Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Зорин, О коммутативности централизатора подалгебры в универсальной обертывающей алгебре, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 47–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:49:11

О коммутативности централизатора подалгебры в универсальной обертывающей алгебре

© 2009. А. А. Зорин

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, а $\mathfrak{h}$ — алгебраическая подалгебра ее касательной алгебры Ли. В работе найдены все подалгебры $\mathfrak{h}$ без нетривиальных характеров, централизаторы $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ и $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ которых в универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и в ассоциированной с ней градуированной алгебре $P(\mathfrak{g})$ коммутативны. Для всех этих подалгебр доказано, что $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}} \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ и $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = P(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}} \otimes P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Кроме того, получен критерий коммутативности алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ в терминах теории представлений.

Введение

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $H \subset G$ — ее связная алгебраическая подгруппа, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — их касательные алгебры Ли. Рассмотрим централизатор $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$. Нас будет интересовать, когда он коммутативен.

Пусть $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Оно продолжается до представления алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, которое мы также будем обозначать через ρ . Обозначим через $\mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$ централизатор подалгебры $\rho(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Следующая теорема, доказательство которой будет приведено в §1, дает критерий коммутативности централизатора $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ в терминах теории представлений алгебры $\mathfrak{g}$.

Теорема 1. *Алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда для любого неприводимого представления $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ коммутативна алгебра $\mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$.*

Для того чтобы алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ была коммутативной, необходимо, чтобы централизатор $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ алгебры $\mathfrak{h}$ в ассоциированной с $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ градуированной алгебре $P(\mathfrak{g})$ был коммутативен относительно скобки Пуассона (подробнее см. в §2).

В работе Кнопа [1] было показано, что в случае, когда $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, а также тогда и только тогда, когда она есть тензорное произведение подалгебр $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$. В той же работе были найдены все неразложимые пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, удовлетворяющие этим условиям. Теорема 1 показывает, что в данном случае коммутативность централизатора $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ эквивалентна тому, что алгебра $\mathfrak{h}$ имеет простой спектр в любом неприводимом представлении алгебры $\mathfrak{g}$.

На пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует пуассонова структура, алгебра Пуассона которой совпадает с $P(\mathfrak{g})$. Присоединенное представление $H: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ сохраняет сим-

плектические слои этой структуры. Если это действие коизотропно на симплектических слоях общего положения (см. определение в § 2), то мы будем называть подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *коизотропными*.

Пусть $\text{Quot } P(\mathfrak{g})$ — поле частных алгебры $P(\mathfrak{g})$. Алгебра $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{h}$ коизотропна (см. § 2). Если группа H не имеет нетривиальных характеров, то оба этих условия равносильны коммутативности алгебры $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Собственная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является коизотропной тогда и только тогда, когда пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ есть одна из перечисленных ниже:

- 1) $(\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{gl}_n)$ ($n \geq 1$), $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$ ($n \geq 5$);
- 2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\langle v \rangle})$ или $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_v)$, где $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли, v — старший вектор ее стандартного представления (изотропный, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$), $\langle v \rangle$ — прямая, натянутая на v , $\mathfrak{g}_v$ и $\mathfrak{g}_{\langle v \rangle}$ — стабилизаторы вектора v и прямой $\langle v \rangle$ соответственно.
- 3) $(\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)})$, где $\mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)}$ — параболическая подалгебра, отвечающая набору простых корней $\{\alpha_1, \alpha_n\}$ (определение см. в § 5).
- 4) $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{b})$ или $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{u} + \langle E_{11} - 2E_{22} + E_{33} \rangle)$, где $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра в $\mathfrak{sl}_3$, а $\mathfrak{u}$ — ее унитарный радикал.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется *разложимой*, если существуют такие пары $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. В противном случае пара называется *неразложимой*. Любая коизотропная пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ представляется в виде суммы коизотропных неразложимых пар.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — ее собственная алгебраическая подалгебра, которая не имеет нетривиальных характеров. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является коизотропной неразложимой тогда и только тогда, когда она есть одна из перечисленных ниже:

- 1) $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$, $n \geq 4$;
- 2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_v)$, где $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли, v — старший вектор ее стандартного представления.

В § 3 приведены необходимые факты об индексах алгебр Ли, а в § 4 приведена классификация подалгебр Ли коранга не более 4 в алгебре $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Эта классификация потребует нам при доказательстве теоремы 2 в § 5. В § 6 доказана теорема 3.

Обозначим через $Z(\mathfrak{g})$ и $Z(\mathfrak{h})$ центры алгебр Пуассона $P(\mathfrak{g})$ и $P(\mathfrak{h})$ соответственно, а через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ — центры алгебр $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. В § 7 доказана следующая теорема, описывающая строение централизатора коизотропной подалгебры.

Теорема 4. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — коизотропная неразложимая пара и $\mathfrak{h}$ не имеет нетривиальных характеров. Тогда

- 1) $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g})$;
- 2) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, в частности, алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна.

В работе используются следующие обозначения:

$\mathfrak{a}^u$ — унитарный радикал алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{a} \oplus_{\rho} \mathfrak{n}$ — полупрямая сумма алгебр Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}$, где ρ — действие $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$ (мы будем опускать символ ρ , когда из контекста ясно, о каком представлении идет речь).

k^n — линейное пространство над k размерности n ; так же обозначается n -мерная коммутативная алгебра Ли.

$\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

$P(\mathfrak{a})$ — ассоциированная градуированная алгебра алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$.

$\mathfrak{U}^{(n)}(\mathfrak{a})$ — n -я компонента естественной фильтрации алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$.

$P^n(\mathfrak{a})$ — n -я однородная компонента алгебры $P(\mathfrak{a})$.

$\mathfrak{U}^n(\mathfrak{a})$ — образ пространства $P^n(\mathfrak{a})$ при отображении симметризации.

§1. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1. Так как представление ρ неприводимо, то $\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{gl}(V)$. Пусть $v \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ — такой элемент, что $\rho(v) \in \mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$. Тогда $[\mathfrak{h}, v] \subset \text{Ker } \rho$. Существует такое конечномерное $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство $U \subset \text{Ker } \rho$, что $[\mathfrak{h}, v] \subset U$. Так как $\mathfrak{g}$ редуктивна, то существует $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство W , такое, что $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = U \oplus W$. Пусть $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$. Тогда $[\mathfrak{h}, w] = [\mathfrak{h}, v] - [\mathfrak{h}, u]$. Так как пространство U $\mathfrak{g}$ -инвариантно, то $[\mathfrak{h}, u] \subset U$ и, значит, $[\mathfrak{h}, w] \subset U$. Так как $[\mathfrak{h}, w] \subset W$, то $[\mathfrak{h}, w] = 0$, а значит, $w \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$. Следовательно, $v \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h}) + \text{Ker } \rho$. Таким образом, $\mathfrak{z}_V(\mathfrak{h}) = \rho(\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h}))$. Поэтому из коммутативности алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ следует коммутативность алгебры $\mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$ для любого неприводимого представления ρ .

Если алгебра $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ некоммутативна, то существуют $u, v, w \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$, такие, что $w = [u, v] \neq 0$. Существует такое представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, что $\rho(w) \neq 0$ [2, теорема 2.5.7]. Так как $\rho(u), \rho(v) \in \mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$, то алгебра $\mathfrak{z}_V(\mathfrak{h})$ некоммутативна. $\square$

§2. Геометрический критерий коммутативности алгебры $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$

Рассмотрим алгебру Пуассона $P(\mathfrak{g})$. Скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ на $P(\mathfrak{g})$ задается следующим образом. Пусть $\xi \in P^n(\mathfrak{g})$, $\eta \in P^m(\mathfrak{g})$. Обозначим через $\hat{\xi} \in \mathfrak{U}^{(n)}(\mathfrak{g})$, $\hat{\eta} \in \mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g})$ некоторые прообразы элементов ξ и η в $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Тогда $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \mathfrak{U}^{(n+m-1)}$. По определению $\{\xi, \eta\}$ есть проекция элемента $[\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ на $P^{n+m-1}(\mathfrak{g})$.

