Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, Гиперболические группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 64–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:58:06

Гиперболические группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$

© 2009. О. В. ШВАРЦМАН*

Пусть Γ — подгруппа группы $U(1, 1)$, порожденная комплексными отражениями. Предположим, что группа Γ дискретно действует в области $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 - |z_2|^2 < 0\}$, а проективная группа $P\Gamma$ действует в единичном диске $B = \{|z_1/z_2| < 1\}$ как фуксова группа сигнатуры $(n_1, \dots, n_s)$, $s \geq 3$, $n_i \geq 2$. Для таких групп в статье доказана теорема типа Шевалле, т. е. найдено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы факторпространство K/Γ было изоморфно $\mathbb{C}^2 - \{0\}$.

§1. Определения, результаты, обозначения, план статьи

В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ и конус $K: |z_1|^2 - |z_2|^2 < 0$. Пусть $PK = K/\mathbb{C}^*$ — проективизация этого конуса. Область PK — это единичный диск $D = \{|z_1/z_2| < 1\}$ в проективном пространстве $\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\mathbb{C}^*$. В диске D имеется риманова метрика постоянной отрицательной кривизны, совместимая с его комплексной структурой.

Линейные преобразования из группы $GL(2, \mathbb{C})$, сохраняющие эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$, образуют унитарную группу $U(1, 1)$. Эта группа сохраняет конус K . Проективная группа $PU(1, 1)$ действует в $\mathbb{CP}^1$ дробно-линейными преобразованиями, сохраняя диск D . При этом $PU(1, 1)$ есть группа всех сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости D (модель Пуанкаре в диске).

В дальнейшем образ линейной группы $\Gamma \subset U(1, 1)$ в $PU(1, 1)$ будет обозначаться через $P\Gamma$ и называться *материнской группой*.

Определение. Дискретная группа $\Gamma \subset U(1, 1)$ называется *гиперболической группой Шевалле*, если

- 1) $K/\Gamma = \mathbb{C}^2 - \{0\}$ (изоморфизм комплексных многообразий);
- 2) группа $P\Gamma$ есть кокомпактная фуксова группа (т. е. дискретная группа сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости D с компактным факторпространством $D/P\Gamma$).

В дальнейшем прилагательное «гиперболическая» мы будем опускать.

Элемент $\gamma \in U(1, 1)$ называется отражением, если у него есть неподвижный вектор в конусе K . Известно (см., например, [4]), что группа Шевалле Γ порождена отражениями.

Как следствие, группа $P\Gamma$ есть фуксова группа рода нуль, т. е. риманова поверхность $D/P\Gamma$ есть сфера Римана $\mathbb{CP}^1$.

Обозначим через $n_1, \dots, n_s$ порядки ветвления накрытия $D \rightarrow D/P\Gamma$. Набор $(n_1, \dots, n_s)$ называется *сигнатурой* фуксовой группы $P\Gamma$ рода нуль. При этом, как известно, $\sum_1^s 1/n_i < s - 2$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №07-01-00390.

Главным результатом статьи является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\Gamma \subset U(1, 1)$ — дискретная группа, порожденная отражениями, и $P\Gamma$ — фуксова группа рода нуль сигнатуры $(n_1, \dots, n_s)$.

Группа Γ тогда и только тогда является группой Шевалле, когда

$$\nu = 2 \left((s-2) - \sum_1^s \frac{1}{n_i} \right)^{-1} - \text{целое число.} \quad (*)$$

Следующий результат позволяет в принципе обозреть все группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$.

Теорема 2. Рассмотрим в группе $U(1, 1)$ множество всех дискретных подгрупп Γ , порожденных отражениями, с фиксированной материнской фуксовой группой T рода нуль. Тогда

- 1) число таких групп Γ конечно;
- 2) среди них имеется наибольшая группа Γ_T , которая содержит любую другую такую группу в качестве нормальной подгруппы конечного индекса.

Комментарий. 1) Важно подчеркнуть, что критерий $(*)$ в теореме 1 касается любой группы отражений Γ в $\mathbb{C}^2$ с данной материнской группой T . Для наибольшей же группы Γ_T он был получен совершенно другим способом в работе [6]. Таким образом, в данной статье мы обобщаем основной результат этой работы, предлагая, в частности, и его независимое доказательство. Вместе с тем в [6] остается несколько лемм, ключевых для нашего доказательства теорем 1 и 2.

