Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, К технике предельного перехода
в нелинейных эллиптических уравнениях, *Функц.
анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 19–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:09:25

К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях*

© 2009. В. В. Жиков

Рассматривается проблема предельного перехода в последовательности нелинейных эллиптических задач. При этом «предельное» уравнение заранее известно, но имеет неклассическую структуру, а именно содержит p -лапласиан с переменным показателем $p = p(x)$. Характерной чертой таких уравнений является особого рода неединственность, или эффект Лаврентьева, что и делает вопрос о предельном переходе нетривиальным. Сами уравнения с $p(x)$ -лапласианом встречаются во многих задачах математической физики. Некоторые приложения имеются в настоящей работе. В частности, дан подход к разрешимости известной парной системы из гидромеханики неньютоновых жидкостей («stationary thermo-rheological viscous flows»), не опирающийся ни на какие условия малости.

§1. Введение

1. В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \operatorname{div} g, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad g \in (L^\infty(\Omega))^d, \quad (1.1)$$

где показатель $p(x)$ измерим и удовлетворяет условию $1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty$.

С переменным показателем $p = p(x)$ свяжем пространство Орлича. Через $L^{p(\cdot)} = L^{p(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ обозначим класс всех измеримых вектор-функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, таких, что

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Этот класс будет рефлексивным банаховым пространством, если норму определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} |\lambda^{-1} f|^p dx \leq 1 \right\}. \quad (1.2)$$

Заметим, что инфимум в (1.2) достигается, если $\int_{\Omega} |f|^p dx > 0$. Отсюда следует, что

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \lambda \iff \int_{\Omega} |\lambda^{-1} f|^p dx = 1. \quad (1.3)$$

Решение задачи Дирихле (1.1) ищем в пространстве Соболева–Орлича

$$W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx < \infty \right\}, \quad \|u\|_W = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d)},$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №08-01-99007.

см. [1], [2]. Скажем, что $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ есть слабое решение, если

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (1.4)$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Это обычное определение решения в смысле распределений. Посмотрим, как обстоит дело с единственностью. Если u_1, u_2 — два решения, то

$$\int_{\Omega} [|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2] \cdot \nabla \varphi \, dx = 0.$$

В случае постоянного $p > 1$ выражение в квадратной скобке принадлежит $(L^{p'}(\Omega))^d$, $p' = p/(p-1)$, а множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $W_0^{1,p}(\Omega)$. По замыканию можно взять $\varphi = u_1 - u_2$ и легко вывести равенство $u_1 = u_2$ из строгой монотонности

$$(|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta) \cdot (\xi - \eta) > 0, \quad \xi \neq \eta.$$

В случае переменного p не хватает только одного — плотности множества C_0^∞ в $W_0^{1,p(\cdot)}$, и единственности, вообще говоря, нет. Для выделения решений с определенными свойствами поступают следующим образом. Пусть $H = H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Возьмем некоторое промежуточное замкнутое подпространство V , $H \subseteq V \subseteq W$, и определим V -решение, или *вариационное* решение, как функцию $u \in V$, для которой тождество (1.4) выполнено для любой пробной функции $\varphi \in V$. Тогда аргументы со строгой монотонностью работают и V -решение единственно. В качестве пробной функции φ можно взять само решение и получить энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla u \, dx. \quad (1.5)$$

Предложение 1.1. *Слабое решение является вариационным тогда и только тогда, когда выполнено энергетическое равенство (1.5).*

Действительно, в качестве V можно взять наименьшее замкнутое подпространство, содержащее $C_0^\infty(\Omega)$ и само решение. Видим, что понятие вариационного решения можно определить без указания самого промежуточного подпространства.

В случае когда $V = H$ или $V = W$, говорят об H -решении и W -решении.

Представляют интерес модельные примеры, в которых подпространство H имеет коразмерность 1 в W . Тогда, кроме H -решения и W -решения, других вариационных решений нет. Заранее не вполне очевидно, существуют ли слабые решения, отличные от этих двух вариационных. Далее будет дан утвердительный ответ на этот вопрос.

Модельный пример (см. [3], [4]). Пусть $d = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ — единичный круг,

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x_1 x_2 > 0, \\ \beta, & \text{если } x_1 x_2 < 0, \end{cases} \quad 1 < \alpha < 2 < \beta. \quad (1.6)$$

Этот пример подробно обсуждается в § 6.

В случае равенства $H = W$ показатель p и саму задачу Дирихле называют *регулярными*. Условия, обеспечивающие регулярность, носят довольно тонкий характер, например, одной непрерывности показателя p недостаточно. Извест-

но ([5], [6]), что показатель p регулярен, если он обладает *логарифмическим* модулем непрерывности:

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\ln(1/|x - y|)}, \quad x, y \in \Omega, \quad |x - y| \leq \frac{1}{4}.$$

В классических вариационных и монотонных задачах неединственность возможна, но она всегда связана с отсутствием строгой выпуклости функционала или строгой монотонности оператора. При этом множество решений является выпуклым и замкнутым. В наших задачах неединственность имеет совсем другую природу, поскольку функционалы формально строго выпуклые, а операторы — строго монотонные. При этом множество слабых решений, вообще говоря, не является выпуклым, как это будет показано на модельном примере, см. §6. Вопрос о замкнутости этого множества в пространстве W остался открытым.

2. Для приложений важны те решения, которые получаются в результате некоторой «регуляризации» исходной задачи (1.1). Рассмотрим регуляризацию

$$\operatorname{div} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) = \operatorname{div} g, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.7)$$

$$A_\varepsilon(x, \xi) = |\xi|^{p_\varepsilon(x)-2}\xi + \varepsilon|\xi|^{\beta-2}\xi, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.8)$$

где показатели p_ε измеримы и подчинены условию

$$1 < \alpha \leq p_\varepsilon(x) \leq \beta < \infty, \quad p_\varepsilon(x) \rightarrow p(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega. \quad (1.9)$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ вектор-функция $A_\varepsilon(x, \xi)$ удовлетворяет классическим условиям монотонности, коэрцитивности и роста, отвечающим показателю β , и задача (1.7) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$. В частности, выполнено тождество

$$\int_\Omega A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega g \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.10)$$

в котором по замыканию можно взять $\varphi = u_\varepsilon$ и получить энергетическое равенство

$$\int_\Omega (|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^\beta) \, dx = \int_\Omega A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \int_\Omega g \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx. \quad (1.11)$$

Из него по неравенству Юнга следует, что

$$\begin{aligned} \int_\Omega g \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx &\leq 2^{\alpha'} \int_\Omega |g|^{p'_\varepsilon} \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \, dx, \\ \int_\Omega A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx &\leq 2^{\alpha'+1} \int_\Omega |g|^{p'_\varepsilon} \, dx \leq 2^{\alpha'+1} \left(|\Omega| + \int_\Omega |g|^{\alpha'} \, dx \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Мы видим, что последовательность u_ε ограничена в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Тогда из (1.11) получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega g \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \int_\Omega g \cdot \nabla u \, dx, \quad (1.13)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \int_\Omega g \cdot \nabla u \, dx, \quad (1.14)$$

поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) \cdot \nabla u_{\varepsilon} dx \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}} dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

в силу свойства полунепрерывности (снизу) для выпуклых функционалов (подробнее см. §3). Итак, предельная функция u принадлежит пространству $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Главный вопрос: будет ли предельная функция — «аппроксимационное решение» — слабым решением предельной задачи Дирихле (1.1)?