Рассмотрим отображение симметризации

$$\psi: P(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Пусть ψ_n — ограничение этого отображения на однородную компоненту $P^n(\mathfrak{g})$. Так как ψ перестановочно с присоединенным представлением алгебры $\mathfrak{h}$, то $\psi_n(P^n(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Поэтому $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \text{gr } \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Если коммутативна алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, то коммутативна и алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

Рассмотрим коприсоединенное действие $G: \mathfrak{g}^*$. На пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует пуассонова структура, которая на орбитах этого действия задается формой Костанта–Кириллова

$$\omega(\text{ad}^*(\xi)\alpha, \text{ad}^*(\eta)\alpha) = \alpha([\xi, \eta]), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathfrak{g}^*.$$

Алгебра Пуассона этой структуры совпадает с $P(\mathfrak{g})$. Симплектическими слоями этой пуассоновой структуры являются орбиты коприсоединенного представления группы Ли G . Ограничение алгебры Пуассона на симплектический слой M мы будем обозначать через $P(M)$, а алгебру частных алгебры $P(\mathfrak{g})$ — через $\text{Quot } P(\mathfrak{g})$. Ограничение коприсоединенного представления группы G на любой симплектический слой M многообразия $\mathfrak{g}^*$ является симплектическим

действием. Ограничив это действие на подгруппу H , мы получим симплектическое действие $H : M$. Коммутативность алгебры $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^H$ эквивалентна коммутативности алгебр $(\text{Quot } P(M))^H$ для всех симплектических слоев M многообразия $\mathfrak{g}^*$.

Корангом действия $H : M$ называется коранг касательного пространства к орбите группы H в точке общего положения слоя M . Будем обозначать его через $\text{cork}_H M$. Действие называется *коизотропным*, если $\text{cork}_H M = 0$. Известно, что симплектическое действие $H : M$ коизотропно тогда и только тогда, когда алгебра $(\text{Quot } P(M))^H$ коммутативна. В частности, если действие $H : M$ коизотропно, то алгебра $P(M)^H$ коммутативна. Если полиномиальные инварианты группы H разделяют орбиты общего положения на M , то верно и обратное: алгебра $P(M)^H$ коммутативна, только если действие коизотропно [3, предложение 2.5].

Определение 1. Число $\text{cork}_H M$, где $M \subset \mathfrak{g}^*$ — симплектический слой общего положения, будем называть *корангом* пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ или *корангом* подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Подалгебру $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ будем называть *коизотропной*, если для симплектического слоя общего положения M действие $H : M$ коизотропно. Соответствующую пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ также будем называть *коизотропной*.

Если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — подалгебры в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$, и подалгебра $\mathfrak{h}_1$ коизотропна, то и $\mathfrak{h}_2$ коизотропна.

Отметим, что разложимая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ является коизотропной тогда и только тогда, когда коизотропны пары $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$. Вся алгебра $\mathfrak{g}$ является коизотропной подалгеброй в себе самой. Таким образом, для классификации всех коизотропных пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ можно считать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не содержит простых компонент алгебры $\mathfrak{g}$. Имеет место следующая

Теорема 5. Пусть алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста и подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ не содержит простых компонент алгебры $\mathfrak{g}$. Для симплектического слоя $M \subset \mathfrak{g}^*$ общего положения верно равенство

$$\text{cork}_H M = \dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} - \text{ind } \mathfrak{h}.$$

Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. В условиях теоремы 5 стабилизатор точки общего положения действия $H : M$ конечен.

Доказательство. Можно считать, что M состоит из регулярных полупростых элементов. Стабилизатор G_x любой точки $x \in M$ есть некоторый максимальный тор T_x . Следовательно, симплектический слой общего положения есть $M = G/T$, где $T \subset G$ — максимальный тор.

Действие $G : G/H$ левыми сдвигами имеет конечное ядро неэффективности, так как $\mathfrak{h}$ не содержит простых компонент алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, и ядро неэффективности действия $T : G/H$ конечно. Поэтому конечен стабилизатор общего положения этого действия [4, п. 7.2], а значит, конечен и стабилизатор общего положения действия $H : G/T$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Можно считать, что слой M состоит из регулярных полупростых элементов. Тогда $\dim M = \dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g}$. Из леммы 1 следует, что коразмерность $\text{codim}_H(M)$ орбиты общего положения действия $H : M$ равна $\dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$. Обозначим через $\text{def}_H(M)$ дефект (размерность ядра) ограничения формы Костанта–Кириллова ω на касательное пространство

орбиты общего положения. Имеем

$$\text{cork}_H(M) = \text{codim}_H(M) - \text{def}_H(M). \quad (1)$$

Рассмотрим отображение моментов $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{h}^*$. Поскольку размерность образа отображения моментов равна размерности орбиты общего положения действия $H: M$ (см. [3]), то образ $\Phi(M)$ плотен в $\mathfrak{h}^*$ (лемма 1). Известно, что дефект действия $H: M$ равен коразмерности орбиты общего положения действия $H: \Phi(M)$ [3]. Поскольку $\Phi(M)$ плотен в $\mathfrak{h}^*$, то $\text{def}_H(M) = \text{ind } \mathfrak{h}$. Из равенства (1) имеем

$$\text{cork}_H(M) = \dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} - \text{ind } \mathfrak{h}. \quad \square$$

Таким образом, подалгебра $\mathfrak{h}$ является коизотропной в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \text{rk } \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{h}. \quad (*)$$

Следствие. Равенство $(*)$ выполнено тогда и только тогда, когда алгебра $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{h}}$ коммутативна. Если выполнено равенство $(*)$, то алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна. Если полиномиальные инварианты подгруппы H разделяют орбиты общего положения действия $H: \mathfrak{g}^*$, то алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна тогда и только тогда, когда выполнено равенство $(*)$.

Доказательство. Алгебры инвариантов $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{h}}$ и $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^H$ совпадают. Равенство $(*)$ выполнено тогда и только тогда, когда действие на слоях общего положения коизотропно. Последнее равносильно тому, что алгебра $(\text{Quot } P(M))^H$ коммутативна, если M — слой общего положения, т. е. тому, что алгебра $(\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^H$ коммутативна. Второе утверждение следует из включения $\text{Quot } P(\mathfrak{g})^H \subset (\text{Quot } P(\mathfrak{g}))^H$. Третье — из того, что при указанном дополнительном условии это включение обращается в равенство. $\square$

Пример. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ и борелевскую подалгебру $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Алгебра инвариантов $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{b}}$ совпадает с центром алгебры $P(\mathfrak{g})$ и, следовательно, является коммутативной. Известно (см., например, [5]), что $\text{ind } \mathfrak{b} = [n/2]$. Таким образом, при $n \geq 3$

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{b} - \text{rk } \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{b} = \frac{n(n-1)}{2} - \left[\frac{n}{2} \right] \neq 0$$

и равенство $(*)$ не выполнено. Следовательно, в общем случае из коммутативности алгебры $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{b}}$ не следует коизотропность.

Пусть H — связная редуктивная подгруппа полупростой алгебраической группы Ли G . В работе Кнопа [1] для этого случая найдены все собственные неразложимые пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, такие, что алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна. Это пары $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{gl}_{n-1})$, $n \geq 2$, и $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$, $n \geq 4$. Действие подгруппы $H \subset G$ на $M = G/T$ всегда стабильно [6]; поэтому H -орбиты общего положения действия $H: \mathfrak{g}^*$ разделяются полиномиальными инвариантами [4]. Следовательно, указанные пары являются коизотропными.

Интересно найти все коизотропные нередуктивные подалгебры $\mathfrak{h}$ полупростых алгебр Ли. В §5 описаны все такие подалгебры простых алгебр Ли, а в §6 — все коизотропные подалгебры, не имеющие нетривиальных характеров, в полупростых алгебрах Ли. Отсутствие нетривиальных характеров равносильно

тому, что подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{h}$ полупроста. В этом случае полиномиальные инварианты представления $H: \mathfrak{g}^*$ разделяют орбиты группы H на симплектическом слое общего положения. Следовательно, при данном ограничении найдены и все такие пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что алгебра $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ коммутативна.

§3. Некоторые сведения об индексах алгебр Ли

Определение 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Рассмотрим линейное представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Число $\dim V - \max_{\xi \in V^*} \dim \mathfrak{g}\xi$ называется его *индексом*. Будем обозначать его через $\text{ind}(\mathfrak{g}, V)$ или $\text{ind}(\rho, V)$. Элемент $\xi \in V^*$ называется *регулярным* (или ρ -регулярным), если пространство $\mathfrak{g}\xi$ имеет максимальную размерность. Индекс присоединенного представления называется *индексом алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ и обозначается через $\text{ind } \mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ — ее параболическая подалгебра. Известно ([5], [7]), что $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{g}$ и $\text{ind } \mathfrak{p} \leq \text{rk } \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{p}$ — максимальная параболическая подалгебра в $\mathfrak{gl}_n$ и ее подалгебра Леви есть $\mathfrak{gl}_{n_1} \oplus \mathfrak{gl}_{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, то $\text{ind } \mathfrak{p} = \gcd(n_1, n_2)$ [8].

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\text{ind } \mathfrak{g} \leq \text{ind } \mathfrak{h} + (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h})$.

