Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Д. В. Занин, Е. М. Семёнов,
Ф. А. Сукочев, Оператор Круглова и операторы,
определяемые случайными перестановками,
Функц. анализ и его прил., 2009, том 43, вы-
пуск 2, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:37:38

Оператор Круглова и операторы, определяемые случайными перестановками*

© 2009. С. В. АСТАШКИН, Д. В. ЗАНИН, Е. М. СЕМЕНОВ, Ф. А. СУКОЧЕВ

Свойство и оператор Круглова играют важную роль при изучении геометрических свойств г.и. пространств. В работе доказано, что ограниченность оператора Круглова в г.и. пространстве эквивалентна равномерной ограниченности в этом пространстве операторов, порожденных случайными перестановками. Показано также, что не существует минимального г.и. пространства со свойством Круглова.

§1. Введение

Пусть f — случайная величина (измеримая функция), определенная на $[0, 1]$. Обозначим через $\pi(f)$ случайную величину на $[0, 1]$ с тем же распределением, что и у $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i — независимые копии случайной величины f , а N — пуассоновская случайная величина с параметром 1, независимая от последовательности $\{f_i\}$.

Определение. Говорят, что г.и. пространство E на $[0, 1]$ (определение см. в §2) обладает свойством Круглова ($E \in \mathbb{K}$), если

$$f \in E \iff \pi(f) \in E.$$

Это свойство было введено и изучалось Браверманом [1], использовавшим при этом некоторые вероятностные конструкции и идеи Круглова [2]. В [3] (см. также [4]) для его изучения был предложен операторный подход.

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность измеримых попарно не пересекающихся подмножеств отрезка $[0, 1]$ и $\text{mes } B_n = 1/(e \cdot n!)$ (mes — мера Лебега на $[0, 1]$). Если $f \in L_1[0, 1]$, то

$$Kf(\omega_0, \omega_1, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \chi_{B_n}(\omega_0); \quad (1)$$

здесь и всюду далее χ_B — характеристическая функция множества B . Тогда K — положительный линейный оператор, $K: L_1[0, 1] \rightarrow L_1(\Omega, P)$, где $(\Omega, P) = \prod_{n=0}^\infty ([0, 1], \text{mes})$. Так как распределения случайных величин Kf и $\pi(f)$ одинаковы [3], то Kf можно рассматривать как явное представление случайной величины $\pi(f)$. Поэтому, в частности, г.и. пространство E обладает свойством Круглова тогда и только тогда, когда K действует (ограниченным образом) из E в $E(\Omega, P)$ [3].

*Первый автор частично поддержан грантом РФФИ №07-01-96603; третий автор частично поддержан грантом РФФИ №08-01-00226-а; четвертый автор частично поддержан Австралийским научным советом.

Через Kf мы также будем обозначать другую случайную величину, определенную на $[0, 1]$ и имеющую то же распределение, что и величина, введенная формулой (1) (см. [3]). Обозначим через f^* перестановку функции $|f|$ в убывающем порядке, т. е. $f^*(t)$ не возрастает на $[0, 1]$ и равноизмерима с $|f(t)|$. Если $f \in L_1[0, 1]$, $\{B_n\}$ — указанная выше последовательность подмножеств отрезка $[0, 1]$ и $f_{n,1}, \dots, f_{n,n}, \chi_{B_n}$ — набор независимых функций для каждого $n \in \mathbb{N}$, такой, что $f_{n,k}^* = f^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \dots, n$, то $Kf(t)$ определяется как некоторая перестановка функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{n,k}(t) \chi_{B_n}(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (2)$$

Подчеркнем, что K — это линейный оператор, действующий из пространства $L_1[0, 1]$ в пространство $L_1(\Omega, P)$. Когда мы говорим, что K ограничен в г.и. пространстве X на $[0, 1]$, то эта ограниченность понимается как ограниченность линейного отображения K из пространства $X[0, 1]$ в пространство $X(\Omega, P)$. Из определений оператора K и г.и. пространства сразу следует (см. также [1, 1.6, с. 11]), что $\|Kf\|_E \geq e^{-1} \|f\|_E$ ($f \in E$) для любого г.и. пространства E . В [3] было показано, что оператор K играет важную роль при получении оценок норм сумм независимых функций через нормы сумм их дизъюнктивных копий (эти оценки имеют многочисленные применения). На этом пути в [3] было найдено усиление известных результатов Джонсона и Шехтмана [5].

Хорошо известно (см., например, [2] или [1]), что пространство Орлича $\exp L_1$, построенное по функции $e^t - 1$, обладает свойством Круглова. Отсюда следует, что то же самое верно и для его сепарабельной части $(\exp L_1)_0$ (определения см. ниже). Действительно, так как K ограничен в $\exp L_1$, то $K((\exp L_1)_0) \subset K(L_\infty)$ (замыкание берется относительно нормы в $\exp L_1$). Одновременно $K(L_\infty) \subset (\exp L_1)_0$ [3, теорема 4.4]. Следовательно, ввиду замкнутости множества $(\exp L_1)_0$ в $\exp L_1$ оператор K ограничен в $(\exp L_1)_0$. Заметим, что для всех известных до сих пор г.и. пространств E со свойством Круглова имело место вложение $E \supset (\exp L_1)_0$. Это, а также некоторые результаты работы [3] (см. теорему 7.2) делали весьма правдоподобной гипотезу о том, что $(\exp L_1)_0$ — минимальное среди г.и. пространств со свойством Круглова. Тем не менее в первой части работы мы покажем, что это неверно. Более того, будет доказано, что для всякого г.и. пространства $E \in \mathbb{K}$ существует пространство Марцинкевича $M_\psi \subsetneq X$, также обладающее свойством Круглова (следствие 3). В определенном смысле совершенно иначе обстоит дело с обладающими свойством Круглова пространствами Лоренца: любое такое пространство содержит $\exp L_1$ (теорема 4).