Указанную проблему легко свести к другой — проблеме слабой сходимости потоков к потоку. Из (1.8), (1.11) и (1.12) видно, что последовательность «потоков» $A_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon})$ ограничена в $(L^{\beta'}(\Omega))^d$. Без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимость

$$A_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) \rightharpoonup z \quad \text{в } (L^{\beta'}(\Omega))^d. \quad (1.15)$$

Поскольку потоки $A_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon})$ зависят от градиентов ∇u_{ε} нелинейно, а сами градиенты сходятся только слабо, равенство $z = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ отнюдь не очевидно. В случае его выполнения говорим, что потоки *слабо сходятся к потоку*.

Предложение 1.2. *Если потоки слабо сходятся к потоку, то предельная функция есть слабое решение предельной задачи Дирихле (1.1).*

Действительно, предельный переход в тождестве (1.10) дает равенство

$$\int_{\Omega} z \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (1.16)$$

что с учетом равенства $z = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ доказывает наше утверждение.

Выбор регуляризации (1.8) диктуется приложениями, см. §5. Иногда достаточно регуляризации (1.8) с $p_{\varepsilon} = p$. В этом случае особых проблем со сходимостью решений нет, предельная функция есть H -решение задачи (1.1), см. теорему 4.4. Полезна также аппроксимация

$$A_{\varepsilon}(x, \xi) = |\xi|^{p_{\varepsilon}(x)-2} \xi, \quad p_{\varepsilon} \text{ регулярны при } \varepsilon > 0, \quad (1.17)$$

где p_{ε} по-прежнему удовлетворяет условию (1.9). Здесь проблемы с предельным переходом такие же, как и в случае аппроксимации (1.8).

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматривается аппроксимация (1.8), а через z обозначается вектор из (1.15), т.е. слабый предел потоков. Отметим, что в действительности $z \in L^{p'(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d) \subset (L^{\beta'}(\Omega))^d$; это также есть следствие полунепрерывности снизу для выпуклых функционалов и доказано в лемме 3.2. Поэтому $z \cdot \nabla u \in L^1(\Omega)$ в силу неравенства Юнга.

§2. Проблема слабой сходимости потоков к потоку

1. Введем одно ограничение на показатели α, β из (1.9):

$$\beta < \alpha^* \equiv \frac{\alpha d}{d - \alpha} \quad \text{при } \alpha < d. \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. *При условии (2.1) потоки слабо сходятся к потоку.*

Для доказательства этой основной теоремы будет востребована развиваемая далее довольно сложная техника, представляющая отдельный интерес.

Выше отмечалось свойство полунепрерывности для выпуклых функционалов. Не меньшую роль играет другого типа свойство полунепрерывности, которое связано не с выпуклостью, а с монотонностью. В простейшем варианте оно выглядит так.

Предложение 2.2 (частный случай леммы 3.3). *Для любого измеримого $K \subset \Omega$*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \geq \int_K z \cdot \nabla u dx. \quad (2.2)$$

При этом в случае равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_K z \cdot \nabla u dx \quad (2.3)$$

выполнено соотношение $z(x) = |\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x)$ для п. в. $x \in K$.

Выбор множества K будет сделан с помощью соображений из теории меры.

Последовательность $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon$ ограничена в $L^1(\Omega)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, считаем, что в смысле слабой сходимости мер

$$A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup d\mu,$$

где μ — конечная борелевская мера в Ω . По определению это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_\Omega \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

где $C_0(\Omega)$ — множество непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций, равных нулю на границе.

Предложение 2.3. *Если абсолютно непрерывная (относительно меры Лебега) компонента меры μ равна $z \cdot \nabla u dx$, то потоки слабо сходятся к потоку.*

Доказательство. Обозначим через $S \subset \Omega$ множество нулевой лебеговой меры, на котором сосредоточена сингулярная компонента μ^s меры μ , $\mu^s(\Omega \setminus S) = 0$. По свойствам слабой сходимости [7] для любого замкнутого множества $K \subset \Omega \setminus S$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \leq \int_K d\mu = \int_K z \cdot \nabla u dx.$$

Тогда в силу (2.2) имеет место равенство (2.3) и поэтому выполнено соотношение $z|_K = |\nabla u|^{p-2} \nabla u|_K$. Поскольку S имеет нулевую лебегову меру, этого достаточно для равенства $z(x) = |\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Предложение доказано.

Мы видим, что сингулярная компонента меры μ не играет роли в проблеме слабой сходимости потоков к потоку, но требуется, чтобы абсолютно непрерывная компонента имела «естественную» структуру $z \cdot \nabla u dx$. Этот решающий пункт обеспечивается следующим обобщением леммы о компенсированной компактности Тартара–Мюра, см. [8], [9], [10, гл. 1].

Лемма 2.4 (о компенсированной компактности). *Пусть*

- (i) $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (ii) $w_\varepsilon \in (L^{\beta'}(\Omega))^d$, $\operatorname{div} w_\varepsilon = 0$, $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $(L^{\beta'}(\Omega))^d$;
- (iii) *последовательность $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ ограничена в $L^1(\Omega)$.*

Тогда при выполнении условия (2.1) имеем

$$d\mu_\varepsilon \equiv w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup d\mu = w \cdot \nabla u dx + d\mu^s, \quad (2.4)$$

где μ^s — сингулярная (относительно меры Лебега) мера в Ω .

Отметим, что в классическом варианте этой леммы предполагается равенство $\alpha = \beta$; в этом случае предельная мера μ абсолютно непрерывна. Пример с нетривиальной сингулярной компонентой построен в конце §4.

С помощью леммы 2.4 не составляет труда доказать теорему 2.1. Полагая $w_\varepsilon = A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) - g$, из соотношения (2.4), в котором $w = z - g$, получим

$$A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup z \cdot \nabla u dx + d\mu^s.$$

Тогда предложение 2.3 обеспечивает искомое равенство $z = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, а также представление предельной меры в виде

$$d\mu = |\nabla u|^p dx + d\mu^s.$$

Имеются основания считать, что условие (2.1) существенно для справедливости леммы 2.4. Таким образом, без условия (2.1) главный вопрос, будет ли предельная функция слабым решением предельного уравнения, в общей постановке остается открытым.

Лемма 2.4 доказана в [11]; ниже приведено более простое доказательство.