Доказательство. Пусть $\xi_0 \in \mathfrak{h}^*$ — регулярный элемент коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{h}$. Тогда $\dim \mathfrak{h}\xi_0 = \dim \mathfrak{h} - \text{ind } \mathfrak{h}$. Продолжим этот элемент до линейной формы $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Тогда $\dim \mathfrak{g}\xi \geq \dim \mathfrak{h}\xi \geq \dim \mathfrak{h}\xi_0$. Следовательно,

$$\text{ind } \mathfrak{g} \leq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}\xi \leq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}\xi_0 \leq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} + \text{ind } \mathfrak{h}. \quad \square$$

Пусть задано некоторое линейное представление $\rho: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Тогда на пространстве $\mathfrak{s} \oplus V$ существует каноническая структура алгебры Ли, а именно, структура полупрямого произведения алгебры $\mathfrak{s}$ и коммутативного идеала V . На алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_{\rho} V$ имеется $\mathbb{Z}$ -градуировка $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1)$, где $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{s}$, $\mathfrak{g}(1) = V$. Двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ можно отождествить с пространством $\mathfrak{s}^* \oplus V^* = \mathfrak{g}^*(0) \oplus \mathfrak{g}^*(-1)$. Имеет место следующая

Теорема 6 (Раис [9]). Пусть $\xi \in \mathfrak{g}^*(-1)$ есть ρ -регулярный элемент, такой, что для некоторого $\eta \in \mathfrak{g}^*(0)$ элемент $\eta + \xi \in \mathfrak{g}^*(0) \oplus \mathfrak{g}^*(-1)$ также регулярен. Тогда

$$\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind}(\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(1)) + \text{ind } \mathfrak{g}(0)_{\xi},$$

где $\mathfrak{g}(0)_{\xi}$ — стабилизатор элемента ξ в алгебре $\mathfrak{g}(0)$.

Отметим, что множество векторов ξ , которые удовлетворяют условию теоремы, плотно в $\mathfrak{g}^*(-1)$.

Д. И. Панюшевым было получено обобщение теоремы Раиса для градуированных алгебр Ли вида $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$. Положим $\mathfrak{g}^*(-j) = \text{Ann}(\bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}(i)) \simeq \mathfrak{g}(j)^*$. Тогда $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*(0) \oplus \mathfrak{g}^*(-1) \oplus \mathfrak{g}^*(-2)$.

Теорема 7 [5]. Предположим, что существует $\mathfrak{g}(0)$ -регулярный элемент $\xi \in \mathfrak{g}^*(-2)$, такой, что $\mathfrak{g}_{\xi} \cap \mathfrak{g}(1) = \{0\}$. Тогда

$$\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind}(\mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(2)) = \text{ind}(\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(2)) + \text{ind } \mathfrak{g}(0)_{\xi_0},$$

где ξ_0 — подходящий регулярный элемент из $\mathfrak{g}^*(-2)$.

Мы будем использовать теоремы 6 и 7 для нахождения индексов некоторых алгебр Ли.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли, а v — старший вектор в ее стандартном представлении. Имеют место следующие равенства:

- (a) $\text{ind } \mathfrak{g}_v = 1$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$; $\text{ind } \mathfrak{g}_v = 0$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$;
- (b) $\text{ind } \mathfrak{g}_v = [\frac{n-1}{2}]$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$;
- (c) $\text{ind } \mathfrak{g}_v = n$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$;
- (d) $\text{ind } [\mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_{n-1})}, \mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_{n-1})}] = n - 2$, если $\mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_{n-1})} \subset \mathfrak{sl}_n$ — параболическая подалгебра, отвечающая набору корней $\{\alpha_1, \alpha_{n-1}\}$ (определение см. в §5);
- (e) $\text{ind } \mathfrak{h} = 3$, если $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2 \oplus_\rho (V_1 \otimes V_2)$, $V_1 = V_2 = k^2$, где ρ есть произведение стандартного представления на первом множителе и тривиального представления на втором.

Доказательство. (a) Алгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus_\rho k^{n-1}$ — полупрямая сумма алгебры $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_{n-1}$ и идеала k^{n-1} . Действие ρ алгебры $\mathfrak{s}$ на идеале k^{n-1} есть стандартное представление алгебры $\mathfrak{sl}_{n-1}$. Оно транзитивно на множестве ненулевых векторов. Можно применить теорему Раиса для ненулевого вектора $\xi \in k^{n-1}$ общего положения. Получаем

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } (\mathfrak{sl}_{n-1})_v + \text{ind } (\mathfrak{sl}_{n-1}, k^{n-1}).$$

Так как $\text{ind } (\mathfrak{sl}_{n-1}, k^{n-1}) = 0$, то по индукции $\text{ind } \mathfrak{h} = (\mathfrak{sl}_2)_v = 1$. Второе равенство получается аналогичным образом.

(b) Как и в п. (a), имеем разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{n-2} \oplus_\rho k^{n-2}$ и действие ρ алгебры $\mathfrak{so}_{n-2}$ транзитивно на множестве неизотропных одномерных подпространств в k^{n-2} . Поэтому $\text{ind } (\mathfrak{so}_{n-2}, k^{n-2}) = 1$. Применяя теорему Раиса для невырожденного вектора $\xi \in k^{n-2}$ общего положения, получаем

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } \mathfrak{so}_{n-3} + \text{ind } (\mathfrak{so}_{n-2}, k^{n-2}).$$

Если $n = 2m$, то $\text{ind } \mathfrak{h} = m - 1$. Если $n = 2m + 1$, то $\text{ind } \mathfrak{h} = m$.

(c) На алгебре $\mathfrak{h}$ существует следующая $\mathbb{Z}$ -градуировка: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(0) \oplus \mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}(2)$, где $\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{sp}_{2n-2}$, $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}(2)$ — нильпотентный идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга, и $\mathfrak{h}(2)$ — его центр. Алгебра $\mathfrak{h}(0)$ действует тривиально на пространстве $\mathfrak{h}^*(-2)$. Для любого вектора $\xi \in \mathfrak{h}^*(-2)$ выполняется равенство $\mathfrak{h}_\xi \cap \mathfrak{h}(1) = \{0\}$. Поэтому можно применить теорему 7 для любого вектора $\xi \in \mathfrak{h}^*(-2)$. Тогда

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } \mathfrak{h}(0)_\xi + \text{ind } (\mathfrak{h}(0), \mathfrak{h}(2)) = \text{ind } \mathfrak{sp}_{2n-2} + 1 = n.$$

(d) Как и в п. (c), на алгебре $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_{n-1})}$ существует $\mathbb{Z}$ -градуировка, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(0) \oplus \mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}(2)$, где $\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{sl}_{2n-2}$, $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}(2)$ есть нильпотентный идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга, и $\mathfrak{h}(2)$ — его центр. Применяя теорему 7 для вектора $\xi \in \mathfrak{h}^*(-2)$, получаем

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } \mathfrak{h}(0)_\xi + \text{ind } (\mathfrak{h}(0), \mathfrak{h}(2)) = \text{ind } \mathfrak{sl}_{n-2} + 1 = n - 2.$$

(e) Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ действует локально транзитивно на первом множителе и тривиально на втором. Применяя теорему Раиса для точки $(\xi, \eta) \in V_1 \otimes V_2$ общего положения, получаем при $\xi \neq 0$, что

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } (\mathfrak{sl}_2)_\xi + \text{ind } (\mathfrak{sl}_2, V) = 1 + 2 = 3. \quad \square$$

§ 4. Редуктивные подалгебры малых корангов в алгебре $\mathfrak{sl}_{n+1}$

В этом параграфе мы найдем все редуктивные подалгебры корангов 2 и 4 в $\mathfrak{sl}_{n+1}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее собственная редуктивная подалгебра. Тогда формула (*) принимает вид

$$\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} - \text{rk } \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{h}. \quad (**)$$

При этом $\text{rk } \mathfrak{h} \leq \text{rk } \mathfrak{g}$, т. е.

$$\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \geq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} - 2 \text{rk } \mathfrak{g}. \quad (2)$$

Отметим, что если $\mathfrak{h}_1 \subsetneq \mathfrak{h}_2$, то

$$\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}_1 - \text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}_2 = \dim \mathfrak{h}_2 - \dim \mathfrak{h}_1 + \text{rk } \mathfrak{h}_2 - \text{rk } \mathfrak{h}_1. \quad (3)$$

В частности, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}_1 > \text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}_2$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ и коранг подалгебры $\mathfrak{h}$ не превосходит 4. Тогда из равенства (2) следует, что $\dim \mathfrak{h} \geq n^2 - 4$. Можно рассматривать вложение алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ как ее представление ρ в пространстве V размерности $n + 1$. Будем называть вложение (подалгебру $\mathfrak{h}$) максимальным (максимальной), если не существует редуктивной алгебры $\mathfrak{h}_0$, такой, что $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}_0 \subsetneq \mathfrak{g}$. Пусть представление ρ приводимо: $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $n_1 + n_2 = n + 1$. Соответствующее вложение будем также называть приводимым. Тогда $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{gl}_{n_1} \oplus \mathfrak{gl}_{n_2}) \cap \mathfrak{sl}_{n+1}$. Следовательно, $\dim \mathfrak{h} \leq n_1^2 + n_2^2 - 1$, откуда вытекает, что $(n - n_1)(1 - n_1) + 2 \geq 0$. Получаем, что существуют следующие максимальные приводимые вложения редуктивных алгебр коранга не больше 4 в $\mathfrak{sl}_{n+1}$:

- (i) $\mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{sl}_{n+1}$, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 0$;
- (ii) $(\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_2) \cap \mathfrak{sl}_4 \subset \mathfrak{sl}_4$, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 2$;
- (iii) $(\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_3) \cap \mathfrak{sl}_5 \subset \mathfrak{sl}_5$, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 4$.

