пространством Шварца $\mathcal{S}(Y)$ быстро убывающих функций (см. [2, разд. 12], его не надо путать с хариш-чандровским пространством Шварца $\mathcal{C}(Y)$, о котором пойдет речь ниже в этом параграфе). Таким образом, мы установили следующий факт.

Лемма 5.3. Пусть $f \in \mathcal{S}(Y)$. Тогда для любых $\sigma \in \widehat{M/M_H}$, $\lambda \in ia_+^*$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\sigma, \lambda, \eta)(g) \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{W} / \mathcal{W}_H} \int_{M/wM_Hw^{-1}} [\mathcal{F}_A^w \circ \mathcal{R}_w](f)(w^{-1}\lambda, gtawM_HN^w) \sigma(m) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(w^{-1}) dm.
 \end{aligned}$$

Замечание 5.4. Особенно интересен частный случай, когда $\mathcal{W} = \mathcal{W}_H$. В этом случае приведенная выше формула упрощается следующим образом:

$$\mathcal{F}(f)(\sigma, \lambda, \eta)(g) = \int_{M/M_H} [\mathcal{F}_A \circ \mathcal{R}](f)(\lambda, gtM_HN) \sigma(m) j^0(\sigma, \lambda)(\eta)(1) dm.$$

Теорема 5.5. Ограничение отображения $\mathcal{R}$ на $\mathcal{A}_{\text{мс}} \cap \mathcal{S}(Y)$ инъективно.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{A}_{\text{мс}} \cap \mathcal{S}(Y)$. Предположим, что $\mathcal{R}(f) = 0$. Из замечания 3.3 заключаем, что $\mathcal{R}_w(f) = 0$ для всех w . Значит, из последней леммы следует, что $\mathcal{F}(f) = 0$. Так как преобразование Фурье инъективно на пространстве $\mathcal{S}(Y)$, см. [2, следствие 12.7], то $f = 0$. $\square$

Замечание 5.6. Очень похоже, что подпространство $\mathcal{S}(Y) \cap \mathcal{A}_{\text{мс}}$ плотно в $\mathcal{A}_{\text{мс}}$, но на данный момент я не могу указать работы, где бы это было доказано. Если бы это было установлено, то из последней теоремы следовало бы, что ограничение преобразования $\mathcal{R}$ на пространство $\mathcal{A}_{\text{мс}}$ инъективно.

5.2. Заключительные замечания.

5.2.1. *Групповой случай.* Полезно посмотреть, что дают результаты этой работы для случая полупростой группы G , рассматриваемой как симметрическое пространство, т. е.

$$G \simeq (G \times G)/\Delta(G),$$

где $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\}$ — диагональная подгруппа. Пусть $P = MAN$ — минимальная параболическая подгруппа в G , а $\bar{P} = M\bar{A}\bar{N}$ — ее стандартная противоположная подгруппа (т. е. ее образ при инволюции Картана). Тогда пространство параметров орисфер есть

$$\Xi = (G \times G)/\Delta(MA)(N \times \bar{N}).$$

Наше функциональное пространство $\mathcal{A}$ в этом случае — это пространство аналитических векторов для лево-праворегулярного представления группы $G \times G$ в пространстве $L^1(G)$. Таким образом, для $f \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{R}(f)((g, h)\Delta(MA)(N \times \bar{N})) = \int_{N \times \bar{N}} f(gn\bar{n}h^{-1}) dn d\bar{n}.$$

5.2.2. *Следующие шаги.* Возвращаясь к более общей ситуации $Y = G/H$, рассмотрим двойное расслоение

$$\begin{array}{ccc} & G/M_H & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Xi & & Y \end{array} \quad (5.1)$$

Преобразованию $\mathcal{R}$ соответствует двойственное преобразование $\mathcal{R}^\vee$ между подходящими функциональными пространствами $\mathcal{F}(\Xi)$ и $\mathcal{F}(Y)$ на Ξ и Y :

$$\mathcal{F}(\Xi) \rightarrow \mathcal{F}(Y), \quad \mathcal{R}^\vee(\phi)(gH) = \int_{H/M_H} \phi(gh \cdot M_H N) d(hM_H).$$

Для $f \in \mathcal{A}_{\text{мс}}$ интересно поставить вопрос о существовании псевдодифференциального оператора D , такого, что $f = \mathcal{R}^\vee(D\mathcal{R}(f))$. Случай $Y = \text{Sl}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(1, 1)$ рассмотрен в [8], где показано, что такой псевдодифференциальный оператор D существует. Когда же Y является группой, можно ожидать, что D будет на самом деле дифференциальным оператором.