2. Доказательство леммы 2.4. Из условий (i), (ii) имеем

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \varphi dx = - \int_{\Omega} w_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx$$

для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Справа легко перейти к пределу, поскольку $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ слабо в $L^{\beta'}(\Omega)$, а $u_\varepsilon \rightarrow u$ сильно в $L^\beta(\Omega)$ благодаря условию (2.1) и теореме вложения Соболева. В результате

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = - \int_{\Omega} w u \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} w(u - t) \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall t \in \mathbb{R}^1. \quad (2.5)$$

Напомним понятие точки Лебега. Пусть $Q_r(x_0) = x_0 + (r/2, r/2)^d$ — куб с ребром $r > 0$ и центром в точке $x_0 \in \Omega$. Если $f \in L^\gamma(\Omega)$, $\gamma \geq 1$, то для почти всех $x_0 \in \Omega$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)|^\gamma dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{Q_1(0)} |f(x_0 + ry) - f(x_0)|^\gamma dy = 0,$$

в частности, для $\varphi \in C_0^\infty(Q_1(0))$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{Q_1(0)} f(x_0 + ry) \varphi(y) dy = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} f(x) \varphi_r(x) dx = f(x_0) \int_{Q_1(0)} \varphi(y) dy,$$

где $\varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}(x - x_0))$. Из (2.5) следует, что для постоянного $C \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} \varphi_r d\mu \\ &= -\frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} (u - t)(w - C) \cdot \nabla \varphi_r dx - \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} (u - t)C \cdot \nabla \varphi_r dx = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Пусть x_0 — точка Лебега функций w и ∇u , $C = w(x_0)$, $t = \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} u \, dx$ и $k_0 = \max(|\varphi| + |\nabla \varphi|)$. Тогда

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{k_0}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} |w - C| \left| \frac{u - t}{r} \right| dx \\ &\leq k_0 \left(\frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} |w - C|^{\beta'} dx \right)^{1/\beta'} \left(\frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} \left| \frac{u - t}{r} \right|^\beta dx \right)^{1/\beta} \\ &\leq k_1 \left(\frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} |w - C|^{\beta'} dx \right)^{1/\beta'} \left(\frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} |\nabla u|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $r \rightarrow 0$. Мы воспользовались последовательно неравенством Гёльдера, неравенством Пуанкаре–Соболева (где используется условие (2.1)) и свойствами точек Лебега.

Далее по формуле Грина и свойству точек Лебега

$$J_2 = \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} C \cdot \nabla u \varphi_r \, dx, \quad \lim_{r \rightarrow 0} J_2 = w(x_0) \cdot \nabla u(x_0) \int_{Q_1(0)} \varphi \, dy.$$

Таким образом, доказано соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} J \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} \varphi_r \, d\mu = w(x_0) \cdot \nabla u(x_0) \int_{Q_1(0)} \varphi \, dy. \quad (2.6)$$

Остается воспользоваться классической теоремой о дифференцировании меры μ по мере Лебега, см. [12, гл. III]. Приведем эту теорему в подходящей формулировке. Определим в единичном кубе $Q_1(0)$ меру μ_{r,r_0} равенством

$$\int_{Q_1(0)} \varphi \, d\mu_{r,x_0} = \frac{1}{r^d} \int_{Q_r(x_0)} \varphi_r \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q_1(0)), \quad \varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}(x - x_0)).$$

Теорема о дифференцировании. Для почти всех $x_0 \in \Omega$ (по мере Лебега)

$$\mu_{r,x_0} \rightharpoonup a(x_0) \, dx \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $a(x) \, dx$ — абсолютно непрерывная компонента меры μ . Другими словами,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r(x_0)} \varphi_r \, d\mu = a(x_0) \int_{Q_1(0)} \varphi \, dy.$$

Теперь из (2.6) видно, что $a(x) = w(x) \cdot \nabla u(x)$. Лемма доказана.

§3. Свойства полунепрерывности снизу

В этом разделе соболевские пространства не используются, изложение ведется на уровне лебеговых пространств и пространств Орлича.

1. Выпуклые интегранты. Пусть K — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим класс интегрантов $f(x, \xi)$, выпуклых по $\xi \in \mathbb{R}^d$, измеримых по $x \in K$ и подчиненных нестандартной оценке

$$c_1 |\xi|^\alpha - \varphi(x) \leq f(x, \xi) \leq c_2 |\xi|^\beta + \varphi(x), \quad 1 < \alpha \leq \beta < \infty, \quad c_1, c_2 > 0, \quad \varphi \in L^1(K).$$

Пусть интегранты f_ε, f принадлежат этому классу и выполнено условие

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, \xi) = f(x, \xi) \quad \text{для п. в. } x \in K \text{ и любых } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Нетрудно проверить, что аналогичное условие выполняется тогда и для сопряженных интегралов:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}^*(x, \xi) = f^*(x, \xi), \quad (3.1)$$

где по определению $f^*(x, \xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \{\xi \cdot \eta - f(x, \eta)\}$.

Лемма 3.1. Если $v_{\varepsilon} \rightharpoonup v$ в $L^1(K)^d$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{K}} f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) dx \geq \int_K f(x, v) dx. \quad (3.2)$$

При этом в случае равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) dx = \int_K f(x, v) dx < \infty \quad (3.3)$$

имеет место слабая сходимость

$$f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) \rightharpoonup f(x, v) \quad \text{в } L^1(K). \quad (3.4)$$

Доказательство. По неравенству Юнга

$$\int_K f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) dx \geq \int_K [z \cdot v_{\varepsilon} - f_{\varepsilon}^*(x, z)] dx \quad \forall z \in L^{\infty}(K)^d.$$

Отсюда, используя (3.1), получим

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) dx \geq \sup_{z \in L^{\infty}(K)^d} \int_K [z \cdot v - f^*(x, z)] dx = \int_K f(x, v) dx,$$

где на последнем шаге мы воспользовались классической теоремой о сопряженном функционале [13, гл. IX]. Тем самым неравенство (3.2) доказано. Допустим, что выполняется равенство (3.3), и пусть $K_0 \subset K$ — произвольное измеримое подмножество, $K_1 = K \setminus K_0$. Сопоставляя неравенства вида (3.2) для K_0 и K_1 с равенством для K , заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_0} f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) dx = \int_{K_0} f(x, v) dx. \quad (3.5)$$

Так как K_0 произвольно, то из (3.5) следует слабая сходимость (3.4). Лемма доказана.

В качестве примера последовательности выпуклых интегралов можно взять

$$f_{\varepsilon}(x, \xi) = |\xi|^{p_{\varepsilon}(x)} + \varepsilon |\xi|^{\beta} \rightarrow f(x, \xi) = |\xi|^{p(x)},$$

где показатели p_{ε} удовлетворяют условию (1.9).

Лемма 3.2. Предположим, что

(i) $v_{\varepsilon} \in (L^1(K))^d$, $\int_K (|v_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}} + \varepsilon |v_{\varepsilon}|^{\beta}) dx \leq C < \infty$;

(ii) $w_{\varepsilon} \equiv |v_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}-2} v_{\varepsilon} + \varepsilon |v_{\varepsilon}|^{\beta-2} v_{\varepsilon} \rightharpoonup z$ в $(L^{\beta'}(K))^d$.

Тогда $z \in L^{p'(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Положим $f_{\varepsilon}(x, \xi) = |\xi|^{p_{\varepsilon}(x)}/p_{\varepsilon}(x) + \varepsilon |\xi|^{\beta}/\beta$. Так как $w_{\varepsilon} = f'_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon})$, то выполнено тождество $f_{\varepsilon}(x, v_{\varepsilon}) + f_{\varepsilon}^*(x, w_{\varepsilon}) \equiv w_{\varepsilon} \cdot v_{\varepsilon}$, из которого получаем

$$\int_K f_{\varepsilon}^*(x, w_{\varepsilon}) dx \leq C.$$

Поскольку $f_\varepsilon^*(x, \xi) \rightarrow f^*(x, \xi) = |\xi|^{p'(x)}/p'(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, по лемме 3.1

$$\int_{\Omega} \frac{|z|^{p'}}{p'} dx \leq C,$$

что и требуется.