2) В эллиптическом случае любая конечная линейная группа G в $\mathbb{C}^2$, порожденная отражениями (т. е. элементами, у которых есть собственное значение, равное единице), автоматически обладает тем свойством, что $(\mathbb{C}^2 - \{0\})/G = \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Это одна из формулировок теоремы Шевалле [7] для конечных групп, порожденных отражениями, в $\mathbb{C}^n$ (это обстоятельство и объясняет название рассматриваемых нами групп).

Теорема Шевалле утверждает, что $\mathbb{C}^n/G = \mathbb{C}^n$ для любой конечной линейной группы $G \subset GL(n, \mathbb{C})$, порожденной отражениями. В гиперболическом случае всякая группа Шевалле порождена отражениями, но далеко не всякая группа, порожденная отражениями, есть группа Шевалле.

3) Условию $(*)$ удовлетворяют 286 сигнатур (см. [6]).

Теоремы 1, 2 и теорема 3 из §5 показывают, что множество групп Шевалле в $\mathbb{C}^2$ конечно и обозримо.

Будем использовать следующие обозначения и соглашения:

- $\bar{\gamma}$ — подъем элемента $\gamma \in P\Gamma$ в группу $U(1, 1)$ (ясно, что любые два подъема отличаются множителем, по модулю равным 1);
- l_x — прямая в $\mathbb{C}^2$, соответствующая точке $x \in \mathbb{C}P^1$, а $\bar{x}$ — любой ненулевой вектор, лежащий на l_x ;
- $Z(\Gamma)$ — центр группы Γ ;
- (a, b) — это НОД(a, b), $a|b$ означает, что a делит b , и $\{a\}$ — дробная часть числа a ;
- T или $T(n_1, \dots, n_s)$ — фуксова группа рода нуль с сигнатурой $(n_1, \dots, n_s)$;
- группу, порожденную отражениями, будем называть группой отражений;
- вместо числа $2((s-2) - \sum_1^s 1/n_i)^{-1}$ будем писать ν ;

- W^* — пространство векторного расслоения W без нулевого сечения;
- список образующих и определяющих соотношений группы будем называть ее *кодом*; если группа абелева, договоримся не включать в ее код соотношения коммутации.

План статьи таков: в §§2–5 изучаются группы отражений Γ в конусе K с заданной материнской группой T и доказываются теоремы 2 и 3; в §6 мы напомним некоторые хорошо известные факты о Γ -расслоениях и начинаем подготовку к доказательству теоремы 1; в §7 собраны главные результаты о свободных коциклах, полученные в [7]; в §8 доказывается центральная теорема 1.

Я благодарю Э. Б. Винберга за интерес к работе и ценные обсуждения ее результатов.

§2. Канонический подъем эллиптических элементов, фуксовы группы рода нуль и максимальная группа Γ_T

1. Рассмотрим в группе $PU(1, 1)$ эллиптический элемент A . У преобразования A есть в CP^1 две неподвижные точки, одна из которых, назовем ее x , лежит в диске D . Другая его неподвижная точка y лежит в дополнительном диске $CP^1 \setminus D$. Пусть в касательном пространстве к диску D в точке x элемент A действует умножением на $e^{i\varphi}$. Рассмотрим в группе $U(1, 1)$ отражение $\bar{A}$, которое поточечно сохраняет прямую l_x , а на прямой l_y действует умножением на $e^{i\varphi}$. Такое отражение определено однозначно. Его порядок равен порядку эллиптического элемента A . Отражение $\bar{A}$ назовем каноническим подъемом элемента A .

2. Пусть $T = T(n_1, \dots, n_s)$, $n_i \geq 2$, $s \geq 3$. Фундаментальная область для действия группы T в диске D может быть выбрана в виде такого выпуклого многоугольника P со сторонами $c_1, c'_1, c_2, c'_2, \dots, c_s, c'_s$ (следующими по часовой стрелке), что

- угол между сторонами c_i и c'_i равен $2\pi/n_i$;
- стороны c_i и c'_i отождествляются вращением A_i вокруг их общей вершины на угол $2\pi/n_i$ (против часовой стрелки);
- относительно порождающих A_i группа T имеет код $\langle A_1, \dots, A_s \mid A_1^{n_1} = \dots = A_s^{n_s} = 1, A_1 \dots A_s = 1 \rangle$ (см. [4]).