5.2.3. *Орисферическое преобразование на пространствах Шварца.* Можно поставить следующий вопрос: в какой мере можно определить преобразование $\mathcal{R}$ на пространстве Шварца пространства Y . Для некоторых классов пространств Y это кажется возможным, и ниже мы остановимся на этом подробнее. Напомним сначала определение пространства Шварца.

Воспользуемся разложением

$$G = KAH, \quad (5.2)$$

часто называемым полярным разложением группы G (относительно H и K). Соответственно любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = k_g a_g h_g$, где $k_g \in K$ и т.д. Важно отметить, что элемент a_g определен однозначно с точностью до действия группы $\mathcal{W}_H$. Следовательно, определение

$$\|gH\| := |\log a_g| \quad (g \in G)$$

корректно, если $|\cdot|$ есть норма, определяемая формой Киллинга на $\mathfrak{p}$. Существует иное, во многих случаях полезное описание нормы $\|\cdot\|$:

$$\|y\| = \frac{1}{4} |\log[y\tau(y)^{-1}\theta(y\tau(y)^{-1})^{-1}]| \quad (y \in Y). \quad (5.3)$$

Для $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ обозначим через L_u соответствующий дифференциальный оператор на Y , т. е. для $u \in \mathfrak{g}$

$$(L_u f)(y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tu)y)$$

для любой функции f , дифференцируемой в точке y . Теперь можно определить хариш-чандровское пространство Шварца пространства Y следующим образом:

$$\mathcal{C}(Y) = \left\{ f \in C^\infty(Y) \mid \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{y \in Y} \Theta(y)(1 + \|y\|)^n |(L_u f)(y)| < \infty \right\},$$

где $\Theta(gH) = \phi_0(g\tau(g)^{-1})^{-1/2}$ и ϕ_0 есть базисная сферическая функция Хариш-Чандры.

Легко видеть, что пространство $\mathcal{C}(Y)$ с очевидным семейством определяющих полунорм является пространством Фреше. Кроме того, оно G -инвариантно и группа G действует на нем гладко. Заметим, что $\mathcal{C}(Y) \subset L^2(Y)$ — плотное подпространство.

Пусть $BC^\infty(\Xi)$ — пространство ограниченных гладких функций на Ξ .

В контексте определения преобразования $\mathcal{R}$ на $\mathcal{C}(Y)$ мы рассмотрим следующий основной пример.

Лемма 5.7. Пусть $Y = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(1, 1)$ и $f \in \mathcal{C}(Y)$. Тогда

- (i) интеграл $\int_N f(nH) dn$ абсолютно сходится;
- (ii) формула

$$gM_H N \mapsto \int_N f(gnH) dn$$

задает функцию из $BC^\infty(\Xi)$.

Доказательство. Пусть A — диагональная подгруппа в G (с положительными диагональными элементами) и $N = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Для $x \in \mathbb{R}$ и $n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ нам нужно определить $a_x \in A$ так, чтобы $n_x \in Ka_x H$. Начнем, используя (5.3):

$$z_x := n_x \tau(n_x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$y_x := z_x \theta(z_x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - x^2 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - x^2)^2 + x^2 & * \\ * & 1 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Для больших значений $|x|$ имеем $\log |y_x| = |\log y_x|$. Далее, с точностью до несущественной константы,

$$|y_x| = [\mathrm{tr}(y_x y_x)]^{1/2} \geq \frac{1}{2} [(1 - x^2)^2 + x^2 + 1 + x^2] \geq \frac{1}{2} [x^4 + 1].$$

Значит, для больших значений $|x|$

$$\|n_x\| \geq \frac{1}{4} \log(x^4/2 + 1/2)$$

Из оценок Хариш-Чандры для ϕ_0 и нашего вычисления z_x получаем, что $\Theta(n_x) \geq |x|$. Таким образом, мы установили, что для $f \in \mathcal{C}(Y)$ функция $x \mapsto |f(n_x H)|$ растет медленнее, чем $1/(|x| \cdot |\log x|^N)$ для любого заданного $N > 0$ и большого $|x|$. Отсюда следует (i).