2. Монотонные операторы. Пусть $A_\varepsilon(x, \xi)$, $A(x, \xi)$ — каратеодориевы (т. е. непрерывные по ξ для почти всех $x \in \Omega$ и измеримые по x при каждом $\xi \in \mathbb{R}^d$) вектор-функции, такие, что

$$(A_\varepsilon(x, \xi) - A_\varepsilon(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0 \quad (\text{монотонность}),$$

$$A_\varepsilon(x, \xi) \rightarrow A(x, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ п. в. по } x \in \Omega, \quad (3.6)$$

$$|A(x, \xi)| \leq c_1(|\xi|^{p(x)-1} + 1). \quad (3.7)$$

Таким образом, условия роста накладываются только на предельный оператор A .

Лемма 3.3. *Предположим, что*

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v, \quad A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \rightharpoonup z \text{ в } (L^1(K))^d, \quad v \in L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d), \quad z \in L^{p'(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d),$$

и последовательность $A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon$ ограничена в $L^1(K)$. Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon dx \geq \int_K z \cdot v dx, \quad (3.8)$$

причем в случае равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon dx = \int_K z \cdot v dx$ мы имеем $z = A(x, v)$ и

$$A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon \rightharpoonup A(x, v) \cdot v \text{ в } L^1(K). \quad (3.9)$$

Доказательство. Допустим, что

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon dx \leq \int_K z \cdot v dx. \quad (3.10)$$

По монотонности имеем неравенство

$$\int_K (A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) - A_\varepsilon(x, \psi)) \cdot (v_\varepsilon - \psi) dx \geq 0 \quad \forall \psi \in L^\infty(K)^d,$$

в котором перейдем к пределу, рассмотрев каждое из четырех слагаемых отдельно. Предел слагаемого $\int_K A_\varepsilon(x, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon dx$ оценивается сверху по неравенству (3.10), а пределы остальных трех легко вычисляются. В результате

$$\int_K (z - A(x, \psi)) \cdot (v - \psi) dx \geq 0 \quad \forall \psi \in L^\infty(K)^d. \quad (3.11)$$

При фиксированных v , z подынтегральное выражение в этом неравенстве имеет структуру $g(x, \psi(x))$, где $g(x, \xi)$ — каратеодориева вектор-функция, и выполнена оценка

$$|g(x, \xi)| \leq c|\xi|^p + a(x), \quad a \in L^1(K), \quad (3.12)$$

в чем нетрудно убедиться, используя (3.7) и тот факт, что $v \in L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$, $z \in L^{p'(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$. В таком случае оператор суперпозиции $G(\psi)(x) = g(x, \psi(x))$ действует непрерывно из $L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$ в $L^1(K)$. Действительно, пусть $\psi_n \rightarrow \psi$

в $L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$, т. е. $\int_K |\varphi - \varphi_n|^p dx \rightarrow 0$ в силу (1.3). Из оценки $|\psi_n|^p \leq 2^\beta (|\psi - \psi_n|^p + |\psi|^p)$ видно, что семейство $|\psi_n|^p$ равностепенно интегрируемо. Тогда неравенство (3.12) дает равностепенную интегрируемость семейства $G(\psi_n)$ (понятие равностепенной интегрируемости см. в [13, гл. VII, § 1]). Можно считать, что $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ п. в. на K . По теореме Лебега $G(\psi_n) \rightarrow G(\psi)$ в $L^1(K)$, и непрерывность оператора суперпозиции доказана.

Так как множество $(L^\infty(K))^d$ плотно в $L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$, то неравенство (3.11) выполнено для любой пробной функции $\psi \in L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$. Теперь используем прием Минти, взяв в этом неравенстве $\psi = v \pm th$, $h \in L^{p(\cdot)}(K, \mathbb{R}^d)$. В результате придем к искомому соотношению $z = A(x, v)$. Ясно также, что строгое неравенство в (3.10) невозможно. Слабая сходимость (3.9) устанавливается тем же рассуждением, что и в случае выпуклых интегрантов. Лемма доказана.

§ 4. Отдельные случаи предельного перехода

В этом разделе мы не используем ни условие (2.1), ни лемму о компенсированной компактности и опираемся только на свойства полунепрерывности снизу. При этом накладываются некоторые специальные ограничения на предельный показатель, допредельный показатель и др.

1. Начнем с самого простого результата.

Теорема 4.1. *Если предельный показатель p регулярен, то потоки слабо сходятся к потоку.*

Далее, скажем, что показатель p регулярен вне множества $S \subset \Omega$, если пространству $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ принадлежит любая функция из $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, равная нулю в некоторой окрестности множества S . Для регулярного показателя $S = \emptyset$.

Теорема 4.2. *Пусть предельный показатель регулярен вне замкнутого множества S нулевой лебеговой меры. Тогда потоки слабо сходятся к потоку u , кроме того,*

$$A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup |\nabla u|^p \quad \text{в } L^1(\Omega \setminus S_\delta), \quad (4.1)$$

где S_δ — любая δ -окрестность множества S . При этом мера μ^s сосредоточена на S .

Будет построен пример, в котором последовательность $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon$ не является слабо компактной в $L^1(\Omega)$ и сингулярная компонента меры μ^s нетривиальна.

Теорема 4.3. *Если для предельной функции выполнено энергетическое равенство (1.5), то эта функция будет вариационным решением задачи Дирихле (1.1). При этом $\mu^s = 0$.*

Теорема 4.4. *Если $p_\varepsilon \geq p$, то предельная функция является H -решением задачи Дирихле (1.1).*

2. **Доказательство теоремы 4.1.** Рассмотрим предельное тождество (1.16).

Так как показатель p регулярен и $z \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ (по лемме 3.2), то в качестве пробной можно взять любую функцию $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}$, в частности $\varphi = u$. В результате получим

$$\int_\Omega z \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega g \cdot \nabla u \, dx. \quad (4.2)$$

Сравнение с (1.13) показывает, что выполнено равенство (2.3) с $K = \Omega$, и теорема следует из предложения 2.2.

3. Доказательство теоремы 4.2. Пусть

$$\rho \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \rho \geq 0, \quad \rho = 0 \text{ в окрестности } S.$$

Предложение 4.5. *Допустим, что*

- (i) $v_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$, $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (ii) *последовательность v_ε компактна в $L^\beta(\Omega)$.*

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla v_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \rho z \cdot \nabla v \, dx.$$

Доказательство. Из тождества (1.10) имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &\equiv \int_{\Omega} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla v_\varepsilon \rho \, dx = - \int_{\Omega} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) v_\varepsilon \cdot \nabla \rho \, dx + \int_{\Omega} g \cdot \nabla (v_\varepsilon \rho) \, dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon &= - \int_{\Omega} z v \cdot \nabla \rho \, dx + \int_{\Omega} g \cdot \nabla (v \rho) \, dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где мы воспользовались вытекающими из (ii) сходимостями $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) v_\varepsilon \rightharpoonup z v$ в $(L^1(\Omega))^d$ и $v_\varepsilon \rho \rightharpoonup v \rho$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Так как $v \rho \in H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ по условию теоремы и выбору функции ρ , то правая часть в (4.3) равна $\int_{\Omega} \rho z \cdot \nabla v \, dx$ и предложение доказано.