Выберем в группе T такую каноническую систему образующих $A_1, \dots, A_s$. Через Γ_T обозначим группу, порожденную отражениями $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_s$. По построению $P\Gamma_T = T$.

Лемма 2.1 [6]. 1) *Группа Γ_T является дискретной подгруппой, порожденной отражениями, в группе $U(1, 1)$.*

2) *Любое отражение из группы Γ_T сопряжено ровно одному отражению вида $\bar{A}_i^{k_i}$ ($i = 1, \dots, s$), $0 \leq k_i < n_i$.*

Последнее утверждение этой леммы позволяет дать инвариантное описание группы Γ_T как подгруппы в $U(1, 1)$, порожденной каноническими подъемами всех эллиптических элементов из группы T .

3. В лемме 2.2 собраны важные для дальнейшего свойства группы Γ_T , доказанные в [6].

Лемма 2.2. 1) *Центр $Z(\Gamma_T)$ конечен, состоит из скалярных матриц и порождается элементом $z = \bar{A}_1 \dots \bar{A}_s = e^{-2\pi\sqrt{-1}/\nu} E$.*

2) Относительно порождающих $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_s$ группа Γ_T имеет код

$$\langle \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_s \mid \overline{A}_1^{n_1} = \dots = \overline{A}_s^{n_s} = 1, \\ [\overline{A}_i, \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_s] = 1, i = 1, \dots, s, (\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_s)^{|Z(\Gamma_T)|} = 1 \rangle.$$

§3. Группы отражений Γ , содержащиеся в группе Γ_T и обладающие той же материнской группой T

Лемма 3.1. Пусть Γ — группа отражений, $\Gamma \subseteq \Gamma_T$ и $P\Gamma = T$. Тогда

- 1) $Z(\Gamma) = \Gamma \cap Z(U(1, 1))$;
- 2) группа Γ нормальна в Γ_T и $\Gamma_T/\Gamma = Z(\Gamma_T)/Z(\Gamma)$.

Доказательство. Центр группы $U(1, 1)$ состоит из скалярных матриц вида λE , $|\lambda| = 1$. Поэтому $T = \Gamma/(\Gamma \cap Z(U(1, 1)))$. Но так как центр группы T тривиален [4], то $Z(\Gamma) = \Gamma \cap Z(U(1, 1))$. Таким образом, $Z(\Gamma) = Z(\Gamma_T) \cap \Gamma$. Кроме того, $P\Gamma_T = P\Gamma = T$. Следовательно, $\Gamma_T = Z(\Gamma_T) \cdot \Gamma$, что и доказывает оба утверждения п. 2). $\square$

§4. Доказательство теоремы 2

Из инвариантного описания группы Γ_T (см. п. 2.2) сразу следует утверждение о включении $\Gamma \subseteq \Gamma_T$. В самом деле, все отражения из группы Γ лежат в Γ_T . Нормальность группы Γ доказана в лемме 3.1, а конечность индекса $[\Gamma_T : \Gamma]$ следует из конечности центра $Z(\Gamma_T)$ (лемма 2.2). $\square$

Для доказательства теоремы 1 полезно иметь дополнительную информацию о том, как нормальная подгруппа Γ расположена в максимальной группе Γ_T .

§5. Γ как нормальная подгруппа в Γ_T

Теорема 3. Пусть Γ — группа отражений, $\Gamma \triangleleft \Gamma_T$ и $P\Gamma = T$. Тогда Γ есть нормальное замыкание в Γ_T семейства отражений $\{\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_i^{l_i}, \dots, \overline{A}_j^{l_j}, \dots, \overline{A}_s\}$, $1 \leq i < j \leq s$, $1 \leq l_i \leq n_i$, $1 \leq l_j \leq n_j$, $(l_i, l_j) = 1$ и $l_i | n_i$, $l_j | n_j$ (равенство $l_i = n_i$ означает, что отражение $\overline{A}_i$ в семействе отсутствует).

Доказательство. Фактически это утверждение о свойстве группы T , которое удобно сформулировать в виде отдельной леммы.