Квапень и Шютт в работе [6] исследовали свойства случайных перестановок, применив их затем к изучению геометрии банаховых пространств. Операторный подход к этим вопросам был развит в работах [7] и [8] и позволил обобщить результаты Квапеня и Шютта. Там было введено следующее семейство операторов. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и S_n — множество перестановок чисел $1, \dots, n$. Отождествим S_n с множеством $\{1, \dots, n!\}$ (произвольным образом) и определим сначала оператор A_n , действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n!}$: если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и π — произвольная перестановка из S_n , то компонента вектора $A_n x$, соответствующая

перестановке π (отождествляемой с элементом множества $\{1, \dots, n!\}$), определяется по формуле

$$(A_n x)_\pi := \sum_{i: \pi(i)=i} x_i. \quad (3)$$

Для функции $x(t) \in L_1[0, 1]$ определим вектор $B_n x$ длины n с координатами $(B_n x)_i = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} x(t) dt$, $i = 1, \dots, n$. Оператор B_n имеет правый обратный C_n ($B_n C_n x = x$ для $x \in \mathbb{R}^n$), сопоставляющий каждому вектору длины n функцию, постоянную на отрезках $[(i-1)/n, i/n]$. Наконец, определим оператор

$$T_n = C_n! A_n B_n.$$

Ясно, что T_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ — линейный положительный оператор, действующий из $L_1[0, 1]$ в пространство ступенчатых функций. Нетрудно показать также, что

$$\|T_n x\|_{L_1} = \|x\|_{L_1} \quad (4)$$

для всех $x \in L_1[0, 1]$, $x \geq 0$. Через T_n мы будем также иногда обозначать оператор $C_n! A_n$, определенный аналогичным образом на $\mathbb{R}^n$ (это не приведет к недоразумению). Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и E — произвольное г. i. пространство на $[0, 1]$, то $\|x\|_E$ понимается как

$$\|C_n x\|_E = \left\| \sum_{k=1}^n x_k \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} \right\|_E.$$

В работе [8] было доказано, что равномерная ограниченность операторов, порожденных случайными перестановками, на множестве квадратных матриц сводится к аналогичному свойству операторов T_n . Одновременно обнаружилось интересное обстоятельство: несмотря на внешнее отсутствие какой-либо связи между операторами K и T_n , критерии ограниченности оператора K и равномерной ограниченности операторов T_n ($n \in \mathbb{N}$) в пространстве Лоренца Λ_φ , найденные в [3] и [8] соответственно, оказались одинаковыми. А именно, оба они состоят в выполнении одного и того же условия:

$$M := \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{t^k}{k!}\right) < \infty. \quad (5)$$

В связи с этим возникла гипотеза о том, что ограниченность оператора K в произвольном г. i. пространстве E также эквивалентна условию $\sup_n \|T_n\|_E < \infty$. Вторая часть работы посвящена доказательству этого утверждения. Оно основано на комбинаторных рассуждениях и связано с получением оценок для соответствующих функций распределения. Доказанный результат приводит к ряду полезных следствий как для оператора K , так и для операторов T_n . В частности, следствие 13 показывает (уточняя теорему 19 из [8]), что равномерная ограниченность операторов T_n в экспоненциальных пространствах Орлича $\exp L_p$ эквивалентна тому, что $p \leq 1$.

Авторы выражают благодарность рецензенту, предложения и замечания которого позволили улучшить окончательный текст статьи, в частности, упростить определение операторов T_n и доказательство леммы 7.

§2. Определения и обозначения

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным*, или *симметричным*, или г.и. пространством, если

- 1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функции x и функции $y \in E$, т.е. равенства

$$\text{mes}\{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\} = \text{mes}\{t \in [0, 1] : |y(t)| > \tau\} \quad (\tau > 0),$$

следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Для любого г.и. пространства E имеют место непрерывные вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$ и, если $\|\chi_{(0,1)}\|_E = 1$, то $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty}$ ($x \in L_\infty$). Для каждого $\tau > 0$ оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \chi_{[0, \min(1, \tau)]}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ограничен в E и $\|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$.

Пространство E' измеримых функций x на $[0, 1]$, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_0^1 x(t)y(t) dt < \infty,$$

называется двойственным к E пространством; оно также является г.и. пространством. Следуя [9, 2.а.1], мы будем предполагать, что E сепарабельно или совпадает со своим вторым двойственным пространством E'' . Тогда E'' в обоих случаях содержит E как замкнутое подпространство и вложение $E \subset E''$ изометрично. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^* . Через E_0 будет обозначаться сепарабельная часть г.и. пространства E , т.е. замыкание в E пространства L_∞ . Пространство E_0 совпадает с L_∞ , если и только если $E = L_\infty$. В случае когда $E \neq L_\infty$, E_0 является сепарабельным г.и. пространством.