Теперь напрашивается мысль взять $v_\varepsilon = u_\varepsilon$, но условие (ii), вообще говоря, не выполнено для u_ε (поскольку условие (2.1) не предполагается). По этой причине в качестве v_ε берем срезку

$$u_\varepsilon^{(N)} = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{если } |u(x)| \leq N, \\ \pm N, & \text{если } |u(x)| > N. \end{cases}$$

Тогда при фиксированном N

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^{(N)} \, dx = \int_{\Omega} \rho z \cdot \nabla u^{(N)} \, dx. \quad (4.4)$$

Ниже указано (см. лемму 4.6) соотношение, позволяющее в (4.4) убрать срезку. В таком случае легко выводится неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap B} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \leq \int_{\Omega \cap B} z \cdot \nabla u \, dx,$$

в котором B — шар, $\overline{B} \cap S = \emptyset$. Теперь все утверждения теоремы 4.2 вытекают из предложения 2.2.

Лемма 4.6. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} 0 &\leq A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^{(N)} \leq A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot (\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^{(N)}) \, dx &= 0 \quad \text{равномерно по } \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство. Положив $T_N^\varepsilon = \{x \in \Omega, |u_\varepsilon(x)| > N\}$, имеем неравенство

$$|T_N^\varepsilon| \leq N^{-1} \|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq cN^{-1}.$$

Возьмем в тождестве (1.10) $\varphi = u_\varepsilon$ и $\varphi = u_\varepsilon^{(N)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^{(N)}) dx &= \int_{T_N^\varepsilon} g \cdot \nabla u_\varepsilon dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{T_N^\varepsilon} |g|^{\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'} \leq c_1 \left(\int_{T_N^\varepsilon} |g|^{\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'}, \end{aligned}$$

и достаточно ссылки на свойство абсолютной интегрируемости суммируемой функции $|g|^{\alpha'}$. Лемма доказана. Тем самым полностью доказана и теорема 4.2.

4. Доказательство теоремы 4.3. Из (1.13) и (1.5) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Так как функционал $f(x, \xi) = |\xi|^{p(x)}$ является строго выпуклым, то по теореме Решетняка [14] получаем сильную сходимость $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Поэтому можно считать, что $\nabla u_\varepsilon(x) \rightarrow \nabla u(x)$ п.в. по $x \in \Omega$. В этом случае $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon(x)) \rightarrow |\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x)$ п.в. Но тогда $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ в $L^{\beta'}(\Omega)$, что и требуется.

Доказательство теоремы 4.4 мы не приводим, поскольку аналогичное утверждение (лемма 4.8) доказано ниже.

5. До сих пор изучалась аппроксимация (1.8). Теперь рассмотрим аппроксимацию (1.17) и затронем вопрос, какие из решений исходной задачи (1.1) достижимы, т.е. могут быть получены с помощью аппроксимации (1.17) (см. по этому поводу [15], [16]).

Лемма 4.7. Если $p_\varepsilon \leq p$, то предельная функция есть W -решение.

Доказательство. Тождество (1.10) по замыканию выполнено для любой функции $\varphi \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega) \equiv W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, в частности для $\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W$. Здесь мы воспользовались регулярностью показателей p_ε (см. (1.17)) и неравенством $p_\varepsilon \leq p$. Кроме того, потоки $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon)$ оказываются ограниченными в $L^{p'(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, поэтому $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup z$ в $L^{p'(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} z \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in W, \quad (4.5)$$

в частности, выполнено соотношение (4.2). Сравнение с (1.13) показывает, что выполнено равенство (2.3) с $K = \Omega$. Отсюда $z = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, а само тождество (4.5) означает, что u есть W -решение. Лемма доказана.

Лемма 4.8. Если $p_\varepsilon \geq p$, то предельная функция u есть H -решение.

Доказательство. По лемме Минти (см. [17, гл. III])

$$\int_{\Omega} [A_\varepsilon(x, \nabla \varphi) - g] \cdot (\nabla \varphi - \nabla u_\varepsilon) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

а предельный переход приводит к неравенству

$$\int_{\Omega} [|\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi - g] \cdot (\nabla \varphi - \nabla u) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.6)$$

Так как показатели p_ε регулярны и $u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega) \subset H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, то $u \in H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Соотношение (4.6) автоматически справедливо для $\varphi \in H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, и тогда оно означает (по лемме Минти), что u есть H -решение. Лемма доказана.

Следствием этих лемм является такое утверждение:

Лемма 4.9. *Если H - и W -решения не совпадают, то существует континуум аппроксимационных решений.*

Доказательство. Пусть $\bar{p}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon$ — аппроксимации, приводящие к W -решению и H -решению соответственно. Возьмем $p_\varepsilon(x, t) = \bar{p}_\varepsilon(x)t + \hat{p}_\varepsilon(x)(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$, и соответствующее решение обозначим через $u_\varepsilon(x, t)$. Если u_1 есть W -решение, u_2 есть H -решение и $u_1 \neq u_2$, то найдем линейный функционал $l \in (L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$, такой, что $l(u_1) \neq l(u_2)$. Рассмотрим аппроксимацию $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(x, t_\varepsilon)$, где t_ε определено из условия

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(u_\varepsilon(\cdot, t_\varepsilon)) = \frac{l(u_1) + l(u_2)}{2}.$$

Тогда $u \neq u_1$ и $u \neq u_2$ для $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\cdot, t_\varepsilon)$. Лемма доказана.

6. Рассмотрим модельный пример и аппроксимацию $p_\varepsilon \rightarrow p$, которая дает слабое решение u , отличное от H - и W -решений. В этом примере показатель (см. (1.6)) регулярен вне начала координат и по теореме 4.2

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \rightharpoonup |\nabla u|^p \text{ в } L^1(\Omega \setminus B_\delta), \quad B_\delta = \{|x| < \delta\}. \quad (4.7)$$

При этом сходимости $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \rightharpoonup |\nabla u|^p$ в $L^1(\Omega)$ нет. В самом деле, эта сходимость означала бы (см. (1.13)), что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla u dx,$$

т. е. u есть вариационное решение. Последнее невозможно, поскольку вариационные решения исчерпываются H - и W -решениями. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Отсюда и из (4.7) следует, что последовательность $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon}$ не является слабо компактной в $L^1(\Omega)$, а для предельной меры μ имеется представление $d\mu = |\nabla u|^p dx + d\mu^s$, где μ^s — нетривиальная мера, сосредоточенная в точке $x = 0$.