Лемма 5.1. Пусть группа $T = T(n_1, \dots, n_s)$ нормально порождена семейством эллиптических элементов $\{A_1^{k_1}, \dots, A_s^{k_s}\}$, $k_i \geq 1$ (см. п. 2.2). Тогда

- 1) среди чисел (n_i, k_i) , $i = 1, \dots, s$, имеется не более двух больших единицы;
- 2) числа (n_i, k_i) и (n_j, k_j) при $i \neq j$ взаимно просты.

Доказательство. Известно (см., например, [4]), что группа с кодом $\langle x_1, \dots, x_s \mid x_1^{t_1} = \dots = x_s^{t_s} = 1, x_1 \cdots x_s = 1 \rangle$ нетривиальна для любого целочисленного набора $(t_1, \dots, t_s)$, $t_i > 1$, длина которого больше двух. Если же $s = 2$, то группа с таким кодом изоморфна циклической группе порядка $d = (t_1, t_2)$.

Через T' обозначим нормальное замыкание в группе T семейства элементов $\{A_1^{k_1}, \dots, A_s^{k_s}\}$. По условию $T' = T$. С другой стороны, факторгруппа T/T' имеет код (см. п. 2.2)

$$\langle \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_s \mid \tilde{A}_1^{(n_1, k_1)} = \dots = \tilde{A}_s^{(n_s, k_s)} = 1, \tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_s = 1 \rangle.$$

Но такая группа тривиальна только в том случае, когда все показатели (n_i, k_i) равны 1, кроме, быть может, двух, которые должны быть взаимно простыми. $\square$

Приступим к доказательству теоремы 3. Подгруппа Γ нормальна и порождается отражениями. Тогда в силу п. 2) леммы 2.1 группа Γ нормально порождается семейством отражений $\{\bar{A}_1^{k_1}, \dots, \bar{A}_s^{k_s}\}$, $k_i \geq 1$. Следовательно, группа T нормально порождается семейством $\{A_1^{k_1}, \dots, A_s^{k_s}\}$, которое по лемме 5.1 можно заменить семейством $\{A_1, \dots, A_i^{l_i}, \dots, A_j^{l_j}, \dots, A_s\}$, $l_i = (n_i, k_i)$, $l_j = (n_j, k_j)$, $(l_i, l_j) = 1$. По тем же причинам семейство $\{\bar{A}_1^{k_1}, \dots, \bar{A}_s^{k_s}\}$ можно заменить обещанным семейством отражений $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_i^{l_i}, \dots, \bar{A}_j^{l_j}, \dots, \bar{A}_s\}$. $\square$

Итак, пусть подгруппа отражений Γ нормально порождается семейством отражений $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_i^{l_i}, \dots, \bar{A}_j^{l_j}, \dots, \bar{A}_s\}$ из теоремы 3. Вычислим порядок центра $|Z(\Gamma)|$ и индекс $[\Gamma_T : \Gamma]$. Пусть порядок центра группы Γ_T равен M .

Лемма 5.2. 1) $|Z(\Gamma)| = M/(M, l_i l_j) = M/(M, l_i)(M, l_j)$;

2) $[\Gamma_T : \Gamma] = (M, l_i)(M, l_j)$.

Доказательство. Воспользовавшись кодом группы Γ_T относительно образующих $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_s$ из п. 2) леммы 2.2, получим, что абелева факторгруппа Γ_T/Γ имеет код $\langle \bar{A}_i, \bar{A}_j \mid \bar{A}_i^{l_i} = 1, \bar{A}_j^{l_j} = 1, (\bar{A}_i \bar{A}_j)^M = 1 \rangle$. Элементарное вычисление показывает, что имеется эквивалентный код вида $\langle \tilde{A}_i, \tilde{A}_j \mid \tilde{A}_i^{(M, l_i)} = 1, \tilde{A}_j^{(M, l_j)} = 1 \rangle$, т. е. перед нами циклическая группа порядка $(M, l_1)(M, l_2)$. А первое утверждение леммы прямо следует из п. 2) леммы 3.1. $\square$

§6. О действии группы Γ в конусе K

Здесь собраны нужные нам факты, которые касаются действия в конусе K дискретной линейной группы $\Gamma \subset U(1, 1)$, не обязательно порожденной отражениями, но с кокомпактной материнской фуксовой группой $P\Gamma$.