Напомним, что слабая сходимость распределений измеримых на $[0, 1]$ функций $x_n(t)$ к распределению функции $x(t)$ ($x_n \Rightarrow x$) означает, что для любой непрерывной и ограниченной на $(0, \infty)$ функции $y(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) d \text{mes}\{s : x_n(s) < t\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) d \text{mes}\{s : x(s) < t\}.$$

Если E есть г.и. пространство, $x_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}$), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E = C < \infty$ и $x_n \Rightarrow x$, то $x \in E''$ и $\|x\|_{E''} \leq C$ [1, предложение 1.5].

На множестве суммируемых функций вводится отношение полуупорядоченности $\prec$, играющее важную роль в теории г.и. пространств. Мы будем писать $x \prec y$, если

$$\int_0^\tau x^*(t) dt \leq \int_0^\tau y^*(t) dt$$

для всех $\tau \in [0, 1]$. Здесь и далее $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная слева перестановка функции $|x(t)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : \text{mes}\{s \in [0, 1] : |x(s)| > \tau\} < t\} \quad (0 < t \leq 1).$$

Если $x \prec y$ и y принадлежит некоторому г.и. пространству E , то $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Приведем наиболее важные примеры г. i. пространств. Если $M(u)$ — возрастающая выпуклая на $[0, \infty)$ функция, $M(0) = 0$, то через L_M будет обозначаться пространство Орлича с нормой

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Функция $M_p(u) = e^{u^p} - 1$ выпукла при $p \geq 1$ и эквивалентна некоторой выпуклой функцией при $0 < p < 1$. Пространство L_{M_p} будет обозначаться через $\exp L_p$.

Если $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, то Λ_φ — пространство Лоренца с нормой

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t),$$

а M_φ — пространство Марцинкевича с нормой

$$\|x\|_{M_\varphi} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x^*(s) ds.$$

Все изложенные выше сведения о г. i. пространствах содержатся в монографиях [9], [10].

Всюду далее $\text{supp } f$ — носитель функции f , т.е. множество $\{t : f(t) \neq 0\}$. Кроме того, мы пишем $F \asymp G$, если $C^{-1}F \leq G \leq CF$, где константа $C > 0$ не зависит от аргументов величин F и G . И наконец, через $|A|$ будет обозначаться количество элементов конечного множества A .

§3. Пространства Марцинкевича и Лоренца «вблизи» $\exp L_1$

Теорема 1. *Существует такое семейство пространств Марцинкевича $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{0 < \varepsilon < 1}$, что $M_{\psi_\varepsilon} \subset M_{\psi_\delta}$ для всех $0 < \varepsilon \leq \delta < 1$ и что*

- 1) $M_{\psi_\varepsilon} \in \mathbb{K}$, $0 < \varepsilon < 1$;
- 2) $M_{\psi_\varepsilon} \subset E$ для каждого г. i. пространства $E \in \mathbb{K}$ и всех достаточно малых ε ;
- 3) функции ψ_ε попарно не эквивалентны, точнее,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon(t)}{\psi_\delta(t)} = 0, \quad \text{если } 0 < \varepsilon < \delta < 1; \quad (6)$$

- 4) $M_{\psi_\varepsilon} \subsetneq (\exp L_1)_0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Для доказательства нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 2. *Для произвольной функции $f \in L_1[0, 1]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(\text{supp } K^n f) = 0.$$

Доказательство. Так как оператор K положителен, можно считать, что $f \geq 0$ и что $\text{mes}(\text{supp } f) = 1$. Тогда если $a_n := \text{mes}\{t : K^n f(t) = 0\}$ ($n \in \mathbb{N}$), то по определению оператора K (см. соотношение (2)) $a_1 = 1/e$ и

$$a_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n^k}{k!} = e^{a_n - 1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает и $a_n \in (0, 1)$. Так как $f(x) := e^{x-1} - x$ убывает на $[0, 1]$, то функция e^{x-1} имеет на этом отрезке единственную неподвижную точку $x = 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, и утверждение доказано. $\square$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции $h_n = (K^n 1)^*$, $n \geq 0$. Так как оператор K переводит равноизмеримые функции в равноизмеримые, то

$$(Kh_n)^* = h_{n+1}. \quad (7)$$

Далее, по лемме 2 $\text{mes}(\text{supp } h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, значит, ряд

$$g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n \quad (8)$$

сходится всюду на $(0, 1]$ для каждого $\varepsilon > 0$, а функция g_ε убывает. Кроме того, из определения оператора K (см. (2)) следует, что $\|K\|_{L_1} = 1$. Поэтому если $0 < \varepsilon < 1$, то ряд (8) сходится в L_1 и $g_\varepsilon \in L_1$. Покажем теперь, что утверждения теоремы справедливы для семейства $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$, где $\psi_\varepsilon(t) = \int_0^t g_\varepsilon(s) ds$ ($0 \leq t \leq 1$).

1. Докажем, что оператор K ограничен в M_{ψ_ε} . Так как крайние точки единичного шара в этом пространстве равноизмеримы с функцией g_ε [11], то для этого достаточно показать, что $Kg_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$. Ввиду ограниченности оператора K в L_1

$$Kg_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Kh_n \prec \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_{n+1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n = \frac{1}{\varepsilon} g_\varepsilon,$$

где первое неравенство вытекает из (7) и хорошо известного свойства полунорядоченности Харди–Литтлвуда (см., например, [10, §2.2]). Отсюда следует, что $Kg_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$.