Пары с немаксимальными подалгебрами $\mathfrak{h}$ коранга не более 4 должны быть вложены в одну из максимальных пар (i)–(iii). В случае (iii) таких пар не существует. В случае (i) таких пар две:

- (iv) $\mathfrak{sl}_n \subset \mathfrak{sl}_{n+1}$, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 2$;
- (v) $\mathfrak{t}_2 \subset \mathfrak{sl}_3$, где $\mathfrak{t}_2$ — максимальный двумерный тор, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 2$.

В случае (ii) также имеются две пары:

- (vi) $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{sl}_4$, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 4$;
- (vii) $\mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{sl}_4$, где $\mathfrak{t}_1$ — одномерный тор, $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = 4$.

Если представление алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве V неприводимо, то $\dim \mathfrak{h} > \dim V$ при $n \geq 3$. Известен список всех представлений простых алгебр со свойством $\dim \mathfrak{h} > \dim V$ [10], и прямая проверка показывает, что ни для одного из них не выполнено условие (**). При $n = 1$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ есть единственная редуктивная подалгебра $\mathfrak{t}_1$, и этот случай входит в рассмотренную выше серию $\mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{sl}_{n+1}$. При $n = 2$ алгебра $\mathfrak{h}$ обладает неприводимым представлением в пространстве размерности 3. Алгебры, удовлетворяющие этому условию, — это $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{gl}_2$. Все получающиеся пары были уже найдены выше.

Пусть подалгебра $\mathfrak{h}$ не является простой: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Тогда V можно представить в следующем виде: $V = V_1 \otimes V_2$, где V_1 , V_2 — такие пространства, что представления $\rho_i: \mathfrak{h}_i \rightarrow \mathfrak{gl}(V_i)$, $i = 1, 2$, точны. Положим $n_1 = \dim V_1$, $n_2 = \dim V_2$,

$n_1 \leq n_2$. Тогда $\dim V = n_1 n_2$, $\dim \mathfrak{h}_1 \leq n_1^2$, $\dim \mathfrak{h}_2 \leq n_2^2$. Из условия (3) следует, что

$$n_1^2 + n_2^2 \geq (n_1 n_2 - 1)^2 - 4. \quad (4)$$

При $n_1, n_2 \geq 2$ имеем $(n_1 n_2)^2 \geq 2n_1^2 + 2n_2^2$. Следовательно, $(n_1 - n_2)^2 \leq 3$ и $n_1 = n_2$ или $n_1 = n_2 - 1$. Легко видеть, что в обоих случаях неравенство (4) не выполнено. Если же $n_1 = 1$, то подалгебра $\mathfrak{h}_1$ является одномерным тором и действует на пространстве V скалярно, а значит, $\mathfrak{h}_1 = 0$. Таким образом, список пар коранга не более 4 исчерпывается парами (i)–(vii).

§5. Нередуктивные коизотропные подалгебры в простых алгебрах Ли

Найдем сначала все коизотропные параболические подалгебры $\mathfrak{p}$ простых алгебр Ли. Пусть $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\} \in \Pi$ — набор простых корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})}$ — ее параболическая подалгебра, отвечающая набору $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\}$, а именно, подалгебра, содержащая корневые подпространства, отвечающие отрицательным корням, в разложении которых на простые корни не содержится ни один из корней $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. Известно [7], что $\text{ind } \mathfrak{p} \leq \text{rk } \mathfrak{g}$. Поэтому для коизотропности подалгебры $\mathfrak{p}$ необходимо, чтобы

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p} \leq 2 \text{rk } \mathfrak{g}. \quad (5)$$

Левая часть этого неравенства равна количеству положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, в разложении которых на простые корни встречается хотя бы один из корней $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. Легко видеть, что необходимое равенство (*) выполняется (с точностью до симметрии схемы Дынкина) в серии A_n только для наборов корней $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$ и $\{\alpha_1, \alpha_n\}$, в сериях B_n , C_n , D_n — только для набора $\{\alpha_1\}$ и никогда не выполняется для особых алгебр Ли. Серии B , C , D дают пары $(\mathfrak{so}_n, (\mathfrak{so}_n)_{\langle v \rangle})$, $(\mathfrak{sp}_n, (\mathfrak{sp}_n)_{\langle v \rangle})$, где v — старший вектор стандартного представления. Для этих пар индексы подалгебр известны [5]. Прямая проверка равенства (*) показывает, что все эти пары являются коизотропными. Аналогично, серии A_n и корню α_1 соответствует пара $(\mathfrak{sl}_{n+1}, (\mathfrak{sl}_{n+1})_{\langle v \rangle})$, где v — старший вектор стандартного представления, и она также является коизотропной. Для $\{\alpha_2\}$ имеем $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p}_{\alpha_2} - \text{rk } \mathfrak{g} = n - 2$. Из результата Элашвили [8] следует, что $\text{ind } \mathfrak{p}_{\alpha_2} = 1$, когда n нечетно, и $\text{ind } \mathfrak{p}_{\alpha_2} = 0$, когда n четно. Поэтому равенство выполнено только при $n = 2, 3$. При $n = 2$ этот случай эквивалентен случаю первого простого корня, а при $n = 3$ — случаю $(\mathfrak{so}_6, (\mathfrak{so}_6)_{\langle v \rangle})$. Индекс алгебры $\mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)}$ равен $n - 1$ [5], и она также удовлетворяет равенству (*) и, следовательно, является коизотропной. Таким образом, существуют только следующие коизотропные пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ с параболической подалгеброй $\mathfrak{h}$: $(\mathfrak{sl}_n, (\mathfrak{sl}_n)_{\langle v \rangle})$, $(\mathfrak{so}_n, (\mathfrak{so}_n)_{\langle v \rangle})$, $(\mathfrak{sp}_n, (\mathfrak{sp}_n)_{\langle v \rangle})$, $(\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)})$.

Пусть $\mathfrak{h}$ — произвольная коизотропная нередуктивная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Как известно [11], она вкладывается правильным образом в некоторую параболическую подалгебру $\mathfrak{p}$, которая также должна быть коизотропной в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем разложения Леви $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}^u$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}^u$. Тогда $\mathfrak{h}^u \subset \mathfrak{p}^u$, и можно считать, что $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}$. Имеем $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z}$ — центр и $\mathfrak{s} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ — полупростая часть алгебры $\mathfrak{l}$. Из леммы 2 следует, что

$$\text{ind } \mathfrak{h} \leq \text{ind } \mathfrak{k} + \dim \mathfrak{h}^u, \quad (6)$$

а также $\text{rk } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{l}$ и $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{l} - \dim \mathfrak{k} + 2 \dim \mathfrak{p}^u - \dim \mathfrak{h}^u$. Поэтому из равенства (*) получаем, что

$$\dim \mathfrak{l} - \dim \mathfrak{k} + 2(\dim \mathfrak{p}^u - \dim \mathfrak{h}^u) - \text{rk } \mathfrak{l} - \text{rk } \mathfrak{k} \leq 0 \quad (7)$$

и, значит,

$$\dim \mathfrak{l} - \dim \mathfrak{k} - \text{rk } \mathfrak{l} - \text{rk } \mathfrak{k} \leq 0. \quad (8)$$

Если $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{s}$ (это верно, в частности, когда алгебра $\mathfrak{k}$ не имеет характеров, т. е. полупроста), то

$$\dim \mathfrak{s} - \dim \mathfrak{k} - \text{rk } \mathfrak{s} - \text{rk } \mathfrak{k} \leq 0. \quad (9)$$

Отметим, что в этом случае $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{q}$ также является коизотропной в $\mathfrak{g}$. Индексы коммутантов коизотропных параболических подалгебр вычислены в лемме 3, пп. (a)–(d). Легко видеть, что коммутанты являются коизотропными подалгебрами во всех случаях, кроме случая $(\mathfrak{sl}_n, (\mathfrak{q}_{(\alpha_1, \alpha_n)}))$. Коммутант алгебры $\mathfrak{g}_{(v)}$, где $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли, есть $\mathfrak{g}_v$. Таким образом, пары $(\mathfrak{sl}_n, (\mathfrak{sl}_n)_v)$, $(\mathfrak{so}_n, (\mathfrak{so}_n)_v)$, $(\mathfrak{sp}_n, (\mathfrak{sp}_n)_v)$ являются коизотропными; при этом подалгебры $\mathfrak{h}$ в этих парах не имеют нетривиальных характеров. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ должна содержаться в одной из таких пар.