§5. Некоторые приложения

1. Начнем с известной задачи о термисторе. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma(\theta)-2} \nabla u) = \operatorname{div} g, & u|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta\theta = |\nabla u|^{\sigma(\theta)}, & \theta|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где измеримая на $[0, \infty)$ функция $\sigma(\theta)$ удовлетворяет условию

$$1 < \alpha \leq \sigma(\theta) \leq \beta \quad \text{и} \quad \beta < \alpha^* \quad \text{при} \quad \alpha < d. \quad (5.2)$$

Система (5.1) дает совместное описание электрического поля (u — потенциал этого поля) и температуры θ . Такие системы и особенно родственные им по структуре системы из гидромеханики привлекают большое внимание, см. [18]–[22]. Теорему существования решения ранее удалось доказать только при тех или иных условиях малости, например, когда константа Липшица функции σ достаточно мала. Обзор подобных результатов имеется в [24]. Развита выше техника предельного перехода позволяет освободиться от каких-либо требований малости. Введем регуляризованную систему

$$\begin{cases} \operatorname{div} A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) = \operatorname{div} g, & u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta\theta_\varepsilon = A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon, & \theta_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) = |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)-2} \nabla u_\varepsilon + \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2} \nabla u_\varepsilon$, $p_\varepsilon(x) = \sigma(\theta_\varepsilon(x))$.

Правая часть второго уравнения системы (5.3), т. е. $f \equiv A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon$, ограничена в $L^1(\Omega)$ в силу оценки (1.12). По L^1 -теории для лапласиана (см. [25]) имеем

$$\|\theta_\varepsilon\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq c(\gamma) \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall \gamma \in \left[1, \frac{d}{d-1}\right). \quad (5.4)$$

Без потери общности считаем, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,\alpha}$, $\theta_\varepsilon \rightharpoonup \theta$ в $W_0^{1,1}$ и $p_\varepsilon(x) \rightarrow p(x) = \sigma(\theta(x))$ п. в. Тогда по теореме 2.1 (см. предложение 1.2) предельная функция u есть слабое решение первого из уравнений системы (5.1). Перейдем к пределу во втором уравнении системы (5.3). Для этого перепишем его в виде

$$-\operatorname{div} \nabla \theta_\varepsilon = \operatorname{div}[(A_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) - g)u_\varepsilon] + g \cdot \nabla u_\varepsilon$$

и воспользуемся теоремой 2.1. Так как потоки слабо сходятся к потоку в $L^{\beta'}(\Omega)$, а $u_\varepsilon \rightarrow u$ *сильно* в $L^\beta(\Omega)$ (в силу условия (5.2)), то в смысле распределений

$$-\operatorname{div} \nabla \theta = \operatorname{div}[(|\nabla u|^{\sigma(\theta)-2} \nabla u - g)u] + g \cdot \nabla u.$$

Отметим, что предельный переход можно осуществить и непосредственно во втором уравнении системы (5.3) (без указанного преобразования), но тогда в правой части возникает мера μ :

$$-\operatorname{div} \nabla \theta = \mu = |\nabla u|^{\sigma(\theta)} + \mu^s.$$

Само это уравнение с мерой также понимается в смысле распределений.

Теорема 5.1. *Найдутся функции*

$$\begin{aligned} \theta &\in W_0^{1,\gamma}(\Omega) \quad \forall \gamma \in [1, d/(d-1)), \\ u &\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \quad p(x) = \sigma(\theta(x)), \end{aligned}$$

такие, что в смысле распределений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma(\theta)-2} \nabla u) &= \operatorname{div} g, \\ -\Delta\theta &= \operatorname{div}[(|\nabla u|^{\sigma(\theta)-2} - g)u] + g \cdot \nabla u = |\nabla u|^{\sigma(\theta)} + \mu^s. \end{aligned}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\sigma(\theta)} dx \leq \int_\Omega g \cdot \nabla u dx. \quad (5.5)$$

При этом, если в (5.5) имеет место равенство, то $\mu^s = 0$.

2. Рассмотрим известную парную систему из гидромеханики

$$\begin{cases} \operatorname{div}[(a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)-2}Du - u \otimes u)] = \operatorname{div} g + \nabla \pi, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta\theta + u \cdot \nabla\theta = a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)}, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Здесь u — вектор скорости, Du — симметрическая часть градиента ∇u , π — давление, θ — температура, $g = \{g_{ij}\}$ — симметрическая матрица, $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $u \otimes u = \{u_i u_j\}$, а функция $a(\theta)$ измерима, $0 < a_1 \leq a(\theta) \leq a_2 < \infty$, где a_1, a_2 — константы. Для определенности считаем, что $d = 2, 3$. Предполагаем, что $\sigma(\theta)$ удовлетворяет условию (5.2) с

$$\alpha > \frac{3d}{d+2}, \quad (5.7)$$

что связано с наличием инерциального слагаемого $\operatorname{div}(u \otimes u)$.

Введем регуляризованную систему

$$\begin{cases} \operatorname{div}[A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) - u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon] = \operatorname{div} g + \nabla \pi_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 \\ -\Delta\theta_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla\theta_\varepsilon = A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

в которой $A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) = a(\theta_\varepsilon)|Du_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)-2}Du_\varepsilon + \varepsilon|Du_\varepsilon|^{\beta-2}Du_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $p_\varepsilon(x) = \sigma(\theta_\varepsilon(x))$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ разрешимость этой задачи хорошо известна ([19], [22]). Из энергетического равенства

$$\int_{\Omega} A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon dx = \int_{\Omega} g \cdot Du_\varepsilon dx$$

выводится оценка вида (1.12), в которой ∇u_ε заменено на Du_ε . Из этой оценки и из неравенства Корна получаем, что последовательность u_ε ограничена в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, а последовательность «потоков» $A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon)$ ограничена в $L^{\beta'}(\Omega)$. Важно, что последовательность $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ компактна в $L^{\alpha'}$, как следует из условия (5.7) и теорем вложения. Требуется еще изучить последовательность давлений π_ε . Без ограничения общности предполагаем, что $\int_{\Omega} \pi_\varepsilon dx = 0$. Рассмотрим «полный поток»

$$w_\varepsilon = A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) - u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon - g - \pi_\varepsilon I, \quad I — \text{единичная матрица.}$$

Воспользуемся известным результатом Боговского [26]: для $h \in L^\beta(\Omega)$, $\int_{\Omega} h dx = 0$, найдется такой вектор $\varphi \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$, что $\operatorname{div} \varphi = h$, $\|\nabla \varphi\|_{L^\beta(\Omega)} \leq c_0 \|h\|_{L^\beta(\Omega)}$. Теперь из соотношения $\operatorname{div} w_\varepsilon = 0$ имеем

$$\int_{\Omega} \pi_\varepsilon h dx = \int_{\Omega} \pi_\varepsilon I \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (\pi_\varepsilon I - w_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi dx \leq c_1 \|h\|_{L^\beta},$$

так как $\|w_\varepsilon - \pi_\varepsilon I\|_{L^{\beta'}} \leq c_2$. Отсюда получаем неравенство $\|\pi_\varepsilon\|_{L^{\beta'}} \leq c_1$, т.е. ограниченность в $L^{\beta'}(\Omega)$ полного потока w_ε . В силу равенства $\pi_\varepsilon I \cdot \nabla u_\varepsilon = 0$ и отмеченной выше ограниченности последовательности $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ в $L^{\alpha'}(\Omega)$ последовательность $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ будет ограниченной в $L^1(\Omega)$ (тем самым проверено условие (iii) леммы 2.4). Правая часть последнего равенства системы (5.8), т.е. $f = A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon$, ограничена в L^1 . Позже мы убедимся, что оценка (5.4)