2. Предположим теперь, что $E \in \mathbb{K}$. Тогда, как уже отмечалось, $C = \|K\|_{E \rightarrow E} < \infty$. Очевидно, что $\|h_n\|_E \leq C^n \|1\|_E$. Следовательно, для всех $\varepsilon < C^{-1}$ ряд (8) сходится в E и $g_\varepsilon \in E$. Кроме того, так как пространство E сепарабельно или $E = E''$, то из $x \in E$ и $y \prec x$ следует, что $y \in E$ и $\|y\|_E \leq \|x\|_E$. Таким образом, вместе с g_ε весь единичный шар пространства Марцинкевича M_{ψ_ε} содержится в E , откуда вытекает, что $M_{\psi_\varepsilon} \subset E$.

3. Пусть, как и ранее, функция g_ε определяется соотношением (8) и $0 < \varepsilon < \delta$. Так как в силу доказательства теоремы 7.2 в [3]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_{n+1}(t)}{h_n(t)} = \infty,$$

то для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\delta(t)} &= \limsup_{t \rightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t) \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n h_n(t) \right)^{-1} = \dots \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t) \right) \cdot \left(\sum_{n=m}^{\infty} \delta^n h_n(t) \right)^{-1} \leq \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^m. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{t \rightarrow 0} g_\varepsilon(t)/g_\delta(t) = 0$, откуда следует (6).

4. Как уже говорилось во введении, K ограниченно действует в пространстве $(\exp L_1)_0$. Поэтому достаточно применить уже доказанные второе и третье утверждения. $\square$

Пусть $\varphi_n(t) = \int_0^t h_n(s) ds$ ($0 \leq t \leq 1$) и M_{φ_n} — пространство Марцинкевича, порожденное этой функцией. Тогда $M_{\varphi_n} \subset M_{\varphi_{n+1}} \subset (\exp L_1)_0$ ($n = 1, 2, \dots$), и в определенном смысле пространства M_{φ_n} можно считать «приближениями» пространства $(\exp L_1)_0$. В работе [3] (см. теорему 7.2) доказано, что для любого г.и. пространства $E \in \mathbb{K}$ и всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место вложение $M_{\varphi_n} \subset E$. В связи с этим возникла гипотеза о том, что $(\exp L_1)_0$ — наименьшее среди г.и. пространств со свойством Круглова. Тем не менее следующее утверждение, вытекающее из только что доказанной теоремы, показывает, что эта гипотеза не верна.

Следствие 3. *Для любого г.и. пространства $E \in \mathbb{K}$ существует такое г.и. пространство $F \in \mathbb{K}$, что $F \subsetneq E$.*

Покажем, что в отличие от пространств Марцинкевича все пространства Лоренца со свойством Круглова лежат «по одну сторону» от $\exp L_1$.

Теорема 4. *Пусть φ — возрастающая вогнутая на $[0, 1]$ функция, $\varphi(0) = 0$. Если $\Lambda_\varphi \in \mathbb{K}$, то $\Lambda_\varphi \supset \exp L_1$.*

Здесь мы также начнем с леммы.

Лемма 5. *Если возрастающая вогнутая на $[0, 1]$ функция φ , $\varphi(0) = 0$, удовлетворяет условию (5), то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}) \leq A\varphi(1), \quad (9)$$

где $A > 0$ зависит лишь от константы M из (5).

Доказательство. Ввиду (5) для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-ij} j^{-j}) \leq M\varphi(2^{-i})$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j(i+\lceil \log_2 j \rceil)}) \leq M\varphi(2^{-i}). \quad (10)$$

Прямые оценки показывают, что величина

$$\alpha_n := |\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : j(i + \lceil \log_2 j \rceil) \leq n\}|$$

удовлетворяет соотношению $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n/n = 0$. Поэтому $\alpha_n \geq (M+1)n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и всех $n \geq m$. Так как функция φ возрастает, то отсюда и из (10) для произвольного $l > m$ следует

$$(M+1) \sum_{n=m}^l \varphi(2^{-n}) \leq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j(i+\lceil \log_2 j \rceil)}) \leq M \sum_{i=1}^l \varphi(2^{-i}),$$

откуда

$$\sum_{n=m}^l \varphi(2^{-n}) \leq M \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(2^{-i}).$$

Неравенство (9) является теперь непосредственным следствием того, что $l > m$ произвольно, а m не зависит от φ . $\square$

Доказательство теоремы 4. Как уже отмечалось во введении, условие $\Lambda_\varphi \in \mathbb{K}$ эквивалентно соотношению (5) [3]. Поэтому по той же доказанной лемме выполнено неравенство (9). Кроме того, ввиду [12]

$$\|x\|_{\exp L_1} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) \log_2^{-1}(2/t),$$

и, значит, для доказательства вложения $\Lambda_\varphi \supset \exp L_1$ достаточно показать, что $\log_2(2/t) \in \Lambda_\varphi$. Но последнее вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \|\log_2(2/t)\|_{\Lambda_\varphi} &= \int_0^1 \log_2(2/t) d\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \log_2(2/t) d\varphi(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(\varphi(2^{-k+1}) - \varphi(2^{-k})) = 2\varphi(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}) < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

§4. Оценки функций распределения

Далее для нас будет полезна следующая аппроксимация функции Kf , где f — произвольная измеримая функция на $[0, 1]$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $g_m(t) = \sigma_{1/m} f(t)$ и $\{h_{m,i}\}_{i=1}^m$ — набор независимых функций, равноизмеримых с функцией g_m . Тогда последовательность

$$H_m f(t) = \sum_{i=1}^m h_{m,i}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (11)$$

при $m \rightarrow \infty$ слабо сходится (в смысле сходимости распределений) к Kf (см. [1, 1.6, с. 11]) или [3, теорема 3.5].