Если $\mathfrak{k}$ не содержит простых компонент подалгебры $\mathfrak{s}$, то по теореме 5 из (9) следует, что $\mathfrak{k}$ — коизотропная подалгебра в $\mathfrak{s}$ и в неравенстве (9) достигается равенство. Следовательно, равенства достигаются и в (6) и (7). Так как $\mathfrak{s}$ — классическая простая алгебра Ли или $\mathfrak{so}_4$, то из классификации Кнопа, приведенной в конце §2, получаем, что возможны следующие случаи: $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{gl}_{n-1})$ или $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$.

Пусть $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$. Из неравенства (7) следует, что $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{p}^u$, причем $\mathfrak{p}^u = k^n$ — коммутативная алгебра Ли. Пространство k^n разлагается на два неприводимых подпространства относительно действия $\mathfrak{so}_{n-1}$: $k^n = k^{n-1} \oplus k$. Таким образом, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{n-1} \oplus (k^{n-1} \oplus k) \subset \mathfrak{so}_{n+1}$. Из леммы 3, п. (b), вытекает, что

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind}(\mathfrak{so}_{n-1} \oplus k^{n-1}) + 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Получаем, что $\text{ind } \mathfrak{h} < \text{ind } \mathfrak{k} + \dim \mathfrak{h}^u$. Следовательно, в неравенстве (6) равенство не достигается, что противоречит коизотропности подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пусть $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{gl}_n)$. Из неравенства (7) следует, что $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{p}^u$, причем $\mathfrak{p}^u = k^{n+1}$ — коммутативная алгебра Ли. Пространство k^{n+1} разлагается на два неприводимых подпространства относительно действия $\mathfrak{gl}_n$, $k^{n+1} = k^n \oplus k$. Таким образом, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}_n \oplus (k^n \oplus k) \subset \mathfrak{sl}_{n+2}$. Из леммы 3, п. (a), вытекает, что

$$\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind}(\mathfrak{gl}_n \oplus k^n) + 1 = 1.$$

Получаем, что $\text{ind } \mathfrak{h} < \text{ind } \mathfrak{k} + \dim \mathfrak{h}^u$. Следовательно, в неравенстве (6) равенство не достигается, что противоречит коизотропности подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{k}$ содержит неприводимые компоненты алгебры $\mathfrak{s}$. Поскольку $\mathfrak{s}$ — классическая простая алгебра Ли или $\mathfrak{so}_4 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, то $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}$ или $\mathfrak{k} = \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, где $\mathfrak{k}$ вкладывается в $\mathfrak{s}$ как прямое слагаемое. Во втором случае $\text{ind } \mathfrak{h} = 3$ (лемма 3, п. (e)) и неравенство (*) не выполнено, что противоречит коизотропности подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_6$.

Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}^u$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{so}_n$, то $\mathfrak{s}$ неприводимо действует на $\mathfrak{p}^u$ и поэтому $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{p}^u$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, то нильпотентный радикал есть сумма своего центра $\mathfrak{c}$ и некоторого неприводимого подпространства V , $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{c} + V$,

причем $[V, V] = \mathfrak{c}$. Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{c}$, то $\mathfrak{h}$ не удовлетворяет равенству (*). Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{p}^u$ и $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Получаем, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_v$. Как было показано выше, все такие подалгебры являются коизотропными.

Получаем полный список пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где подалгебра $\mathfrak{h}$ имеет полупростую подалгебру Леви и коизотропна: $(\mathfrak{sl}_n, (\mathfrak{sl}_n)_v)$, $(\mathfrak{so}_n, (\mathfrak{so}_n)_v)$, $(\mathfrak{sp}_n, (\mathfrak{sp}_n)_v)$.

Пусть теперь $\mathfrak{k} \not\subseteq \mathfrak{s}$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} \neq 0$ и $\mathfrak{k}$ не является полупростой. Положим $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{h}^u$ (вообще говоря, $\mathfrak{h}'$ не совпадает с коммутантом алгебры $\mathfrak{h}$). Подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{h}'$ совпадает с $\mathfrak{k}'$ и полупроста.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{so}_n, (\mathfrak{so}_n)_{(v)})$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z}$, поскольку центр $\mathfrak{z}$ одномерен. Будем считать, что $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{p}^u$. Рассмотрим $(\mathfrak{h}^u)^*$ как $\mathfrak{k}$ - и $\mathfrak{k}'$ -модули. Легко видеть, что стабилизаторы $\mathfrak{k}_{\xi}$ и $\mathfrak{k}'_{\xi}$ точки $\xi \in (\mathfrak{h}^u)^*$ общего положения совпадают. Следовательно, $\text{ind}(\mathfrak{k}, (\mathfrak{h}^u)^*) = \text{ind}(\mathfrak{k}', (\mathfrak{h}^u)^*) - 1$. Таким образом, по теореме Раиса $\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } \mathfrak{h}' - 1$. Так как $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' + 1$, то $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}'$. Значит, подалгебра $\mathfrak{h}'$ должна быть коизотропной в $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}$. Приходим к уже упомянутой паре.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{sp}_n, (\mathfrak{sp}_n)_{(v)})$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z}$, поскольку $\dim \mathfrak{z} = 1$. Алгебра $\mathfrak{p}$ имеет вид $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(0) \oplus \mathfrak{p}(1) \oplus \mathfrak{p}(2)$, где $\mathfrak{p}(0)$ — подалгебра Леви, $\mathfrak{p}(1) \oplus \mathfrak{p}(2)$ — унитарный радикал, $\mathfrak{p}(2)$ — его центр. Алгебра $\mathfrak{h}$ наследует градуировку с градуировки алгебры $\mathfrak{p}$. Будем считать, что $\mathfrak{h}^u = \mathfrak{p}^u$. Рассмотрим $\mathfrak{h}(2)^*$ как $\mathfrak{k}$ - и $\mathfrak{k}'$ -модули. Стабилизаторы $\mathfrak{k}_{\xi}$ и $\mathfrak{k}'_{\xi}$ точки $\xi \in \mathfrak{h}(2)^*$ общего положения совпадают. Следовательно, $\text{ind}(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}(2)^*) = \text{ind}(\mathfrak{k}', \mathfrak{h}(2)^*) - 1$. Таким образом, согласно теореме 7, $\text{ind } \mathfrak{h} = \text{ind } \mathfrak{h}' - 1$. Так как $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' + 1$, то $\text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \text{cork}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}'$. Значит, подалгебра $\mathfrak{h}'$ должна быть коизотропной в $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}$. Мы приходим к уже упомянутой выше паре.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)})$. Пусть $n \geq 3$. Как и выше, на алгебре $\mathfrak{h}$ есть градуировка $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(0) \oplus \mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}(2)$. Если $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq \mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq \langle (n-1)E_{11} - 2(E_{22} + \dots + E_{nn}) + (n-1)E_{n+1, n+1} \rangle$, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что $\mathfrak{k}_{\xi} = \mathfrak{k}'_{\xi}$ и подалгебра $\mathfrak{h}'$ коизотропна в $\mathfrak{g}$. Но в алгебре $\mathfrak{p}_{(\alpha_1, \alpha_n)}$ не существует коизотропных подалгебр с тривиальной группой характеров. Следовательно, если $n \geq 3$, то $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z}$ или $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \langle (n-1)E_{11} - 2(E_{22} + \dots + E_{nn}) + (n-1)E_{n+1, n+1} \rangle$.

Далее, из неравенства (8) вытекает, что

$$\dim \mathfrak{s} - \dim \mathfrak{k}' - \text{rk } \mathfrak{s} - \text{rk } \mathfrak{k}' \leq 2 \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}. \quad (10)$$

Отметим, что правая часть не превосходит 4 и $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_{n-1}$. Все редуктивные подалгебры алгебры $\mathfrak{sl}_{n-1}$ коранга не более 4 перечислены в §4. Прямая проверка всех возможных вариантов дает следующий список коизотропных пар, отличных от перечисленных выше: $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{b})$ и $(\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{u} + \langle E_{11} + 2E_{22} + E_{33} \rangle)$, где $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра в $\mathfrak{sl}_3$, а $\mathfrak{u}$ — ее унитарный радикал.