Через L обозначим тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, ограниченное на диск D . В пространстве L^* естественно действуют группа $U(1, 1)$ и, автоматически, группа Γ . Введем в L^* глобальные координаты $z = z_1/z_2$ и $w = z_2$, $z \in D$, $z_2 \in \mathbb{C}$. В этих координатах действие элемента $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1, 1)$ задается формулой

$$\gamma(z, w) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, (cz + d)w \right). \quad (**)$$

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится расслоение $U = L^{\otimes |Z(\Gamma)|}$. Оно является естественным $P\Gamma$ -расслоением над диском D : если $\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, а $z = z_1/z_2$, $u = w^{|Z(\Gamma)|}$ — координаты в U^* , то действие элемента $\gamma \in P\Gamma$ в U^* выглядит так:

$$\gamma(z, u) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, (cz + d)^{|Z(\Gamma)|} u \right). \quad (1)$$

Известно, что каждое голоморфное линейное $P\Gamma$ -расслоение U над диском D изоморфно $P\Gamma$ -расслоению $W(a)$, которое следующим образом строится по заданному коциклу $a(\gamma, z)$, $\gamma \in P\Gamma$, $z \in D$, группы $P\Gamma$: в произведении $D \times \mathbb{C}$

группа PG действует по формуле

$$\gamma(z, u) = (\gamma(z), a(\gamma, z)u), \quad \gamma \in PG, z \in D, u \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Коцикл a подчиняется условию $a(\gamma_1\gamma_2, z) = a(\gamma_1, \gamma_2 z)a(\gamma_2, z)$, а потому указанная формула корректно определяет действие группы PG . Если коциклы a и a' эквивалентны, то расслоения $W(a)$ и $W(a')$ изоморфны. Таким образом, PG -расслоение над диском D задается (с точностью до изоморфизма) классом $[a]$ коцикла a , т. е. элементом группы $H^1(PG, O_D^*)$, где O_D^* — группа обратимых голоморфных в диске D функций [3].

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что PG -расслоение U задается классом коцикла $a(\gamma, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$.

Рассмотрим пару (PG, a) , состоящую из фуксовой группы PG и ее коцикла a . Голоморфная в диске D функция $f(z)$ называется (PG, a) -автоморфной формой веса i , если она удовлетворяет уравнению $f(\gamma z) = a(\gamma, z)^i f(z)$. Через $A_i(a)$ обозначим пространство автоморфных форм веса i , и пусть $A(a) = \bigoplus_{i \geq 0} A_i(a)$ — градуированная алгебра (PG, a) -автоморфных форм и $A_+(a) = \bigoplus_{i > 0} A_i(a)$.

§ 7. Группа классов коциклов и описание свободных коциклов

В этом параграфе мы рассматриваем фуксову группу $T = T(n_1, \dots, n_s)$ рода нуль.

Пусть C — множество всех наборов $x = (x_0, x_1, \dots, x_s)$, в которых координата x_0 — целое число, а координата x_i при $i > 0$ является неотрицательной правильной дробью (возможно, сократимой) со знаменателем n_i . Два таких набора x и x' мы будем складывать покомпонентно по такому правилу:

$$x + x' = (x_0 + x'_0 + q, \{x_1 + x'_1\}, \dots, \{x_s + x'_s\}),$$

где q — число ненулевых разрядов, в которых произошло переполнение (случилось так, что $x_i + x'_i \geq 1$). Множество C с такой операцией сложения является абелевой группой, и верно следующее утверждение:

Предложение 7.1 (см., например, [9]). *Группа $H^1(T, O_D^*)$ классов коциклов группы T изоморфна группе C . Изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому классу $[a]$ его кода $(\text{Ch } a, d_1/n_1, \dots, d_s/n_s)$ из группы C .*

Нулевая координата $\text{Ch } a$ называется числом Черна коцикла a .

Геометрический смысл числа d_i таков: в T -расслоении $W(a)$ элемент $A_i \in T$ действует в слое W_{a_i} (над его неподвижной точкой $a_i \in D$) умножением на $e^{2\pi\sqrt{-1}d_i/n_i}$ (п. 2.2).

Пример. Код классического коцикла $j^{-1}(t, z) = (cz + d)/\det \bar{t}$, где $\bar{t} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1, 1)$, равен $(-2, \frac{n_1-1}{n_1}, \dots, \frac{n_s-1}{n_s})$.