В частности, если $n \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq n$) и

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (12)$$

то

$$g_m(t) = \sigma_{\frac{1}{m}} f_a(t) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{(\frac{k-1}{nm}, \frac{k}{nm})}(t) \quad (m \in \mathbb{N}).$$

В этом случае мы положим

$$H_m a(t) := H_m f_a(t) = \sum_{i=1}^m h_{m,i}(t). \quad (13)$$

Кроме того, через $\text{Ch}(r)$ будет обозначаться число перестановок π множества $\{1, \dots, r\}$, таких, что $\pi(i) \neq i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Как известно (см., например, [13, с. 20]),

$$\frac{1}{3} r! \leq \text{Ch}(r) \leq r! \quad (r \in \mathbb{N}). \quad (14)$$

Сравним сначала функции $H_m a$ и $T_{nm} b$, где

$$b = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_m, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_m, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_m).$$

Лемма 6. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$

$$\text{mes}\{t : H_m a(t) > \tau\} \leq 3 \text{mes}\{t : T_{nm} b(t) > \tau\}.$$

Доказательство. Функция $H_m a(t)$ (соответственно $T_{nm} b(t)$) принимает лишь значения вида $\sum_{i=1}^n k_i a_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n k_i \leq m$ (соответственно $\sum_{i=1}^n k_i \leq mn$). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\text{mes}\left\{t : H_m a(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} \leq 3 \text{mes}\left\{t : T_{nm} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\}$$

для любого набора $k_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n k_i = q \leq m$. Заметим также, что достаточно рассмотреть случай, когда

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i \neq \sum_{i=1}^n k'_i a_i \text{ при условии, что } (k_1, \dots, k_n) \neq (k'_1, \dots, k'_n).$$

Поэтому $H_m a(t)$ равна сумме $\sum_{i=1}^n k_i a_i$ лишь тогда, когда ровно k_i (соответственно $m - q$) из функций $h_{m,j}(t)$ ($j = 1, \dots, m$) обращаются в a_i (соответственно в 0). Так как $h_{m,j}$ попарно независимы, то

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{t : H_m a(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &= C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-q} \left(\frac{1}{mn}\right)^{k_1 + \dots + k_n} \\ &\leq C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} \left(\frac{1}{mn}\right)^q, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} = \frac{m!}{(m-q)! k_1! \dots k_n!}.$$

С другой стороны, ввиду (3) и (14)

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{t : T_{mn} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &= C_m^{k_1} \dots C_m^{k_n} \text{Ch}(mn - q) \frac{1}{(mn)!} \\ &\geq \frac{(m!)^n (mn - q)!}{3(m - k_1)! \dots (m - k_n)! k_1! \dots k_n! (mn)!}. \end{aligned}$$

Так как $(m - k_1)! \dots (m - k_n)! \leq (m!)^{n-1} (m - q)!$ и $(mn - q)! / (mn)! \geq 1 / (mn)^q$, то

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{t : T_{mn} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &\geq \frac{m! (mn - q)!}{3k_1! \dots k_n! (m - q)! (mn)!} \\ &\geq \frac{m!}{3(m - q)! k_1! \dots k_n!} \cdot \frac{1}{(mn)^q}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (15) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 7. Если $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $k \leq n$, то

$$\frac{(n-k)!}{n!} \leq 2 \frac{(k-1)!}{n^k}.$$

Доказательство. Так как $j(n-j) > n$ при $2 \leq j \leq n-2$, то

$$\frac{n^k (n-k)!}{n! (k-1)!} = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n}{j(n-j)} \leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 < 2. \quad \square$$

Продолжим начатое в лемме 6 изучение взаимосвязей между функциями распределения случайных величин $T_n a$ и $H_m a$ (см. соотношения (3) и (13)). В отличие от оценки, доказанной в лемме 6 для любых m, n , противоположное неравенство можно получить только асимптотически при $m \rightarrow \infty$.

Лемма 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \geq 0$ и $\tau > 0$. Тогда для достаточно больших $m \in \mathbb{N}$

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leq 12 \text{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}.$$

Доказательство. Предполагая сначала, что $n \geq 4$, введем следующие обозначения: $A = \{1, \dots, n\}$ и $S(U) := \sum_{j \in U} a_j$ для произвольного $U \subset A$. Без ограничения общности можно считать, что $n = 2s$ ($s \in \mathbb{N}$), $a_i > 0$ и $S(U_1) \neq S(U_2)$, если $U_1 \neq U_2$. Кроме того, пусть $\mathcal{A}_i$ — семейство всех $U \subset A$, таких, что $|U| = i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ состоит из всех непустых подмножеств множества A . Представим семейство $\mathcal{A}$ несколько иначе.