Наконец, пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, (\mathfrak{sl}_{n+1})_{(v)})$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z}$, поскольку $\dim \mathfrak{z} = 1$. Из неравенства (10) следует, что алгебра $\mathfrak{k}'$ есть подалгебра коранга не более 2 в $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_n$. Прямая проверка показывает, что данный случай не дает новых коизотропных пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Таким образом, доказана теорема 2.

§6. Нередуктивные коизотропные подалгебры с тривиальной группой характеров в полупростых алгебрах Ли

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i$ полупроста, $\mathfrak{g}_i$ — ее простые идеалы, а подалгебра $\mathfrak{h}$ нередуктивна, не имеет характеров и не содержит идеалов алгебры $\mathfrak{g}$.

Зафиксируем разложение Леви $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}^u$, где алгебра $\mathfrak{k}$ полупроста. Можно считать, что

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q} = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{q}_i \oplus \bigoplus_{j=k+1}^m \mathfrak{g}_j,$$

где $\mathfrak{q}_i$ — коммутант параболической подалгебры $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{g}_i$, причем $\mathfrak{h}^u \subset \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{p}_i^u$. Пусть $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{s}_i \oplus \mathfrak{p}_i^u$ — разложение Леви. Алгебра $\mathfrak{s}_i$ полупроста, так как алгебра $\mathfrak{h}$ не имеет нетривиальных характеров. Можно считать, что

$$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{s} = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{s}_i \oplus \bigoplus_{j=k+1}^m \mathfrak{g}_j.$$

Будем считать, что $\mathfrak{s}_j = \mathfrak{g}_j$ при $k+1 \leq j \leq m$. Как было отмечено выше, достаточно найти неразложимые коизотропные пары.

Рассмотрим проекцию $\pi_i: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$. Подалгебра $\pi_i(\mathfrak{h})$ коизотропна в $\mathfrak{g}_i$. Следовательно, $\pi_i(\mathfrak{h}) = \mathfrak{q}_i$ и $\pi_i(\mathfrak{k}) = \mathfrak{s}_i$ при $1 \leq i \leq k$. Если $k+1 \leq j \leq m$ и $\mathfrak{g}_j \neq \mathfrak{sl}_2$, то $\pi_j(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_j$ или $\pi_j(\mathfrak{h}) = \mathfrak{so}_{n-1}$, если $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{so}_n$. Отсюда следует, что если $\mathfrak{s}_i \neq \mathfrak{so}_4$, то алгебра $\pi_i(\mathfrak{k})$ проста.

Пусть $\mathfrak{s}_i \neq \mathfrak{so}_4, \mathfrak{sl}_2$. Тогда алгебра $\pi_i(\mathfrak{k})$ проста. Следовательно, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_i \oplus (\text{Кер } \pi_i \cap \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{k}_i \simeq \pi_i(\mathfrak{k})$ — простой идеал алгебры $\mathfrak{k}$, причем $\mathfrak{k}_i \neq \mathfrak{sl}_2$. Таким образом, если $\pi_j(\mathfrak{k}) \neq 0$ для некоторого j , то $\pi_j(\mathfrak{k}_i) = \pi_j(\mathfrak{k})$ и, следовательно, $\pi_j(\text{Кер } \pi_i \cap \mathfrak{k}) = 0$. Пусть I — множество всех таких j , что $\pi_j(\mathfrak{k}) \neq 0$. Положим

$$\mathfrak{s}_I = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{s}_i, \quad \mathfrak{h}_I = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i, \quad \mathfrak{g}_I = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i.$$

Так как $\mathfrak{k}_i$ — идеал в $\mathfrak{s}$, то $\mathfrak{h}_I$ — идеал в $\mathfrak{h}$. Следовательно, пару $(\mathfrak{g}_I, \mathfrak{h}_I)$ можно отщепить. Когда такая пара будет коизотропной? Аналогично тому, как это делалось в §4, можно установить неравенства (6)–(9). Из неравенства (9) следует, что $\mathfrak{k}_i$ является коизотропной подалгеброй в $\mathfrak{s}_I$. Из классификации Кнопа следует, что алгебра $\mathfrak{s}_I$, а значит, и $\mathfrak{g}_I$, должна быть простой. Следовательно, пара $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ есть одна из пар, перечисленных в §§2 и 3.

Пусть теперь $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{so}_4 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Тогда $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{so}_6$ и $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{so}_6)_v$. Имеем $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_i \oplus (\text{Кер } \pi_i \cap \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{k}_i \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Обозначим простые слагаемые алгебры $\mathfrak{k}_i$ через $\mathfrak{k}_{i_1}$ и $\mathfrak{k}_{i_2}$. Можно считать, что существует такое $j \neq i_1$, что $\pi_j(\mathfrak{k}_{i_1}) \neq 0$ (иначе пару $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ можно отщепить). Значит, $\mathfrak{k}_{i_1}$ вкладывается диагональным образом в некоторые простые слагаемые алгебры $\mathfrak{s}$, изоморфные $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим два из этих слагаемых через $\mathfrak{s}_{i_1}$ и $\mathfrak{s}_{i_2}$. При этом будем считать, что $\mathfrak{s}_{i_1} \subset \mathfrak{s}_i$ и $\mathfrak{s}_{i_2} \subset \mathfrak{s}_j$, $j \neq i$. Увеличив подалгебру $\mathfrak{h}$, можно считать, что $\mathfrak{k}$ содержит все остальные слагаемые алгебры $\mathfrak{s}$, изоморфные $\mathfrak{sl}_2$. Тогда $\mathfrak{k}_i$ — идеал в $\mathfrak{s}$, а $\mathfrak{h}_i$ — идеал в $\mathfrak{h}$. Следовательно, пару $(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j))$ можно отщепить. Пара $(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{q}_j)$ может быть одной из следующих: $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2)$, $(\mathfrak{sl}_3, (\mathfrak{sl}_3)_v)$, $(\mathfrak{so}_6, (\mathfrak{so}_6)_v)$. Прямая проверка показывает, что ни в одной алгебре $\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j$ нет неразложимых коизотропных подалгебр, кроме случая $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{so}_4$, указанного выше. Поэтому компонента $\mathfrak{k}_{i_1}$ не может вкладываться диагонально в $\mathfrak{s}$ и пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является разложимой.

Пусть $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{sl}_2$. Тогда $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_i \oplus (\text{Кер } \pi_i \cap \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{k}_i \simeq \mathfrak{sl}_2$. Алгебра $\mathfrak{k}_i$ может вкладываться диагональным образом в несколько компонент алгебры $\mathfrak{s}$, изоморфных $\mathfrak{sl}_2$. Как и в предыдущем абзаце, можно считать, что $\mathfrak{k}_i$ вкладывается

только в две компоненты $\mathfrak{s}_{i_1}$ и $\mathfrak{s}_{i_2}$, причем $\mathfrak{s}_{i_1} \subset \mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{s}_{i_2} \subset \mathfrak{s}_j$, $i \neq j$. Следовательно, пару $(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j))$ можно отщепить. Прямая проверка показывает, что среди таких пар также нет неразложимых коизотропных.

Таким образом, доказана теорема 3.

§7. Структура централизаторов коизотропных подалгебр в универсальной обертывающей алгебре

В этом параграфе мы докажем теорему 4, сформулированную во введении. В случае когда $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра, она была доказана Кнопом [1]. Поэтому далее мы будем считать, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — одна из пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_v)$, перечисленных в п. 2) теоремы 3.

Зафиксируем следующие базисы и инвариантные билинейные формы α в пространстве V стандартного представления ρ классической простой алгебры $\mathfrak{g}$, а также максимальный тор $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$:

- 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, базис $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, максимальный тор $\mathfrak{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n, -t_1 - \dots - t_n)$;
- 2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, базис $\{e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}\}$, билинейная форма $\alpha(x, y) = x_1 y_{-1} - y_1 x_{-1} + \dots + x_n y_{-n} - y_n x_{-n}$, максимальный тор $\mathfrak{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n, -t_{-n}, \dots, -t_{-1})$;
- 3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, базис $\{e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}\}$, билинейная форма $\alpha(x, y) = x_1 y_{-1} + x_{-1} y_1 + \dots + x_n y_{-n} + x_{-n} y_n$, максимальный тор $\mathfrak{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n, -t_{-n}, \dots, -t_{-1})$;
- 4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, базис $\{e_1, \dots, e_n, e_0, e_{-n}, \dots, e_{-1}\}$, билинейная форма $\alpha(x, y) = x_1 y_{-1} + x_{-1} y_1 + \dots + x_n y_{-n} + x_{-n} y_n$, максимальный тор $\mathfrak{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n, 0, -t_{-n}, \dots, -t_{-1})$.

Будем считать, что вектор v — это e_1 , первый базисный вектор в указанных базисах. Также положим $q(x) = \alpha(x, x)$.

