Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Пэн Цзигэнь, Сун Сюэли, Чжан Сянцин, Анализ устойчивости динамики возрастной структуры нетрудоспособного населения, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:49:01

Пространство $\mathcal{B}$ является сопряженным к банаховому пространству $\mathcal{T}_1$, так как каждый оператор B из $\mathcal{B}$ задает функционал $\Phi_B(\cdot) = \text{tr}(B \cdot)$ на $\mathcal{T}_1$ (см. [9]). Поэтому A_β -бимодульная структура на $\mathcal{T}_1$ естественным образом распространяется на $\mathcal{B}$, превращая $\mathcal{B}$ в A_β -бимодуль в $*$ -слабой топологии.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Банахово пространство $P\mathcal{B}P^\perp$, снабженное слабой топологией, есть A_β -бимодуль. Отображение $f \mapsto D_f$, $f \in A$, есть нетривиальное дифференцирование.*

Авторы благодарят Р. С. Исмагилова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. C. Buck, Michigan Math. J., **5**:2 (1958), 95–104. [2] I. Glikhsberg, Proc. Amer. Math. Soc., **14**:2 (1963), 329–333. [3] М. В. Шейнберг, УМН, **32**:5 (1977) (1977), 203–204. [4] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд. Моск. ун-та, 1986. [5] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973. [6] R. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 127, 1972. [7] М. В. Шейнберг, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1971, № 3, 53–58. [8] М. В. Шейнберг, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1972, № 4, 39–45. [9] М. Рид, Б. Саймон, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977. [10] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975. [11] R. Giles, Trans. Amer. Math. Soc., **161** (1971), 467–474. [12] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982.

Ереванский государственный университет
e-mail: m_karakhanyan@yahoo.com

Казанский государственный энергетический университет
e-mail: tamarakhrkva@rambler.ru

Поступило в редакцию
28 марта 2007 г.

В переработанном виде
9 июля 2007 г.

УДК 517.983.27, 517.986.7

Анализ устойчивости динамики возрастной структуры нетрудоспособного населения*

© 2009. Пэн Цзигэнь, Сун Сюэли, Чжан Сянцинъ

Пусть X — вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Если $v \in X^*$, то можно показать, что бинарное отношение $\leqslant_v$, определенное на X формулой

$$x \leqslant_v y \iff \|x - y\| \leqslant v(y) - v(x), \quad (1)$$

есть отношение частичного порядка, так что X оказывается упорядоченным банаховым пространством с конусом положительных элементов

$$X_v^+ := \{z \in X : \|z\| \leqslant v(z)\}.$$

*Работа поддержана ГФЕН (контракт №10531030) и частично Программой для выдающихся университетских талантов Нового века.

Следующее предложение показывает, что любое упорядоченное банахово пространство с базой¹⁾ подчинено отношению частичного порядка такого вида.

Предложение 1. *Упорядоченное банахово пространство X с конусом положительных элементов X^+ обладает базой тогда и только тогда, когда существует такой элемент $v \in X^*$, что $X^+ \subseteq \{x \in X : \|x\| \leq v(x)\}$.*

Из предложения 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — положительная полугруппа класса C_0 в упорядоченном банаховом пространстве X с базой K . Определим элемент $v \in X^*$ в соответствии с предложением 1. Если $v \in D(A^*)$ и $A^*v \leq \lambda v$ для некоторого вещественного λ , то*

$$\|T(t)x\| \leq \|v\| \cdot e^{\lambda t} \cdot \|x\| \quad \forall x \in X^+, t \geq 0. \quad (2)$$

Таким образом, если конус X^+ является воспроизводящим, то существует такая постоянная $\alpha \geq 1$, что $\|T(t)\| \leq \alpha \|v\| \cdot e^{\lambda t}$ при всех $t \geq 0$.

В этой заметке мы пользуемся терминологией работы [1], а за подробной информацией о положительных полугруппах класса C_0 отсылаем читателя к работам [1], [2].