Пусть $U \in \mathcal{A}_k$ для некоторого $k = 1, \dots, s$. Рассмотрим семейство $\mathcal{A}_U$ (соответственно $\mathcal{B}_U$), состоящее из всех множеств $V \subset A$, таких, что $V \supset U$, $V \in \mathcal{A}_{2k}$ (соответственно $V \in \mathcal{A}_{2k-1}$) и $S(V \setminus U) \leq S(U)$. Так как

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}_k} \mathcal{A}_U = \mathcal{A}_{2k} \quad \text{и} \quad \bigcup_{U \in \mathcal{A}_k} \mathcal{B}_U = \mathcal{A}_{2k-1} \quad (k = 1, \dots, s),$$

то

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^s \bigcup_{U \in \mathcal{A}_k} (\mathcal{A}_U \cup \mathcal{B}_U). \quad (16)$$

Из определения семейств $\mathcal{A}_U$ и $\mathcal{B}_U$ следует также, что для $V \in \mathcal{A}_U \cup \mathcal{B}_U$

$$S(U) \leq S(V) \leq 2S(U). \quad (17)$$

Заметим, что $T_n a(t)$ — ступенчатая функция со значениями $S(V)$, где $V \in \mathcal{A}$. При этом, если $|V| = r$, то ввиду (14)

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) = S(V)\} = \frac{\text{Ch}(n-r)}{n!} \leq \frac{(n-r)!}{n!}.$$

Кроме того, если $|U| = k$ ($k = 1, \dots, s$), то

$$|\mathcal{A}_U| \leq C_{n-k}^k = \frac{(n-k)!}{k! (n-2k)!}$$

и, аналогично,

$$|\mathcal{B}_U| \leq C_{n-k}^{k-1} = \frac{(n-k)!}{(k-1)! (n-2k+1)!}.$$

Поэтому из (16) и (17) получаем

$$\begin{aligned}
 \text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} &\leq \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k} \left(\sum_{V \in \mathcal{A}_U, S(V) > \tau} \text{mes}\{t : T_n a(t) = S(V)\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{V \in \mathcal{B}_U, S(V) > \tau} \text{mes}\{t : T_n a(t) = S(V)\} \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k, S(U) > \tau/2} \left(\frac{(n-2k)!}{n!} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(n-2k+1)!}{n!} \cdot \frac{(n-k)!}{(k-1)!(n-2k+1)!} \right) \\
 &\leq 2 \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k, S(U) > \tau/2} \frac{(n-k)!}{(k-1)!n!}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Оценим теперь снизу функцию распределения случайной величины $H_m a(t)$. Для каждого $U \in \mathcal{A}_k$, $S(U) > \tau/2$, через F_U обозначим множество всех $t \in [0, 1]$, для которых найдутся множество $W \subset \{1, \dots, m\}$ и взаимно однозначное соответствие $\sigma: W \rightarrow U$, такие, что $|W| = k$ (считаем, что $m \geq n$) и $h_{m,j}(t) = a_{\sigma(j)}$, если $j \in W$, и $h_{m,j}(t) = 0$ для всех $j \notin W$. Тогда, прежде всего, для $t \in F_U$

$$H_m a(t) = \sum_{j=1}^m h_{m,j}(t) = S(U) > \frac{\tau}{2}. \tag{19}$$

Кроме того, ввиду независимости функций $h_{m,j}(t)$ ($j = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned}
 \text{mes}(F_U) &= C_m^k k! \frac{1}{(mn)^k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-k} \\
 &= \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-k} \frac{1}{n^k}.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{m^k} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-k} = \frac{1}{e} > \frac{1}{3},$$

то

$$\text{mes}(F_U) > \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^k} \tag{20}$$

для всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ и всех $k \leq s$.

Заметим, что в случае, когда $U \neq U'$, мы имеем $F_U \cap F_{U'} = \emptyset$. Действительно, если $i \in U \setminus U'$, то для любого $t \in F_U$ найдется такое $j \in \{1, \dots, m\}$, что $h_{m,j}(t) = a_i$. В то же время если $t \in F_{U'}$, то либо $h_{m,j}(t) = a_l \neq a_i$, либо

$h_{m,j}(t) = 0 \neq a_i$. Поэтому ввиду оценок (20) и (18), а также леммы 7 получаем

$$\begin{aligned} \text{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\} &= \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k, S(U) > \tau/2} \text{mes}(F_U) \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k, S(U) > \tau/2} \frac{1}{n^k} \\ &\geq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^s \sum_{U \in \mathcal{A}_k, S(U) > \tau/2} \frac{(n-k)!}{(k-1)!n!} \geq \frac{1}{12} \text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\}, \end{aligned}$$

и лемма доказана, если $n \geq 4$.

Если же $1 \leq n < 4$, то простая проверка (см. рассуждения перед соотношением (20)) показывает, что

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leq 5 \text{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}$$

для всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$. □

Замечание 9. В то же время оценка

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leq C \text{mes}\{t : H_n a(t) > \tau\} \quad (\tau > 0)$$

не верна ни при каком $C > 0$, не зависящем от $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $a_1 = \dots = a_n = 1$, то

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) = n\} = \frac{1}{n!},$$

а

$$\text{mes}\{t : H_n a(t) = n\} = \frac{1}{n^n}.$$

§5. Свойство Круглова и случайные перестановки

Теорема 10. Пусть E — *r.i.* пространство. Для того чтобы оператор K был ограничен в E , необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов T_n была равномерно ограничена в этом пространстве.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения (3), (12) и (13).