остаётся справедливой. Поэтому без потери общности считаем, что имеют место сходимости

$$\theta_\varepsilon \rightharpoonup \theta \text{ в } W_0^{1,\gamma}, \quad p_\varepsilon(x) = \sigma(\theta_\varepsilon(x)) \rightarrow p(x) = \sigma(\theta(x)) \text{ п. в.},$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W_0^{1,\alpha}, \quad u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \rightharpoonup u \otimes u \text{ в } L^{\alpha'},$$

$$A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \rightharpoonup z, \quad \pi_\varepsilon \rightharpoonup \pi \text{ в } L^{\beta'};$$

при этом $u \in W_0^{1,p(\cdot)}, z \in L^{p'(\cdot)}$. По лемме 2.4

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup (z - u \otimes u - g - \pi) \cdot \nabla u dx + d\mu^s,$$

поэтому

$$A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon = A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon \rightharpoonup z \cdot Du + d\mu^s.$$

Для любого замкнутого множества $K \subset \Omega \setminus S$, где S — носитель меры μ^s ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon dx \leq \int_K z \cdot Du dx,$$

и по лемме 3.3 заключаем, что $z = a(\theta)|Du|^{p-2}Du$. Это позволяет перейти к пределу в первом из уравнений системы (5.8). Далее, запишем

$$-\operatorname{div} \nabla \theta_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \operatorname{div}[(A_\varepsilon(x, Du_\varepsilon) - g)u_\varepsilon] + g \cdot Du_\varepsilon.$$

В левой части имеем сходимость $u_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon \rightharpoonup u \cdot \nabla \theta$ в $L^1(\Omega)$. Действительно, пользуясь условием (5.7) для $d = 2, 3$, получим, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^{(\alpha^*+d)/2}$ (в силу $\alpha^* > d$), а $\nabla \theta_\varepsilon \rightharpoonup \nabla \theta$ в $L^\gamma(\Omega)$, $\gamma = (\frac{\alpha^*+d}{2})' < \frac{d}{d-1}$. Переход к пределу в правой части основан на тех же аргументах, что и в рассмотренной выше задаче о термисторе.

Нам остаётся обосновать оценку (5.4) для решения второго уравнения в (5.8).

Последовательность соленоидальных векторов u_ε ограничена в L^{α^*} и $\alpha^* > d$ в силу условия (5.7). Поэтому справедливо представление $u_\varepsilon = \operatorname{div} G_\varepsilon$, в котором G_ε — кососимметрическая матрица, $G_\varepsilon \in W^{1,\alpha^*}(\Omega)$, $\|G_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq M$. Наше уравнение можно переписать в дивергентной форме

$$-\Delta \theta_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = -\operatorname{div}((I - G_\varepsilon)\nabla \theta_\varepsilon) = f,$$

и оценка (5.4) следует из результатов L^1 -теории [25].

Теорема 5.2. *Найдутся*

$$\theta \in W_0^{1,\gamma}(\Omega) \quad \forall \gamma \in [1, d/(d-1)),$$

$$u \in (W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))^d, \quad p = \sigma(\theta), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u \cdot \pi \in L^{\beta'}(\Omega),$$

такие, что в смысле распределений

$$\begin{cases} \operatorname{div}[a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)-2}Du - u \otimes u] = \operatorname{div} g + \nabla \pi, \\ -\Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = \operatorname{div}[(a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)-2}Du - g)u] + g \cdot Du = a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)} + \mu^s, \end{cases}$$

где μ^s — некоторая сингулярная мера в Ω . Кроме того, выполнено неравенство

$$\int_\Omega a(\theta)|Du|^{\sigma(\theta)} dx \leq \int_\Omega g \cdot Du dx. \quad (5.9)$$

При этом, если в (5.9) имеет место равенство, то $\mu^s = 0$.

§6. Модельный пример

1. Пусть $d = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ — единичный круг, а показатель p задан равенством (1.6). Координатные оси делят круг Ω на четыре сектора $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ в соответствии с естественной нумерацией четвертей плоскости. Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x) = (1 - r^2)\psi(x), \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_1, \\ \sin \theta & \text{при } x \in \Omega_2, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega_3, \\ \cos \theta & \text{при } x \in \Omega_4, \end{cases} \quad (6.1)$$

где r, θ — полярные координаты. Замечаем, что $|\nabla \psi_0| \leq 2$ на $\Omega_1 \cup \Omega_3$ и $|\nabla \psi_0| \leq 2r^{-1}$ на $\Omega_2 \cup \Omega_4$. Поэтому $\int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^{p(x)} dx < \infty$, т.е. $\psi_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Убедимся, что $\psi_0 \notin H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Допуская противное, найдем последовательность $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, такую, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq C < \infty, \quad \nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla \psi_0 \text{ в } L^\alpha(\Omega).$$

Отсюда следует, что семейство u_ε ограничено в $W^{1,\beta}(\Omega_1)$ и $W^{1,\beta}(\Omega_3)$. Поскольку $\beta > 2$, по теореме вложения Соболева это семейство равномерно гёльдеровово в замкнутой области $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_3$. Тогда и функция ψ_0 должна быть непрерывной в этой замкнутой области, что очевидным образом не имеет места.

Тем самым доказано, что показатель (1.6) нерегулярен в круге Ω . Этот результат известен давно ([3], [4]). По контрасту отметим также хорошо известный факт.

Лемма 6.1. Показатель (1.6) регулярен в кольце $\{0 < \delta < |x| < 1\}$.

2. Выше отмечалось, что функция $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_3$ и можно говорить о предельных значениях в точке $x = 0$ со стороны первой и третьей четверти.

Лемма 6.2. Функция $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ принадлежит подпространству $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда предельные значения совпадают.

Доказательство. Можно считать, что общее предельное значение равно нулю. Возьмем срезающую функцию

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \eta \equiv 0 \text{ при } |x| \leq 1/2, \quad \eta \equiv 1 \text{ при } |x| \geq 1,$$

и положим $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)u(x)$, $\eta_\varepsilon(x) = \eta(\varepsilon^{-1}x)$. Замечаем, что $u_\varepsilon \in H_0$ в силу леммы 6.1, и нам остается только доказать слабую сходимоть

$$\nabla u_\varepsilon = \eta_\varepsilon \nabla u + u \nabla \eta_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \text{ в } L^{p(\cdot)}, \quad (6.2)$$

так как пространство $L^{p(\cdot)}$ рефлексивно (см. [1]) и по лемме Мазура [13, гл. I, §1] найдется подходящая аппроксимация по норме. В свою очередь, для доказательства слабой сходимости (6.2) достаточно установить ограниченность семейства ∇u_ε в $L^{p(\cdot)}$, поскольку $\nabla u_\varepsilon(x) \rightarrow \nabla u(x)$ п.в. Ограниченность первого слагаемого $\eta_\varepsilon \nabla u$ очевидна, поэтому все сводится к ограниченности слагаемого $u \nabla \eta_\varepsilon$. По теореме вложения

$$|u(x)| \leq c |x|^{(1-2/\beta)} \text{ на } \Omega_1 \cap \Omega_3,$$

а градиент $\nabla\eta_\varepsilon$ сосредоточен в круге $B_\varepsilon = \{|x| < \varepsilon\}$. Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_3} |\nabla\eta_\varepsilon|^\beta |u|^\beta dx \leq c_1 \varepsilon^{-\beta} \varepsilon^2 \varepsilon^{\beta(1-2/\beta)} = c_1.$$