Используем теперь предложения 1 и 2, чтобы проанализировать асимптотическое поведение структурированной по возрасту численности нетрудоспособного населения, которая описывается следующими уравнениями [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1(r, t)}{\partial r} = \sigma(r)\phi_2(r, t) - (\mu(r) + \delta(r))\phi_1(r, t), \\ \frac{\partial \phi_2(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2(r, t)}{\partial r} = \delta(r)\phi_1(r, t) - (\tilde{\mu}(r) + \sigma(r))\phi_2(r, t), \\ \phi_1(r, 0) = \phi_{10}(r), \quad \phi_2(r, 0) = \phi_{20}(r), \\ \phi_1(0, t) + \phi_2(0, t) = \beta \int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)\phi_1(r, t) dr + \tilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} \tilde{h}(r)\tilde{k}(r)\phi_2(r, t) dr, \end{cases} \quad (3)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — плотности распределения соответственно трудоспособного и нетрудоспособного населения, $\mu(r)$ и $\tilde{\mu}(r)$ — повозрастные коэффициенты смертности трудоспособного и нетрудоспособного населения, $\sigma(r), \delta(r) \in [0, 1]$ — повозрастные коэффициенты восстановления и потери трудоспособности, $k(r), \tilde{k}(r) \in (0, 1)$ — повозрастные доли женщин в численности трудоспособного и нетрудоспособного населения, а функции $h(r)$ и $\tilde{h}(r)$, L^1 -норма которых равна единице, задают режим рождаемости соответственно для трудоспособных и нетрудоспособных женщин. Постоянная $r_m > 0$ — продолжительность человеческой жизни, $[r_1, r_2] \subset (0, r_m)$ — репродуктивный период женщин, а постоянные β и $\tilde{\beta}$ суть уровни рождаемости среди трудоспособного и нетрудоспособного населения, зависящие от демографической политики правительства. В соответствии с их физическим смыслом ([3], [4]) все функции $\mu, \tilde{\mu}; h, \tilde{h}; k, \tilde{k}$ неотрицательны и удовлетворяют условиям

(i) $\mu_* \leq \mu(r), \tilde{\mu}(r) < \infty$ для всех $r \in [0, r_m)$;

¹⁾Напомним, что подмножество K конуса положительных элементов X^+ упорядоченного банахова пространства X называется базой, если оно ограничено, замкнуто и выпукло, а для любого $x \in X^+$ существует единственное число $\lambda(x) \geq 0$, такое, что $x \in \lambda(x)K$ (см., например, [1]).

(ii) $h(r) = \tilde{h}(r) = 0$ для всех $r \notin [r_1, r_2]$, а $\int_0^{r_m} h(r) dr = \int_0^{r_m} \tilde{h}(r) dr = 1$;

(iii) $k_* \leq k(r), \tilde{k}(r) < 1$ для всех $r \in [0, r_m)$,

где μ_*, k_* — положительные постоянные.

Для $p \in [1, \infty]$ обозначим произведение пространств $L^p[0, r_m) \times L^p[0, r_m)$, снабженное нормой $\|\phi\|_p = \|\phi_1\|_p + \|\phi_2\|_p$, через X_p . Очевидно, что X_p — упорядоченное банахово пространство с конусом положительных элементов $X_{p+} = L_+^p[0, r_m) \times L_+^p[0, r_m)$, где $L_+^p[0, r_m)$ — множество неотрицательных функций из $L^p[0, r_m)$. Определим оператор $A_p: D(A_p) \subset X_p \rightarrow X_p$ формулой

$$A_p \phi = \begin{pmatrix} -\phi'_1 - (\mu + \delta)\phi_1 + \sigma\phi_2 \\ -\phi'_2 - (\tilde{\mu} + \sigma)\phi_2 + \delta\phi_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где область определения $D(A_p)$ состоит из всех векторов $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in X_p$ с абсолютно непрерывными компонентами ϕ_1, ϕ_2 , имеющими производные $\phi'_1, \phi'_2 \in L^p[0, r_m)$ и удовлетворяющими условиям

$$\phi_1(0) + \phi_2(0) = \beta \int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)\phi_1(r)dr + \tilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} \tilde{h}(r)\tilde{k}(r)\phi_2(r)dr.$$

Тогда систему (3) можно переписать в эквивалентном кратком виде

$$u'(t) = A_1 u(t), \quad t > 0, \quad u(0) = \phi_0, \quad u(t) \in X_1. \quad (5)$$

В работе [4] показано, что оператор A_p ($1 \leq p < \infty$) порождает положительную полугруппу класса C_0 в X_p , которую мы обозначим через $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$. Чтобы вывести асимптотическую устойчивость системы (3), определим функционал $B: X_p \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$B\phi = \beta \int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)\phi_1(r)dr + \tilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} \tilde{h}(r)\tilde{k}(r)\phi_2(r)dr \quad (6)$$

и оператор $K: X_p \rightarrow X_p$ формулой

$$(K\phi)(r) = \exp \left(\int_0^r \begin{pmatrix} -\mu(s) - \delta(s) & \sigma(s) \\ \delta(s) & -\tilde{\mu}(s) - \sigma(s) \end{pmatrix} ds \right) \cdot \phi(r). \quad (7)$$

Легко проверить, что и B , и K ограничены.

Лемма 3. Уравнение

$$2 = \beta \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda r} h(r)k(r)\phi_1(r)dr + \tilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda r} \tilde{h}(r)\tilde{k}(r)\phi_2(r)dr, \quad (8)$$

где $(\phi_1, \phi_2)^T = Ke$, а $e(r) = (1, 1)^T$ при всех $r \in [0, r_m)$, имеет единственное вещественное решение λ .

Предложение 4. Для того чтобы все решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ уравнения (3), в котором $\phi_{10}, \phi_{20} \in L^\infty[0, r_m)$, экспоненциально убывали при $t \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы единственный вещественный корень λ^* уравнения (8) удовлетворял условию $\lambda^* < 0$.