Необходимость. По лемме 8 для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \geq 0$, $\tau > 0$ и всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leq 12 \text{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}.$$

Как уже отмечалось в начале предыдущей части, $H_m a \Rightarrow K f_a$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно [14, §6.2],

$$\text{mes}\{t : H_m a(t) > \tau\} \rightarrow \text{mes}\{t : K f_a(t) > \tau\} \quad (m \rightarrow \infty)$$

для всех $\tau > 0$, в которых правая часть последнего соотношения непрерывна (т.е. всюду, кроме не более чем счетного множества). Поэтому из предыдущего неравенства следует, что для всех таких τ

$$\text{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leq 12 \text{mes}\{t : 2K f_a(t) > \tau\}.$$

Так как обе функции в этом неравенстве монотонны и непрерывны справа по τ , то оно справедливо для всех $\tau > 0$.

Хорошо известно [10, §2.4.3], что из неравенства

$$\text{mes}\{t : |x(t)| > \tau\} \leq C \text{mes}\{t : |y(t)| > \tau\} \quad (\tau > 0)$$

и того, что $y \in E$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \max(C, 1)\|y\|_E$ для любого г.и. пространства E . Таким образом, ввиду последнего соотношения

$$\|T_n f_a\|_E \leq 24 \cdot \|K f_a\|_E \quad \text{или} \quad \sup\{\|T_n f_a\|_E : \|f_a\| \leq 1\} \leq 24 \cdot \|K\|_E.$$

Из определения операторов T_n следует, что $T_n x = T_n f_{a_n(x)}$, где $a_n(x) = (a_{n,k}(x))_{k=1}^n$, $a_{n,k}(x) = n \int_{(k-1)/n}^{k/n} x(s) ds$. Так как $\|f_{a_n(x)}\|_E \leq \|x\|_E$ [10, §2.3.2], а пространство E сепарабельно или совпадает со своим вторым двойственным, то в итоге

$$\sup_n \|T_n\|_E \leq 24 \cdot \|K\|_E.$$

Достаточность. Предположим, что $\sup_n \|T_n\|_E = C < \infty$. В силу леммы 6 и снова [10, §2.4.3]

$$\|H_m f_a\|_E \leq 3\|T_{nm}\|_E \|f_a\|_E \leq 3C\|f_a\|_E.$$

Так как $H_m f_a \Rightarrow K f_a$ при $m \rightarrow \infty$, то отсюда ввиду [1, предложение 1.5] получаем

$$\|K f_a\|_{E''} \leq 3C\|f_a\|_E. \quad (21)$$

Пусть теперь функция $f = f^* \in E$ произвольна. Если

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} f(k2^{-n}) \chi_{((k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) \quad (0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}),$$

то $f_n(t) \uparrow f(t)$ п.в. и, значит, $f_n \Rightarrow f$ [14, §6.2]. Поэтому $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), где $\varphi_n(t)$ и $\varphi(t)$ — характеристические функции случайных величин f_n и f соответственно [14, §6.4]. Так как, согласно [1, 1.6], $\varphi_{K\xi}(t) = \exp(\varphi_\xi(t) - 1)$ для любой случайной величины ξ , то $\varphi_{Kf_n}(t) \rightarrow \varphi_{Kf}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), т.е. $Kf_n \Rightarrow Kf$. Кроме того, ввиду (21)

$$\|K f_n\|_{E''} \leq 3C\|f_n\|_E \leq 3C\|f\|_E \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому, применяя еще раз [1, предложение 1.5], получаем $\|K f\|_{E''} \leq 3C\|f\|_E$. Так как функция распределения величины Kf зависит лишь от функции распределения величины f , то последнее означает, что K — ограниченный оператор из E в E'' . Тем самым результат получен, если $E = E''$. Осталось рассмотреть случай, когда $E \neq E''$. Тогда пространство E сепарабельно.

Прежде всего, используя тот факт, что любая функция $f \in E''$, $f \geq 0$, является пределом п.в. своих «срезов» $\tilde{f}_n := f \chi_{\{f_n \leq n\}}$ ($n \in \mathbb{N}$), и рассуждая точно так же, как и ранее, можно доказать ограниченность оператора K в пространстве E'' . Поэтому ввиду [3, теорема 7.2] функция

$$g(t) := \frac{\ln(e/t)}{\ln(\ln(a/t))},$$

где $a > 0$ достаточно велико, принадлежит E'' . Таким образом, если

$$\psi(u) := \frac{u \ln(e/u)}{\ln(\ln(a/u))} \quad (0 < u \leq 1),$$

то $M_\psi \subset E''$. Отсюда следует, что $(M_\psi)_0 \subset (E'')_0 = E_0 = E$ в силу сепарабельности пространства E . Легко проверить, что

$$h(t) := \frac{\ln(e/t)}{\ln(\ln(a/t))} \in (M_\psi)_0$$

и, значит, $h \in E$. Отсюда и из [3, теорема 4.4] следует, что

$$K: L_\infty \rightarrow E. \quad (22)$$

Пусть теперь $f \in E$. Ввиду сепарабельности пространства E существует такая последовательность $\{f_n\} \subset L_\infty$, что $\|f_n - f\|_E \rightarrow 0$. Таким образом, из того, что $K: E \rightarrow E''$, следует, что $\|Kf_n - Kf\|_{E''} \rightarrow 0$. С другой стороны, в силу (22) и изометричности вложения пространства E в E'' получаем, что $\{Kf_n\} \subset E$, а значит, $Kf \in E$. $\square$