Назовем коцикл a свободным, если алгебра автоморфных форм $A(a)$ — это алгебра многочленов от двух переменных.

В статье [6] доказано следующее важное для нас утверждение.

Предложение 7.2. *Коцикл a свободен тогда и только тогда, когда код его класса $[a]$ является кодом одного из трех (взаимно исключающих) типов:*

- 0) $(1, 0, \dots, 0)$;
- 1) $(0, 0, \dots, d_i/n_i, \dots, 0)$, $d_i \neq 0$, $i > 0$, $d_i | n_i$;
- 2) $(-1, 0, \dots, d_i/n_i, \dots, d_j/n_j, \dots, 0)$, $i, j > 0$, $d_i \neq 0$, $d_j \neq 0$, и $d'_i/n'_i + d'_j/n'_j = 1 + 1/(n'_i n'_j)$ (здесь d'_i/n'_i — несократимая запись дроби d_i/n_i).

§8. Доказательство теоремы 1

Пусть $\Gamma \subseteq \Gamma_T$ — группа отражений, $P\Gamma = T(n_1, \dots, n_s)$.

Отождествим конус K с пространством L^* . Переход от L^* к L^*/Γ осуществим в два этапа. Сначала перейдем к факторпространству $L^*/Z(\Gamma)$. Легко понять, что $L^*/Z(\Gamma) = U^*$. Практически этот переход означает замену координаты w в слое $\mathbb{C}^*$ координатой $u = w^{|Z(\Gamma)|}$ (см. формулу (1)). В пространстве U^* продолжает действовать группа T , и это действие задается коциклом $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$ (см. (1)).

Кроме группы T в пространстве U^* действует группа $\mathbb{C}^*$: $\alpha(z, u) = (z, \alpha u)$, $(z, u) \in U^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, и эти действия перестановочны. Обозначим через $\mathcal{F}_i$ пространство T -инвариантных голоморфных однородных по u функций в U^* степени однородности $-i$.

Рассмотрим градуированную алгебру $\mathcal{F} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$. Прямая проверка показывает, что отображение, которое каждой (T, a) -автоморфной форме $f(z)$ веса i ставит в соответствие функцию $f(z) \cdot u^{-i}$, есть изоморфизм градуированных алгебр $A(a)$ и $\mathcal{F}$. С другой стороны, $\mathcal{F}$ — это градуированная (степенью однородности) алгебра голоморфных функций на пространстве U^*/Γ . Известно (см., например, [2], [11]), что $U^*/T = \text{Spec } \mathcal{F} - \{\mathcal{F}_+\}$, если градуированная алгебра $\mathcal{F}$ конечного типа такова, что $\dim \mathcal{F}_i > C \cdot i$ для некоторой положительной константы C и всех достаточно больших i . Как следствие всего сказанного, мы получаем такое утверждение: факторпространство U^*/T тогда и только тогда будет изоморфно $\mathbb{C}^2 - \{0\}$, когда алгебра автоморфных форм $A(a)$ свободна, т. е. когда коцикл a является свободным коциклом.

Итак, для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что коцикл $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$ тогда и только тогда свободен, когда выполняется условие (*).

Идентификацию коцикла $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$ с коциклом одного из трех типов, указанных в предложении 7.2, мы начнем с его «дробной части». С этой целью мы изучим действие группы T в слоях U^* над неподвижными точками.

По теореме 3 (см. §5) группа Γ есть нормальное замыкание в Γ_T семейства отражений $\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_i^{l_i}, \dots, \bar{A}_j^{l_j}, \dots, \bar{A}_s\}$, $(l_i, l_j) = 1$, $l_i | n_i$, $l_j | n_j$. Заметим, что действие элемента A_i в слое U_{a_i} расслоения $U = L^{\otimes |Z(\Gamma)|}$ полностью определяется тем, как в слое L_{a_i} расслоения L действует *любой* подъем элемента A_i в группу Γ . Причина состоит в том, что два любых таких подъема отличаются на элемент из центра группы Γ . Но такой элемент действует в пространстве U тождественно. Если $k \neq i, j$, то элемент A_k поднимается в группу Γ отражением $\bar{A}_k$. Следовательно, если $k \neq i, j$, то в слое расслоения U над точкой $a_k \in D$ элемент A_k действует тождественно. Выясним, как действуют оставшиеся элементы A_i и A_j в соответствующих слоях. Для этого построим их удобные подъемы в группу Γ .