Доказательство. Пусть $\chi_{[r_1, r_2]}$ — характеристическая функция отрезка $[r_1, r_2]$. Рассмотрим оператор $A^\#$ в пространстве X_1 , определенный формулой

$$A^\# \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_1 - (\mu + \delta)\varphi_1 + \delta\varphi_2 + \beta\varphi_1(0)\chi_{[r_1, r_2]}h\tilde{k} \\ \varphi'_2 - (\mu + \sigma)\varphi_2 + \sigma\varphi_1 + \tilde{\beta}\varphi_2(0)\chi_{[r_1, r_2]}\tilde{h}\tilde{k} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

область определения $D(A^\#)$ которого состоит из всех векторов $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in X_1$ с абсолютно непрерывными компонентами φ_1, φ_2 , обладающими производными $\varphi'_1, \varphi'_2 \in X_1$ и удовлетворяющими условиям $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ и $\varphi_1(r_m^-) = \varphi_2(r_m^-) = 0$. Стандартным образом показывается, что $A_\infty \subseteq (A^\#)^*$, так что оператор $A^\#$ порождает полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ класса C_0 в X_1 . Легко проверить, что функция $c = (c_1, c_2)^T$, определенная формулой $c(r) = e^{-\lambda^* r} (Ke)(r)$, $r \in [0, r_m)$, абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию $c_1(0) = c_2(0) = 1$. При этом из леммы 3 следует, что $c \in D(A_\infty)$. Заметим, что $A_\infty \subseteq (A^\#)^*$ и $c \in X_{1+}$, так что $((A^\#)^* c)(r) = (A_\infty c)(r) = \lambda^* c$. Таким образом, предложение 2 дает $\|S(t)\| \leq c_{\min}^{-1} \cdot \|c\|_\infty \cdot e^{\lambda^* t}$, где $c_{\min} = \inf_{r \in [0, r_m)} c(r)$.

Пусть $\{T_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ — сопряженная полугруппа для $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Ясно, что оператор A_∞ содержится в w^* -производящем операторе полугруппы $T_\infty(t)$. Очевидно, что полугруппа $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$ имеет одно и то же аналитическое выражение для всех $p \in [0, \infty]$, а именно $T_p(t)\phi = T_\infty(t)\phi$ для всех $t \geq 0$ и $p \in [1, \infty)$ при условии, что $\phi \in X_\infty$. Поэтому если начальные данные удовлетворяют условию $\phi_0 = (\phi_{10}, \phi_{20})^T \in X_\infty$, то для соответствующего решения $\phi(r, t) = (\phi_1(r, t), \phi_2(r, t))^T$ уравнения (3) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{r_m} |\phi_1(r, t)| dr + \int_0^{r_m} |\phi_2(r, t)| dr &= \|T_1(t)\phi_0\|_1 = \|T_\infty(t)\phi_0\|_1 \\ &\leq r_m \|T_\infty(t)\phi_0\|_\infty \leq \frac{r_m \|c\|_\infty}{c_{\min}} \cdot e^{\lambda^* t} \|\phi_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, решение $\phi(r, t)$ с начальным условием $\phi_0 = (\phi_{10}, \phi_{20})^T \in X_\infty$ экспоненциально убывает при $t \rightarrow +\infty$, если $\lambda^* < 0$.

Обратно, предположим, что $\lambda^* \geq 0$. Легко показать, что определенная выше функция c лежит в пересечении $X_\infty \cap D(A_p)$ и удовлетворяет уравнению $A_p c = \lambda^* c$ для всех $p \in [1, \infty)$. Отсюда вытекает, что

$$T_p(t)c = \int_0^t T_p(r)A_p c dr + c = \lambda^* \int_0^t T_p(r)c dr + c \geq c, \quad t \geq 0.$$

Следовательно, решение $\phi(r, t) = (T_p(t)c)(r)$ с начальным условием $\phi_0 = c$ не может стремиться к нулю. Предложение доказано. $\square$

Благодарность. Авторы признательны анонимным рецензентам за ценные комментарии и глубокие предложения.

Список литературы

- [1] C. J. K. Batty, D. W. Robinson, Acta Appl. Math., **2** (1984), 221–296. [2] R. Nagel (ed.), One-Parameter Semigroups of Positive Operators, in: Lect. Notes Math., vol. 1184, Springer-Verlag, New York, 1986. [3] X. W. Li, J. G. Peng, J. Xián Jiaotong Univeristy, **30**:10 (1996), 115–122. [4] J. G. Peng, S. K. Chung, Proc. Amer. Math. Soc., **126**:8 (1998), 2407–2416.

Университет Сянь Цзяотун, Китай
e-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn

Университет Сянь Цзяотун, Китай
e-mail: songxl810@stu.xjtu.edu.cn

Университет Сянь Цзяотун, Китай
e-mail: xiangqin_99@eyou.com

Поступило в редакцию
26 июня 2006 г.

В переработанном виде
29 января 2007 г.