(ii) Пусть $f \in \mathcal{C}(Y)$. Положим $F := \mathcal{R}(f)$. Из доказательства утверждения (i) мы знаем, что функция F гладкая. Остается убедиться, что она ограничена. Из разложения $G = KAH$ выводим, что достаточно проверить ограниченность функции $F|_A$. Мы проверим это прямым вычислением. Для $t > 0$ положим

$$a_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a_t n_x = \begin{pmatrix} t & tx \\ 0 & 1/t \end{pmatrix},$$

а значит,

$$z_{t,x} := a_t n_x \tau(a_t n_x)^{-1} = \begin{pmatrix} t & tx \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ -tx & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2(1-x^2) & -x \\ x & 1/t^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$y_{t,x} = z_{t,x} \theta(z_{t,x})^{-1} = \begin{pmatrix} t^4(1-x^2)^2 + x^2 & * \\ * & 1/t^4 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Для $t \geq 1$ получаем

$$\|a_t n_x\| \gtrsim \log \left(\begin{cases} c_1 t^4 & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ c_2 t^4 x^4 - c_3 & \text{при } |x| \geq 1/2 \end{cases} \right),$$

а для $|t| < 1$

$$\|a_t n_x\| \geq \log |x|.$$

Отсюда следует утверждение (ii). $\square$

Этот пример в некотором роде особый. Можно ожидать, что орисферическое преобразование на $\mathcal{C}(Y)$ сходится тогда и только тогда, когда вещественные ранги группы G и пространства Y совпадают.

Для случая группового пространства несложно показать, что для общей функции $f \in \mathcal{C}(G)$ интеграл, задающий $\mathcal{R}(f)$, расходится. Для его сходимости необходима интегрируемость функции f .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. P. van den Ban, H. Schlichtkrull, *The most continuous part of the Plancherel decomposition for a reductive symmetric space*, Ann. of Math., **145**:2 (1997), 267–364.
- [2] E. P. van den Ban, H. Schlichtkrull, *Fourier inversion on a reductive symmetric space*, Acta Math., **182**:1 (1999), 25–85.
- [3] E. P. van den Ban, H. Schlichtkrull, *The Plancherel decomposition for a reductive symmetric space. II. Representation theory*, Invent. Math., **161**:3 (2005), 567–628.

- [4] И. Н. Бернштейн, *Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру*, Функц. анализ и его прил., **6**:2 (1972), 26–40.
- [5] P. Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math. (2), **147**:2 (1998), 417–452.
- [6] И. М. Гельфанд, И. М. Граев, *Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии*, Труды ММО, **8** (1959), 321–390.
- [7] S. Gindikin, B. Krötz, G. Ólafsson, *Holomorphic H -spherical distribution vectors in principal series representations*, Invent. Math., **158**:3 (2004), 643–682.
- [8] S. Gindikin, B. Krötz, G. Ólafsson, *Holomorphic horospherical transform on non-compactly causal spaces*, Int. Math. Res. Not., 2006, Art. ID 76857.
- [9] S. Gindikin, B. Krötz, G. Ólafsson, *Horospherical model for holomorphic discrete series and horospherical Cauchy transform*, Compos. Math., **142**:4 (2006), 983–1008.
- [10] A. Knapp, *Lie Groups beyond an Introduction*, 2nd edition, Birkhäuser, Boston, MA, 2002.
- [11] B. Krötz, H. Schlichtkrull, *On function spaces on symmetric spaces*, <http://arxiv.org/abs/0711.1087>.
- [12] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan, **31**:2 (1979), 331–357.
- [13] H. Schlichtkrull, *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Progress in Math., vol. 49, Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- [14] N. Wallach, *Real Reductive Groups I*, Academic Press, Boston, MA, 1988.

Max-Planck-Institut für Mathematik
e-mail: kroetz@mpim-bonn.mpg.de

Поступило в редакцию
14 мая 2007 г.