Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Фишкин, Формальная и аналитическая
линеаризуемость семейств ростков конформных
отображений $(\mathbb{C}, 0)$ в $(\mathbb{C}, 0)$, *Функц. анализ и его
прил.*, 2009, том 43, выпуск 1, 94–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2945>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:49:33

УДК 517.547.3

Формальная и аналитическая линеаризуемость семейств ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0)$ в $(\mathbb{C}, 0)$

© 2009. А. Ю. Фишкин*

Рассмотрим росток конформного отображения $F(z): (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с неподвижной точкой 0 и мультипликатором $\lambda = F'(0) \neq 0$. При $|\lambda| \neq 1$ такой росток аналитически эквивалентен своей линейной части в нуле (теорема Шрёдера–Кёнигса [1, с. 31]). При $|\lambda| = 1$ ответ на вопрос об аналитической эквивалентности заданного ростка линейному напрямую связан с арифметическими свойствами числа λ .

Пусть $\lambda = e^{2\pi i\varepsilon}$, причем число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ диофантово, т.е. найдутся $C > 0$ и $\sigma > 2$, такие, что для любого $p/q \in \mathbb{Q}$ справедливо неравенство

$$|\varepsilon q - p| > C/q^\sigma. \quad (1)$$

Для произвольных C и σ это свойство выполняется для почти всех вещественных ε . Приведем теорему Зигеля, несколько усиленную по сравнению с традиционной формулировкой [1, с. 43]:

Теорема Зигеля. Пусть $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ — росток голоморфной функции в нуле и $\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (1) для заданных $C > 0$, $\sigma > 2$ и всех $p/q \in \mathbb{Q}$. Тогда найдется положительное $\delta = \delta(C, \sigma)$, такое, что если для некоторого $r > 0$ в диске $|z| < 2r$ выполняется неравенство $|F'(z) - \lambda| < \delta$, то в диске $|z| < r$ отображение $F(z)$ аналитически сопряжено линейному отображению λz , причем для некоторого $M(r, C, \sigma)$ сопрягающее отображение $H(z)$ удовлетворяет условию

$$\max_{|z| \leq r} |H(z)| < M(r, C, \sigma).$$

Замечание. Приведенная формулировка теоремы Зигеля содержит два обобщения по сравнению с классической. Во-первых, не требуется, чтобы ε было вещественным (т.е. не обязательно, чтобы мультипликатор λ принадлежал единичной окружности в $\mathbb{C}$). Во-вторых, даны оценки на максимум модуля сопрягающего отображения и на размер диска, в котором оно определено. Оценка на максимум не зависит от конкретного ε , она зависит лишь от параметров C и σ , фигурирующих в условии (1). Справедливость этих обобщений непосредственно следует из доказательства теоремы Зигеля, изложенного в [1].

Перейдем к рассмотрению ростков аналитических семейств конформных отображений с неподвижной точкой 0:

$$F_\varepsilon(z): (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0), \quad (\varepsilon, z) \in \mathbb{C}^2, \quad F_0(z) = \lambda z + O(z^2). \quad (2)$$

Если $0 < |\lambda| \neq 1$, то для таких локальных семейств имеет место аналог теоремы Шрёдера–Кёнигса: существует росток $H_\varepsilon(z)$ (аналитический по ε и z), сопрягающий $F_\varepsilon(z)$ с линейным семейством $R_\varepsilon(z) = F'_\varepsilon(0)z$.

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 7-01-00017-а и 05-01-02801-CNRS_a.

Пусть теперь $|\lambda| = 1$. Назовем семейство (2) невырожденным, если отображение $\varepsilon \rightarrow F'_\varepsilon(0)$ конформно при $\varepsilon = 0$. Тогда, производя аналитическую замену параметра, можно считать, что

$$F_\varepsilon(z) = e^{2\pi i \varepsilon} z + O(z^2), \quad \varepsilon \in (\mathbb{C}, \varepsilon_0), \quad (3)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda \in \mathbb{R}$. По теореме Пуанкаре–Дюлака семейство $F_\varepsilon(z)$ можно упростить с помощью формального сопряжения $\hat{H}_\varepsilon(z) = z + \sum_{k>1} h_k(\varepsilon) z^k$. Это значит, что мы не требуем сходимости ряда $\hat{H}_\varepsilon(z)$, однако при сопряжении с помощью этого ряда $F_\varepsilon(z)$ приводится к формальной нормальной форме Пуанкаре–Дюлака $\hat{F}_\varepsilon(z)$, где

$$\hat{F}_\varepsilon(z) = \begin{cases} e^{2\pi i \varepsilon} z & \text{для } \varepsilon \in \mathbb{Q}, \\ e^{2\pi i \varepsilon} z + \sum_{k>0} c_{kq+1}(\varepsilon) z^{kq+1} & \text{для } \varepsilon = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ с взаимно простыми } p \text{ и } q, \end{cases}$$

причем коэффициенты $c_{kq+1}(\varepsilon)$, вообще говоря, отличны от 0. Очевидно, что для того, чтобы локальное семейство было аналитически сопряжено линейному, необходимо, чтобы его формальная нормальная форма была линейной для всех ε . Мы докажем теорему, утверждающую, что это условие является также и достаточным.