Замечание 11. Из доказательства теоремы вытекают следующие оценки для произвольного г.и. пространства E :

$$\frac{1}{24} \sup_n \|T_n\|_E \leq \|K\|_E \leq 3 \sup_n \|T_n\|_E. \quad \square$$

Приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, S_n — множество перестановок чисел $1, \dots, n$, а $l = l_n$ — произвольное взаимно однозначное отображение множества S_n на множество $\{1, \dots, n!\}$. Распространим оператор A_n , определенный ранее на $\mathbb{R}^n$ соотношением (3), на пространство матриц $x = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ следующим образом:

$$A_n x(t) = \sum_{i=1}^n x_{i,\pi(i)}, \quad t \in \left(\frac{l(\pi) - 1}{n!}, \frac{l(\pi)}{n!} \right).$$

Один из главных результатов работы [8] (см. следствие 8) состоит в том, что условие равномерной ограниченности операторов, порожденных случайными перестановками, на множестве диагональных матриц является достаточным для их равномерной ограниченности на множестве всех матриц. Применяя теорему 10, мы получаем

Следствие 12. Если $E \in \mathbb{K}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой матрицы $x = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\|A_n x\|_E \leq C \left(\left\| \sum_{k=1}^n x_k^* \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} \right\|_E + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} x_k^* \right),$$

где $(x_k^*)_{k=1}^{n^2}$ — перестановка последовательности $(|x_{i,j}|)_{i,j=1}^n$ в невозрастающем порядке, а $C > 0$ не зависит ни от n , ни от x .

Следствие 13. Для того чтобы операторы T_n были равномерно ограничены в пространстве Орлича $\text{exr } L_p$, необходимо и достаточно, чтобы $p \leq 1$.

Действительно, это утверждение вытекает из теоремы 10 и того, что условие $p \leq 1$ эквивалентно ограниченности оператора K в пространстве $\text{exr } L_p$ [1, 2.4, с. 42].

Из теоремы 10 и следствия 3 вытекает

Следствие 14. Для любого г.и. пространства E , такого, что $\sup_n \|T_n\|_E < \infty$, существует г.и. пространство $F \subsetneq E$, для которого также $\sup_n \|T_n\|_F < \infty$.

Для данного г.и. пространства E и $p > 1$ через $E(p)$ обозначим пространство всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, таких, что $|x|^p \in E$, с нормой

$$\|x\|_{E(p)} = \| |x|^p \|_E^{1/p}.$$

Хорошо известно, что $E(p) \subset E$ и что $\|x\|_E \leq \|x\|_{E(p)}$ для всех $x \in E(p)$ [9, 1.d].

Пусть E и F — г.и. пространства, $E \subset F$ и оператор K ограничен в E . Отсюда, вообще говоря, не вытекает ограниченность этого оператора в F [3, следствия 5.6 и 5.7]. Однако справедливо

Следствие 15. Если оператор K ограничен в пространстве $E(p)$, то он ограничен и в E .

Доказательство. Ввиду теоремы 10 достаточно доказать, что из равномерной ограниченности операторов T_n в $E(p)$ следует их равномерная ограниченность в E .

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ и $\|T_n x\|_{E(p)} \leq C \|x\|_{E(p)}$ ($n \in \mathbb{N}$). Это означает, что

$$\|(T_n x)^p\|_E^{1/p} \leq C \|x^p\|_E^{1/p}.$$

После замены $x^p = y$ получим

$$\|(T_n y^{1/p})^p\|_E \leq C^p \|y\|_E.$$

Так как из определения операторов T_n следует, что $(T_n y^{1/p})^p \geq T_n y$, то, согласно предыдущему соотношению, $\|T_n y\|_E \leq C^p \|y\|_E$, т.е. T_n равномерно ограничены в E . $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [2] В. М. Круглов, *Замечание о бесконечно делимых распределениях*, Теория вероятн. и примен., **15** (1970), 331–336.
- [3] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, *Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach*, Israel J. Math., **145** (2005), 125–156.
- [4] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах*, Матем. заметки, **76**:4 (2004), 483–489.
- [5] W. Johnson, G. Schechtman, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces*, Ann. Probab., **17**:2 (1989), 789–808.
- [6] S. Kwapien, C. Schütt, *Some combinatorial and probabilistic inequalities and their applications to Banach space theory*, Stud. Math., **82**:1 (1985), 91–106.
- [7] Е. М. Семенов, *Операторные свойства случайных перестановок*, Функци. анализ и его прил., **28**:3 (1994), 82–85.
- [8] S. Montgomery-Smith, E. M. Semenov, *Random rearrangements and operators*, in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 157–183.
- [9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

- [10] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [11] J. V. Ryff, *Orbits of L_1 -functions under doubly stochastic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 92–100.
- [12] G. G. Lorentz, *Relations between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 127–132.
- [13] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [14] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1976.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

School of Computer Science, Engineering and Mathematics
Flinders University, Australia
e-mail: zani0005@infoeng.flinders.edu.au

Воронежский госуниверситет
e-mail: semenov@func.vsu.ru

School of Mathematics and Statistics
University of New South Wales, Kensington, Australia
e-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

Поступило в редакцию
28 ноября 2007 г.