По лемме 2.2 центр группы Γ_T порожден элементом $z = \bar{A}_1 \dots \bar{A}_s$. Пусть порядок центра $Z(\Gamma_T)$ равен M . Тогда $z = e^{-2\pi\sqrt{-1}\tau/M}$, где $(\tau, M) = 1$. Согласно китайской теореме об остатках, существует единственная такая пара целых

чисел (P, Q) , что

$$\begin{aligned} 0 < P \leq (M, l_i)(M, l_j), \quad 0 < Q \leq (M, l_i)(M, l_j), \quad P \equiv -1 \pmod{(M, l_i)}, \\ P \equiv 0 \pmod{(M, l_j)}, \quad Q \equiv 0 \pmod{(M, l_i)}, \quad Q \equiv -1 \pmod{(M, l_j)}. \end{aligned}$$

Лемма 8.1. *Элемент $\bar{A}_i z^P$ (соответственно $\bar{A}_j z^Q$) служит подъемом элемента A_i (соответственно A_j) в группе Γ .*

Доказательство. Проверим, например, что $\bar{A}_i z^P \in \Gamma$. Для этого рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi: \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T/\Gamma$, и пусть $\varphi(\bar{A}_i) = \bar{A}_i$. Тогда $\varphi(\bar{A}_i z^P) = \tilde{A}_i(\tilde{A}_i \tilde{A}_j)^P = \tilde{A}_i^{1+P} \tilde{A}_j^P$. Но $(M, l_i)^{\tilde{A}_i} = 1$ и $(M, l_j)^{\tilde{A}_j} = 1$ (см. доказательство леммы 5.2). Следовательно, $\varphi(\bar{A}_i z^P) = 1$. $\square$

Если теперь учесть, что $|Z(\Gamma)| = M/((M, l_i)(M, l_j))$ (лемма 5.2), то элементарное вычисление показывает, что A_i (соответственно A_j) в слое U_{a_i} (соответственно U_{a_j}) действует умножением на $\alpha_i = e^{-2\pi\sqrt{-1}P\tau/((M, l_i)(M, l_j))}$ (соответственно $\alpha_j = e^{-2\pi\sqrt{-1}Q\tau/((M, l_i)(M, l_j))}$).

Далее возможны три случая:

- 1) $(M, l_i) = (M, l_j) = 1$;
- 2) одно из чисел, скажем (M, l_i) , равно 1, а другое (M, l_j) , больше 1;
- 3) оба числа (M, l_i) и (M, l_j) больше единицы.

Мы ограничимся проверкой того, что в наиболее хлопотном случае 3) условие (*) необходимо и достаточно для того, чтобы коцикл a был коциклом второго типа из предложения 7.2.

Положим $P' = -P/(M, l_j)$ и $Q' = -Q/(M, l_i)$. Пусть $P'\tau/(M, l_i) = N_i + c_i/(M, l_i)$, где $1 \leq c_i < (M, l_i)$, а числа c_i и (M, l_i) взаимно просты. Тогда $\alpha_i = e^{2\pi\sqrt{-1}c_i/(M, l_i)}$. Кроме того, $(M, l_j)c_i \equiv \tau \pmod{(M, l_i)}$. Аналогично, $\alpha_j = e^{2\pi\sqrt{-1}c_j/(M, l_j)}$, $1 \leq c_j < (M, l_j)$, $(c_j, (M, l_j)) = 1$ и $(M, l_i)c_j \equiv \tau \pmod{(M, l_j)}$. Итак, мы получили, что код коцикла a имеет следующий вид (напомним, что $l_i|n_i$, $l_j|n_j$): $(x, 0, \dots, c_i/(M, l_i), \dots, c_j/(M, l_j), 0, \dots, 0)$.

Пусть коцикл a оказался коциклом второго типа. Это означает, что $x = -1$ и $c_i/(M, l_i) + c_j/(M, l_j) = 1 + 1/((M, l_i)(M, l_j))$.