Зафиксируем борелевскую подалгебру верхнетреугольных матриц $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, стабилизирующую прямую $\langle v \rangle$ и содержащую тор $\mathfrak{t}$. Обозначим унипотентный радикал алгебры $\mathfrak{b}$ через $\mathfrak{u}$, а стабилизатор вектора v в $\mathfrak{t}$ через $\mathfrak{t}_0$. Алгебра $\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{u}$ есть борелевская подалгебра в $\mathfrak{h}$. Пусть Π — множество простых корней относительно $\mathfrak{t}$, такое, что алгебра $\mathfrak{b}$ есть сумма максимального тора $\mathfrak{t}$ и корневых подпространств, отвечающих положительным корням. Старший вес стандартного представления относительно $\mathfrak{t}$ обозначим через λ_1 , так что $\lambda_1(\mathfrak{t}_0) = 0$. Через $\Lambda_1 = l\lambda_1$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначим наименьший вес, кратный λ_1 и лежащий в $\mathbb{Z} + \Pi$. Легко видеть, что $\Lambda_1 = (n+1)\lambda_1$ для алгебры $\mathfrak{sl}_{n+1}$, $\Lambda_1 = \lambda_1$ для алгебры $\mathfrak{so}_{2n+1}$ и $\Lambda_1 = 2\lambda_1$ для алгебр $\mathfrak{so}_{2n}$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Будем обозначать через $\rho(\mu): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V(\mu))$ неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом μ в пространстве $V(\mu)$. Рассмотрим симметрическую степень $\rho_m = S^{lm}(\rho)$ стандартного представления $\rho = \rho(\lambda_1)$. В случаях $\mathfrak{sl}_{n+1}$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ представление ρ_m совпадает с представлением $\rho(m\Lambda_1)$. В случае $\mathfrak{so}_{2n}$ имеем $\rho_m = \rho(m\Lambda_1) \oplus q\rho_{m-1}$. В случае $\mathfrak{so}_{2n+1}$ имеем $\rho_m = \rho(m\Lambda_1) \oplus q\rho_{m-2}$. Легко видеть, что справедлива следующая

Лемма 4. *Подпространство веса 0 относительно тора $\mathfrak{t}$ в пространстве V_m представления ρ_m имеет следующий вид:*

- 1) $\langle (x_1 x_2 \dots x_{n+1})^m \rangle$ в случае $\mathfrak{sl}_{n+1}$;
- 2) линейная оболочка мономов степени m , являющихся произведениями мономов $x_0, x_1 x_{-1}, \dots, x_{n-1} x_{-(n-1)}$, в случае $\mathfrak{so}_{2n+1}$;

3) многочлены степени $2m$, порождаемые мономами $x_1x_{-1}, \dots, x_{n-1}x_{-(n-1)}$, в случаях $\mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$.

Следующая лемма описывает строение центра $Z(\mathfrak{h})$ алгебры $P(\mathfrak{h})$.

Лемма 5. Алгебра $Z(\mathfrak{h})$ есть алгебра многочленов $k[f_1, \dots, f_d]$ от $d = \text{ind } \mathfrak{h}$ переменных. Более того,

1) в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}$ можно выбрать порождающие $f_1, \dots, f_d$ так, что они имеют вес Λ_1 относительно максимального тора $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$;

2) в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ можно выбрать порождающие $f_1, \dots, f_d$ так, что f_1 имеет вес Λ_1 , а $f_2, \dots, f_d$ имеют вес $2\Lambda_1$ относительно $\mathfrak{t}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n \oplus k^n$. Пусть $(A, v) \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{sl}_n$, $v \in k^n$. Легко видеть, что многочлен $\det(v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v)$ является инвариантом и его вес относительно тора равен Λ_1 .

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_r$, то алгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{r-2} \oplus k^{r-2}$ есть $\mathbb{Z}_2$ -стягивание алгебры $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{so}_{r-1}$ [12]. Точнее, зафиксируем координаты $x'_1, \dots, x'_{r-1}$ и форму $\alpha'(x') = x_1'^2 + \dots + x_{r-1}'^2$ в пространстве стандартного представления алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$. Рассмотрим элемент $t = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$, и пусть θ — сопряжение элементом t . Это инволютивный автоморфизм алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$. Он задает $\mathbb{Z}_2$ -градуировку на $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$, где $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{so}_{r-2}$ и $\mathfrak{h}_1 = V$, $V = k^{r-2}$. Зададим на пространстве $\mathfrak{h}$ новое умножение $[\cdot, \cdot]'$. Положим $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_i]' = [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_i]$, $i = 0, 1$, и $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]' = 0$. Алгебра с таким умножением есть в точности $\mathfrak{h}$. Известно [12], что в этом случае алгебра $Z(\mathfrak{h})$ свободна и что порождающие инварианты алгебры $\mathfrak{h}$ можно получить из инвариантов алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$.

Пусть $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d$ — образующие алгебры инвариантов алгебры $\mathfrak{so}_{r-1}$. Представим их в виде $\hat{f}_i = \bigoplus h_j v_j$, где $h_j \in k[\mathfrak{so}_{r-2}]$, $v_j \in k[V]$. Алгебра $Z(\mathfrak{g})$ порождается инвариантами f_i , где f_i есть сумма тех мономов многочлена $\hat{f}_i$, для которых степень множителя v_j максимальна. В случае когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, алгебра $\mathfrak{h}$ получается стягиванием алгебры $\mathfrak{so}_{2n-1}$. Инварианты этой алгебры суть суммы главных миноров четных порядков. Следовательно, инварианты алгебры $\mathfrak{h}$ — суммы главных миноров четных порядков, в которые входит первый столбец и первая строка. Легко видеть, что максимальная степень мономов по V равна 2 и вес относительно тора $\mathfrak{t}$ есть Λ_1 .

Аналогично, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ алгебра $\mathfrak{h}$ получается стягиванием алгебры $\mathfrak{so}_{2n}$. Инварианты этой алгебры порождаются суммами главных миноров четного порядка и пфаффианом. Соответственно максимальные степени по V равны 2 и 1, а веса относительно тора $\mathfrak{t}$ равны $2\Lambda_1$ и Λ_1 .

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ алгебра $\mathfrak{h}$ имеет одномерный центр. Обозначим порождающую центра через e . При этом $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_e$ — централизатор нильпотентного элемента e в $\mathfrak{g}$. В [13] доказано, что алгебра $Z(\mathfrak{g}_e)$ свободна. Более того, там же описана процедура получения порождающих алгебры $Z(\mathfrak{g}_e)$ из порождающих алгебры $Z(\mathfrak{g})$. В данном случае процедуру получения порождающих алгебры $Z(\mathfrak{h})$ можно описать следующим образом. Пусть f — нильпотентный элемент, противоположный элементу e относительно тора $\mathfrak{t}$, и $\{\hat{F}_i\}$, $1 \leq i \leq n$, — система порождающих алгебры $Z(\mathfrak{sp}_{2n})$, а именно, F_i — сумма определителей главных миноров порядка $2i$. Рассмотрим многочлен $\overline{F}_i(\mathfrak{g}_e) = \hat{F}_i(f + \mathfrak{g}_e)$ и возьмем однородную компоненту F_i многочлена $\overline{F}_i$ наименьшей степени. Многочлены F_i

являются порождающими алгебры $\mathfrak{h}$. Легко видеть, что веса порождающих F_i относительно тора $\mathfrak{t}$ равны Λ_1 . $\square$

Замечание. Поскольку $Z(\mathfrak{g}) = \text{gr } \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ и отображение симметризации ψ является поднятием, алгебра $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ порождается элементами $\psi(f_1), \dots, \psi(f_d)$.

Пусть G — алгебраическая группа с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$, а $H \subset G$ — алгебраическая подгруппа с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$.

Лемма 6. Пусть M_0 — нуль-конус коприсоединенного представления $G : \mathfrak{g}^*$. Действие $H : M_0$ имеет конечный стабилизатор общего положения.

Доказательство. Будем считать, что G — классическая простая группа Ли. Пространство стандартного представления группы G будем также обозначать через V и зафиксируем там такой же базис, как и для соответствующего представления алгебры $\mathfrak{g}$. Будем считать, что $H = G_v$.

1) Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. Рассмотрим точку

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_0.$$

Стабилизатор точки x тривиален. Действительно, пусть $h \in H$ и $h x h^{-1} = x$. Обозначим столбцы матрицы h через $h_1, \dots, h_{n+1}$, при этом $h_1 = e_1$. Столбцы матрицы $h x$ равны $h_2, \dots, h_{n+1}, 0$, поэтому первый столбец матрицы $h x h^{-1}$ равен h_2 и, следовательно, $h_2 = e_2$. Аналогичным образом последовательно получаем, что $h_i = e_i$, т. е. $h = E$.