Теорема. Пусть $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ и локальное семейство (3) формально эквивалентно линейному в достаточно малом диске $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$. Тогда это семейство аналитически эквивалентно линейному, а именно, существует росток аналитической замены координат $H_\varepsilon(z)$ в точке $(\varepsilon, z) = (\varepsilon_0, 0)$, для которого

$$H_\varepsilon^{-1}(z) \circ F_\varepsilon(z) \circ H_\varepsilon(z) = e^{2\pi i \varepsilon} z. \quad (4)$$

Лемма. Пусть $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ и локальное семейство (3) формально эквивалентно линейному в достаточно малом диске $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$. Тогда коэффициенты $h_k(\varepsilon)$ формальной линеаризующей замены $\hat{H}_\varepsilon(z) = z + \sum_{k>1} h_k(\varepsilon) z^k$ голоморфны в этом диске.

Доказательство. Пусть $T_\varepsilon(z) = e^{2\pi i \varepsilon} z + \sum_{k>1} f_k(\varepsilon) z^k$ — ряд Тейлора для функции $F_\varepsilon(z)$ в точке $z = 0$ при $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$, а $\hat{H}_\varepsilon(z)$ — ряд, выписанный выше. По определению формальной линеаризующей замены для этих рядов справедливо тождество

$$T_\varepsilon(z) \circ \hat{H}_\varepsilon(z) = \hat{H}_\varepsilon(e^{2\pi i \varepsilon} z),$$

из которого приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях переменной z получаются рекуррентные соотношения на функции $h_k(\varepsilon)$ вида

$$h_k(\varepsilon) \cdot (e^{2\pi i k \varepsilon} - e^{2\pi i \varepsilon}) = A_k(h_2, h_3, \dots, h_{k-1}, f_2, \dots, f_k), \quad (5)$$

где A_k — некоторые многочлены от своих аргументов. Отсюда следует, что если функции $h_2(\varepsilon), \dots, h_{k-1}(\varepsilon)$ аналитичны, то $h_k(\varepsilon)$ может иметь при $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$ лишь конечное число особенностей в точках вида $\varepsilon_j = j/(k-1)$. Поскольку семейство формально приводимо к семейству поворотов при $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$, то значение $h_k(\varepsilon_j)$ определено и, тем самым, все эти особенности устранимы. Следовательно, функция $h_k(\varepsilon)$ голоморфна. Доказательство завершается применением математической индукции. $\square$

Доказательство теоремы. Возьмем достаточно близкие к ε_0 диофантовы числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяющие соотношению (1) с некоторыми параметрами C, σ и такие, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_2$. Рассмотрим прямоугольник $K \subset \mathbb{C}$ со сторонами $\operatorname{Re} z = \varepsilon_1, \operatorname{Re} z = \varepsilon_2, \operatorname{Im} z = \delta, \operatorname{Im} z = -\delta$, где δ настолько мало, что K компактно содержится в диске $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \rho$. Заметим, что для $C' = \min(C, \delta), \varepsilon \in \partial K$ и $q/p \in \mathbb{Q}$ справедливо неравенство

$$|\varepsilon q - p| > C'/q^\sigma.$$

Действительно, для ε на вертикальных сторонах прямоугольника K

$$|\varepsilon q - p| \geq |q \operatorname{Re} \varepsilon - p| = |qa_i - p| > C/q^\sigma,$$

а на его горизонтальных сторонах

$$|\varepsilon q - p| \geq |\operatorname{Im} \varepsilon| = \delta > \delta/q^\sigma.$$

Применяя теорему Зигеля в приведенной выше формулировке, мы получим, что для $\varepsilon \in \partial K$ определено аналитическое сопряжение $H_\varepsilon(z)$ ростка F_ε с линейным отображением и, кроме того, $|H_\varepsilon(z)| < M$ для $|z| < r$ при некоторых M и r , зависящих от F_ε, C, δ и σ . Поскольку ряд Тейлора для $H_\varepsilon(z)$ совпадает с формальным рядом $\hat{H}_\varepsilon(z)$, коэффициенты которого равны $h_k(\varepsilon)$, то в силу неравенств Коши для $\varepsilon \in \partial K$ выполнено неравенство

$$|h_k(\varepsilon)| < M/r^k.$$

Учитывая, что функции $h_k(\varepsilon)$ голоморфны в $\overline{K}$ в силу доказанной леммы, получим, что та же оценка на $|h_k(\varepsilon)|$ верна и для $\varepsilon \in K$ по принципу максимума. Отсюда легко заключить, что для $\varepsilon \in K$ ряд $\hat{H}_\varepsilon(z)$ сходится равномерно на компактах в круге $|z| < r$ к аналитической линейаризующей замене $H_\varepsilon(z)$. Голоморфность $H_\varepsilon(z)$ по ε внутри K при фиксированном $z, |z| < r$, следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости, а голоморфность по обоим аргументам ε, z — из теоремы Хартогса. $\square$

Автор сердечно благодарен Ю. С. Ильяшенко за ценные замечания и внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

Независимый московский университет

Поступило в редакцию
25 сентября 2007 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 19.12.2008. Подписано к печати 26.01.2009. Формат 70 × 100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 2,1 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 257 экз. Заказ 903.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56

Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6