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что коцикл a соизмерим с классическим коциклом j^{-1} . А именно, рассмотрим коцикл $a^{2n_1 \dots n_s(M, l_i)(M, l_j)}$. Вспоминая, что $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$, а $j^{-1}(t, z) = (cz + d)^2 / \det \bar{t}$, получаем (с учетом леммы 5.2), что

$$a^{2n_1 \dots n_s(M, l_i)(M, l_j)} = (cz + d)^{2n_1 \dots n_s M} = \left(\frac{(cz + d)^2}{\det \bar{t}} \right)^{n_1 \dots n_s M} = (j^{-1})^{n_1 \dots n_s M}$$

(последнее равенство есть следствие того обстоятельства, что в группе Γ_T , а следовательно, и в группе Γ , определитель любого элемента в степени $n_1 \dots n_s$ равен 1).

Осталось сравнить коды коциклов, стоящих в правой и левой частях равенства. Код коцикла $a^{2n_1 \dots n_s(M, l_i)(M, l_j)}$ равен $(2n_1 \dots n_s, 0, \dots, 0)$. А код коцикла $(j^{-1})^{n_1 \dots n_s M}$ (см. пример в § 7) равен $((n_1, \dots, n_s)M((s-2) - \sum_{i=1}^s 1/n_i), 0, \dots, 0)$. Следовательно, $M = 2/((s-2) - \sum 1/n_i)$, т. е. ν — целое число. Обратно, пусть

ν — целое число, равное M . Тогда M есть порядок центра $Z(\Gamma_T)$ и, следовательно, $\tau = 1$ (лемма 2.2). Возвращаясь к коду коцикла a , имеем

$$\frac{c_i}{(M, l_i)} + \frac{c_j}{(M, l_j)} = \frac{c_i(M, l_j) + c_j(M, l_i)}{(M, l_i)(M, l_j)}.$$

Так как $\tau = 1$, то $c_i(M, l_j) \equiv 1 \pmod{(M, l_i)}$ и $c_j(M, l_i) \equiv 1 \pmod{(M, l_j)}$. В числителе дроби справа стоит число, большее единицы, но меньшее, чем $2(M, l_i)(M, l_j)$. При делении на каждое из двух взаимно простых чисел (M, l_i) и (M, l_j) это число дает в остатке 1. Следовательно, оно равно $1 + (M, l_i)(M, l_j)$. Остается проверить, что $\text{Ch } a = -1$. Если $\text{Ch } a = x$, то, повторяя уже проделанное сравнение чисел Черна степеней коцикла a и классического коцикла j^{-1} , найдем, что $x(M, l_i)(M, l_j) + 1 + (M, l_i)(M, l_j) = 1$, т. е. $x = -1$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Б. Винберг, *Гиперболические группы отражений*, УМН, **40**:1 (1985), 29–64.
- [2] И. В. Долгачев, *Автоморфные формы и квазиоднородные особенности*, Функц. анализ и его прил., **9**:2 (1975), 67–68.
- [3] А. Гротендик, *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, М., 1961.
- [4] Х. Цишанг, Э. Фогт, Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Наука, М., 1988.
- [5] О. В. Шварцман, *О коциклах групп комплексных отражений и сильной односвязности факторпространств*, в кн.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Ярославский государственный ун-т, Ярославль, 1991, 32–39.
- [6] О. В. Шварцман, *О фуксовых группах рода нуль*, Функц. анализ и его прил., **28**:4 (1994), 66–73.
- [7] О. В. Шварцман, *Свободные алгебры автоморфных форм на верхней полуплоскости*, Функц. анализ и его прил., **37**:2 (2003), 81–89.
- [8] С. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math., **77** (1955), 778–782.
- [9] I. Dolgachev, *Invariant stable bundles over modular curves $X(p)$* , in: Contemp. Math., vol. 224, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 65–69.
- [10] J. Milnor, *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$* , in: Knots, Groups, and 3-Manifolds, Ann. Math. Studies, vol. 84, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975, 175–225.
- [11] H. Pinkham, *Normal surface singularities with C^* action*, Math. Ann., **227**:2 (1977), 183–193.
- [12] G. Shephard, J. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math., **6** (1954), 274–304.

Государственный университет — Высшая школа экономики
 Московский независимый университет
 e-mail: ossipsh@gmail.com

Поступило в редакцию
 13 февраля 2008 г.