Для других классических алгебр Ли выберем следующие точки x :

2) Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Матрица $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2n$, такая, что $x_{i,i-1} = 1$, $2 \leq i \leq n+1$, $x_{i,i-1} = -1$, $n+2 \leq i \leq 2n$, $x_{ij} = 0$, $i-j \neq 1$.

3) Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$. Матрица $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2n+1$, такая, что $x_{i,i-1} = 1$, $2 \leq i \leq n+1$, $x_{i,i-1} = -1$, $n+2 \leq i \leq 2n+1$, $x_{ij} = 0$, $i-j \neq 1$.

4) Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$. Матрица $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2n$, такая, что $x_{i,i-1} = 1$, $2 \leq i \leq n$, $x_{i,i-1} = -1$, $n+2 \leq i \leq 2n$, $x_{n+1,n-1} = 1$, $x_{n+2,n} = -1$ и $x_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Тривиальность стабилизатора точки x проверяется аналогично случаю $\mathfrak{sl}_{n+1}$. $\square$

Обозначим через $Z(\mathfrak{g})_+$ множество элементов из $Z(\mathfrak{g})$ с нулевым свободным членом и рассмотрим идеал $Z(\mathfrak{g})_+ P(\mathfrak{g})$ в $P(\mathfrak{g})$.

Следствие. $Z(\mathfrak{g})_+ P(\mathfrak{g}) \cap P(\mathfrak{h}) = 0$.

Доказательство. Поскольку группа H имеет конечный стабилизатор общего положения при действии на нуль-конусе M_0 (лемма 6), отображение моментов $\Phi : M_0 \rightarrow \mathfrak{h}^*$ доминантно и, следовательно, соответствующее отображение алгебр функций $\Phi^* : P(\mathfrak{h}) \rightarrow k[M_0]$ инъективно. Так как $k[M_0] = P(\mathfrak{g})/I(M_0)$, где $I(M_0) = Z(\mathfrak{g})_+ P(\mathfrak{g})$ — идеал нулей нуль-конуса M_0 , то $Z(\mathfrak{g})_+ P(\mathfrak{g}) \cap P(\mathfrak{h}) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 4.1) Если A — однородное дополнение к идеалу $Z(\mathfrak{g})_+ P(\mathfrak{g})$ в $P(\mathfrak{g})$, то $P(\mathfrak{g}) \simeq A \otimes Z(\mathfrak{g})$ (как векторное пространство), причем изоморфизм задается перемножением компонент [14, теорема 0.2]. Можно выбрать

подпространство A так, что оно будет инвариантным относительно присоединенного действия алгебры $\mathfrak{g}$ [14, теорема 0.9]; тогда $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \simeq A^{\mathfrak{h}} \otimes Z(\mathfrak{g})$.

Из леммы 1 следует, что отображение моментов $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{h}^*$ доминантно для симплектического слоя общего положения M , так что $P(\mathfrak{h}) \hookrightarrow k[M]$. Следовательно,

$$P(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow P(\mathfrak{g}). \quad (11)$$

Действительно, предположим, что существуют линейно независимые $f_1, \dots, f_l \in P(\mathfrak{h})$ и $z_1, \dots, z_l \in Z(\mathfrak{g})$, такие, что $z_1 f_1 + \dots + z_l f_l = 0$. Функции $z_1, \dots, z_l$ постоянны на слое M . Обозначим через $c_1, \dots, c_l$ ограничения этих функций на M . Получаем, что на M выполнено равенство $c_1 f_1 + \dots + c_l f_l = 0$. Следовательно, $z_1 = \dots = z_l = 0$ на слое M общего положения, а значит, и всюду. Переходя в (11) к $\mathfrak{h}$ -инвариантам, получаем, что $Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

Рассмотрим идеалы $I_1 = Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g})_+ \triangleleft Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g})$ и $I_2 = P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} Z(\mathfrak{g})_+ \triangleleft P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, порожденные множеством $Z(\mathfrak{g})_+$. По следствию из леммы 6 $Z(\mathfrak{h}) \cap I_2 = 0$. Таким образом, $(Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g}))/I_1 \hookrightarrow P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/I_2$. Алгебра в левой части изоморфна $Z(\mathfrak{h})$, а в правой $A^{\mathfrak{h}}$ (как линейные пространства и даже как $\mathfrak{t}$ -модули), причем вложение эквивариантно относительно действия $\mathfrak{t}$. Из [14, теорема 0.9] следует, что кратность вхождения неприводимого представления $\rho(\mu)$ в представление $\mathfrak{g}: A$ равна кратности нулевого веса в пространстве $V(\mu)$. Так как $\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{u} \subset \mathfrak{h}$, то $A^{\mathfrak{h}}$ есть линейная оболочка старших векторов тех представлений $\rho(\mu)$, для которых $\mu(\mathfrak{t}_0) = 0$. Следовательно, вес μ пропорционален весу λ_1 и, более того, весу Λ_1 , так как $\mu \in \mathbb{Z}_+ \Pi$ (иначе в пространстве $V(\mu)$ подпространство нулевого веса тривиально). Таким образом, пространство $A^{\mathfrak{h}}$ как $\mathfrak{t}$ -модуль есть сумма подмодулей веса $m\Lambda_1$, которые входят в $A^{\mathfrak{h}}$ с кратностью, равной размерности подпространства веса 0 в $\mathfrak{g}$ -модуле $V(m\Lambda_1)$. Пространство $Z(\mathfrak{g})$ также является $\mathfrak{t}$ -модулем. Леммы 4 и 5 дают описание размерностей весовых подпространств $\mathfrak{t}$ -модулей $A^{\mathfrak{h}}$ и $Z(\mathfrak{g})$. Легко видеть, что размерности весовых подпространств совпадают и, следовательно, $Z(\mathfrak{h}) = A^{\mathfrak{h}}$. Таким образом, все указанные вложения являются равенствами и $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = Z(\mathfrak{h}) \otimes Z(\mathfrak{g})$.

2) Докажем индукцией по n , что $\mathfrak{U}^{(n)}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Ясно, что $\mathfrak{U}^{(0)}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = k \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathfrak{U}^{(n-1)}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Пусть $\xi \in \mathfrak{U}^{(n)}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, $\bar{\xi}$ — старшая компонента элемента ξ степени n при проекции на $P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. По п. 1) $\bar{\xi} = \bigoplus_{i=1}^n a_i b_i$, где $a_i \in Z(\mathfrak{h})$, $b_i \in Z(\mathfrak{g})$. Рассмотрим некоторые прообразы $\hat{a}_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$, $\hat{b}_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ элементов a_i , b_i в алгебре $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Так как $\xi_{n-1} = \xi - \bigoplus_{i=1}^n \hat{a}_i \hat{b}_i \in \mathfrak{U}^{(n-1)}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, то и $\xi \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, что и требовалось. Коммутативность алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ следует отсюда очевидным образом. $\square$

Автор пользуется случаем выразить искреннюю признательность своему научному руководителю Э. Б. Винбергу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Knop, *Der Zentralisator einer Liealgebra in einer einhullenden Algebra*, J. Reine Angew. Math., **406** (1990), 5–9.
- [2] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [3] Э. Б. Винберг, *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия*, УМН, **56:1** (2001), 3–62.

- [4] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 55, ВИНТИ, М., 1989, 137–309.
- [5] D. I. Panyushev, *Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras*, Moscow Math. J., **1**:2 (2001), 221–241.
- [6] D. Luna, *Sur les orbites fermées des groupes algébriques réductifs*, Invent. Math., **16** (1972), 1–5.
- [7] P. Tauvel, R. W. T. Yu, *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **54**:6 (2004), 1793–1810.
- [8] А. Г. Элашвили, *Индекс оросферических подалгебр полупростых алгебр Ли*, Труды Тбилисского матем. ин-та, **77** (1985), 116–126.
- [9] M. Rais, *L'indice des produits semi-directs $E \rtimes_{\rho} \mathfrak{g}$* , C. R. Acad. Sci. Paris, Ser A, **287**:4 (1978), 195–197.
- [10] Е. М. Андреев, Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили, *Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли*, Функц. анализ и его прил., **1**:4 (1967), 3–7.
- [11] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
- [12] D. Panyushev, *On the coadjoint representation of $\mathbb{Z}_2$ -contractions of reductive algebras*, Adv. Math., **213**:1 (2007), 380–404.
- [13] D. Panyushev, A. Premet, O. Yakimova, *On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras*, J. Algebra, **313**:1 (2007), 343–391.
- [14] В. Kostant, *Lie group representations on polynomial ring*, Amer. J. Math., **85** (1963), 327–404.

Московский государственный университет
e-mail: zorin@mccme.ru

Поступило в редакцию
13 июля 2007 г.