Далее, по теореме вложения $u \in L^{2\alpha/(2-\alpha)}(\Omega_2 \cup \Omega_4)$, и по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2 \cup \Omega_4} |\nabla\eta_\varepsilon|^\alpha |u|^\alpha dx &\leq c_2 \varepsilon^{-\alpha} \int_{B_\varepsilon} |u|^\alpha dx \\ &\leq c_2 \varepsilon^{-\alpha} \left(\int_{B_\varepsilon} |u|^{2\alpha/(2-\alpha)} dx \right)^{(2-\alpha)/2} |B_\varepsilon|^{\alpha/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Теорема 6.3. *Пространство $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ имеет коразмерность 1 в $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть u — произвольная функция из $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, c_1, c_3 — предельные значения со стороны секторов Ω_1 и Ω_3 соответственно и $\lambda = c_1 - c_3$. Тогда по лемме 6.2 имеем $u - \lambda\psi_0 \in H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, что и требуется.

3. Укажем нетривиальный функционал, равный нулю на $H_0^{1,p(\cdot)}$. Положим

$$w(x) = w(x_1, x_2) = \psi(-x_2, x_1), \quad b(x) = \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x_2}, \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\}. \quad (6.3)$$

По построению (см. также (6.1)) вектор b принадлежит пространству Орлича $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Кроме того, вектор b соленоиден, а именно $\operatorname{div} b = 0$ в смысле теории распределений: $\int_\Omega b \cdot \nabla \varphi dx = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Действительно, так как $w \in W^{1,1}(\Omega)$, то

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx = \int_\Omega w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx = 0.$$

Отсюда следует, что функционал

$$l(\varphi) = \int_\Omega b \cdot \nabla \varphi dx$$

непрерывен на $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ и аннулируется на $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Кроме того, по построению

$$b(x) \cdot \nabla \psi(x) \equiv 0 \quad \text{п. в. на } \Omega. \quad (6.4)$$

Проверим, что

$$l(\psi_0) = \int_\Omega b \cdot \nabla \psi_0 dx = -1. \quad (6.5)$$

В силу (6.4) выполнено равенство $b \cdot \nabla \psi_0 = -b \cdot \nabla u$, где $u = r^2 \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Поэтому достаточно воспользоваться следующим предложением.

Предложение 6.4. *Если $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = \psi$, то $\int_\Omega b \cdot \nabla u dx = 1$.*

Доказательство. Если ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega = \{|x| = 1\}$, то

$$b \cdot \nu = -\frac{\partial w}{\partial x_2} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial x_1} \sin \theta = -\frac{\partial w}{\partial \theta},$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot b \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi b \cdot \nu \, ds = -\int_0^{\pi/2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = 1,$$

что и требуется.

4. Покажем, что множество слабых решений не является выпуклым. Рассмотрим задачу Дирихле (1.1) с $g = b$, где b — определенный в (6.3) вектор. Поскольку вектор b соленоиден, H -решение равно нулю. Равенство (6.5) показывает, что W -решение не равно нулю. Обозначим его через u . Проверим, что tu не есть слабое решение при малых $t > 0$. Допуская противное, имеем

$$\int_{\Omega} |t\nabla u|^{p-2} t \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} b \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$t^{\beta-2} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_3} |\nabla u|^{\beta-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + t^{\alpha-2} \int_{\Omega_2 \cup \Omega_4} |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_2 \cup \Omega_4} |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0, \quad (6.6)$$

где использован предельный переход при $t \rightarrow 0$. Так как $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, то равенство (6.6) по непрерывности выполнено для любой $\varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Отсюда следует, что $u = 0$ на $\Omega_2 \cup \Omega_4$. Но тогда предельные значения функции u со стороны секторов Ω_1 и Ω_3 также равны нулю, т.е. $u \in H_0^{1,p(\cdot)}$, что невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Edmunds, J. Rákoshik, *Sobolev embeddings with variable exponent*, Studia Math., **143**:3 (2000), 267–293.
- [2] X. Fan, J. Shen, D. Zhao, *Sobolev embedding theorems for $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl., **262**:2 (2001), 749–760.
- [3] В. В. Жиков, *Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости*, Изв. АН СССР, сер. матем., **50**:4 (1986), 675–710.
- [4] В. В. Жиков, *О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах*, Матем. сб., **183**:8 (1992), 47–84.
- [5] В. В. Жиков, *Об эффекте Лаврентьева*, Докл. РАН, **345**:1 (1995), 10–14.
- [6] В. В. Жиков, *О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **310** (2004), 67–80.
- [7] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.
- [8] L. Tartar, *Homogénéisation*, Cours Peccot au Collège de France, Paris, 1977.
- [9] F. Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. Fis. Mat., **5**:3 (1978), 489–507.
- [10] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
- [11] В. В. Жиков, *К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях*, Докл. РАН, **420**:3 (2008), 300–305.
- [12] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

- [13] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [14] Ю. Г. Решетняк, *Общие теоремы о полунепрерывности и о сходимости с функционалом*, Сиб. матем. ж., **8**:5 (1967), 1051–1069.
- [15] В. В. Жиков, *К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях*, Функц. анализ и его прил., **35**:1 (2001), 23–39.
- [16] С. Е. Пастухова, *О вырожденных уравнениях монотонного типа: эффект Лаврентьева и вопросы достижимости*, Матем. сб., **198**:10 (2007), 89–118.
- [17] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.
- [18] S. D. Howison, J. F. Rodrigues, M. Shillor, *Stationary solutions to the thermistor problem*, J. Math. Anal. Appl., **174**:2 (1993), 573–588.
- [19] J. Baranger, A. Mikelić, *Stationary solutions to a quasi-Newtonian flow with viscous heating*, Math. Models Methods Appl. Sci., **5**:6 (1995), 725–738.
- [20] V. V. Zhikov, *On some variational problems*, Russian J. Math. Phys., **5**:1 (1997), 105–116.
- [21] В. В. Жиков, *Об оценках типа Мейерса для решений нелинейного уравнения Стокса*, Дифференциальные уравнения, **33**:1 (1997), 107–114.
- [22] M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [23] S. N. Antontsev, J. F. Rodrigues, *On stationary thermo-rheological viscous flows*, Ann. Univ. Ferrara, **52**:1 (2006), 19–36.
- [24] В. В. Жиков, *Разрешимость некоторых пар связанных эллиптических уравнений*, Докл. РАН, **418**:4 (2008), 447–452.
- [25] L. Boccardo, Th. Gallouet, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal., **87**:1 (1989), 149–169.
- [26] М. Е. Боговский, *Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды*, Докл. АН СССР, **248**:5 (1979), 1037–1040.

Владимирский государственный
педагогический университет
e-mail: zhikov@vladggu.ru

Поступило в редакцию
9 ноября 2007 г.