Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Перов, Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского, *Функци. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:41:50

Теорема 2. Если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, то

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \mathbb{T}\sigma(T(1))[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\}.$$

Если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) > 0$, то справедливо представление $\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(T) \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\}$, где $\chi_g(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln \|T(t)\|)/t$ — показатель роста полугруппы операторов T . Спектр оператора $\mathcal{L}$ пуст при $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратим разностный оператор $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}: \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$, действующий в ассоциированном с $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X)$ пространстве $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$.

Следствие 2. Спектр оператора дифференцирования $\mathcal{L}_0 = -d/dt: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$, где $D(\mathcal{L}_0) = \{x \in \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X) : x \text{ — абсолютно непрерывная функция с } \dot{x} \in \mathcal{F}_{\bar{\alpha}}(\mathbb{R}, X)\}$ совпадает с множеством $\{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \mathbb{T}[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\}$, если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, и с множеством $\sigma(\mathcal{L}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\}$, если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) > 0$. Спектр оператора $\mathcal{L}_0$ пуст, если $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

Отметим, что теорема 2 может быть обобщена на дифференциальные включения [7].

Автор искренне благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional Differential Equations: I. C^* -theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994. [2] В. В. Жиков, Изв. АН СССР, сер. матем., **40**:6 (1976), 1380–1408. [3] В. В. Жиков, Б. М. Левитан, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978. [4] А. Г. Баскаков, Функци. анализ и его прил., **30**:3 (1996), 1–11. [5] А. Г. Баскаков, Известия РАН, сер. матем., **73**:2 (2009), 3–68. [6] C. Chicone, Y. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. [7] М. С. Бичегкуев, Матем. заметки, **79**:4 (2006), 483–487.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило в редакцию
5 июня 2008 г.

УДК 517.988.63

Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского

© 2010. А. И. ПЕРОВ

1. Поводом для написания настоящей работы послужила теорема из [1, с. 153–154], которую мы ниже приведем в несколько измененных обозначениях (теорема 1).

Пусть M — произвольное множество и F — некоторое однозначное отображение этого множества в себя. Рассмотрим уравнение

$$x = Fx \quad (x \in M), \quad (1)$$

любое решение которого, как известно, называют *неподвижной точкой* изучаемого отображения. Построим последовательные итерации

$$x_k = Fx_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где x_0 — произвольная точка из M .

Пусть (M, d) — метрическое пространство. Оператор $F: M \rightarrow M$ называют *обобщенным сжатием* [1, с. 153], если

$$d(Fx, Fy) \leq q(\alpha, \beta)d(x, y) \quad (\alpha \leq d(x, y) \leq \beta), \quad (3)$$

причем при $0 < \alpha \leq \beta$

$$0 \leq q(\alpha, \beta) < 1. \quad (4)$$

Теорема 1 (принцип обобщенного сжатия М. А. Красносельского). *Пусть M есть полное метрическое пространство и $F: M \rightarrow M$ — обобщенное сжатие. Тогда уравнение (1) имеет в M единственное решение x^* . К этому решению сходятся последовательные приближения (2) при любом начальном приближении $x_0 \in M$.*

Эта теорема нашла различные приложения (см., например, [1, с. 158] или [2, с. 109]). Заметим, однако, что в отличие от классического принципа сжимающих отображений, получающегося при $q(\alpha, \beta) \equiv q$, $0 \leq q < 1$, сформулированная теорема не содержит ни локализации неподвижной точки, ни оценки погрешности метода последовательных приближений; кроме того, в том виде, в котором она сформулирована, она оказалась мало пригодной для перенесения ее на случай многомерной метрики.

Ситуация меняется коренным образом, если правую часть неравенства (3) заменить *модулем непрерывности* $q(u)$ отображения F ; тогда мы придем к условию

$$d(Fx, Fy) \leq q(d(x, y)),$$

где $q(u)$, $u \geq 0$, есть некоторая полуаддитивная функция (см. определение в разд. 2), удовлетворяющая, по аналогии с (4), условию

$$0 \leq q(u) < u \quad \text{при } u > 0. \quad (5)$$

Отметим, что модуль непрерывности отображения F является полуаддитивной функцией, если, например, M — банахово пространство или замкнутое выпуклое множество банахова пространства (ср. с [3, с. 108 и 124]).

2. Пусть n — фиксированное натуральное число. В дальнейшем мы будем считать, что на $\mathbb{R}^n$ следующим естественным образом введено частичное упорядочение: если α и β — векторы из $\mathbb{R}^n$, то неравенство $\alpha \leq \beta$ означает, что оно выполнено покомпонентно. Вектор α с неотрицательными компонентами называют *неотрицательным*, $\alpha \geq 0$. Через $|\alpha|$, где α из $\mathbb{R}^n$, обозначается неотрицательный вектор, компоненты которого равны модулям соответствующих компонент вектора α . Аналогичным образом эти понятия вводятся для матриц [4, с. 352–405].

Обозначим через K выпуклый замкнутый конус неотрицательных векторов из $\mathbb{R}^n$, $K = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha \geq 0\}$. Этот конус является *воспроизводящим*, т. е. любой элемент σ из $\mathbb{R}^n$ представим в виде $\sigma = \alpha - \beta$, где α и β из K , и *правильным*, т. е. монотонная ограниченная последовательность элементов из $\mathbb{R}^n$ всегда сходится [5, с. 13 и 33–34].

Отображение $Q: K \rightarrow K$ назовем *полуаддитивным*, если выполнены следующие условия (ср. с [6, с. 268–271]):

- 1) $Q0 = 0$;
- 2) если $\alpha \leq \beta$, то $Q\alpha \leq Q\beta$;
- 3) $Q(\alpha + \beta) \leq Q\alpha + Q\beta$;
- 4) Q — непрерывное отображение.

Отметим, что сумма полуаддитивных отображений, а также произведение полуаддитивного отображения на неотрицательное число есть снова полуаддитивное отображение. Полуаддитивными являются композиция полуаддитивных отображений и предел последовательности полуаддитивных отображений, если она, например, локально равномерно сходится. Для полуаддитивного отображения справедливо неравенство $|Q\alpha - Q\beta| \leq Q|\alpha - \beta|$ (ср. с [7, с. 43]).

Полуаддитивное отображение Q называется *абсолютно устойчивым*, если любая последовательность $\alpha_k = Q\alpha_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, начинающая с произвольного элемента $\alpha_0 \geq 0$, сходится к нулю, $\alpha_k \rightarrow 0$.

При $n = 1$ полуаддитивная числовая функция $q(u)$, $u \geq 0$, обладает свойством абсолютной устойчивости тогда и только тогда, когда выполнено условие (5). Критерий абсолютной устойчивости полуаддитивного отображения будет изложен в конце заметки (теорема 4).

3. Ниже, в разд. 3 и 4, Q — произвольное абсолютно устойчивое полуаддитивное отображение. Напомним, что функция $\rho(x, y): M \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$, такая, что $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, является *K-метрикой*, а множество M называется *K-метрическим пространством* ([8, с. 833]; ср. с [9, с. 58–61]).

Приведем основное определение. Отображение F , переводящее *K*-метрическое пространство M в себя, называется *Q-сжатием*, если

$$\rho(Fx, Fy) \leq Q\rho(x, y) \quad (x, y \in M).$$

Как будет показано ниже (см. теорему 4), для абсолютно устойчивого полуаддитивного отображения Q отображение $I - Q$, где I — единичное отображение в $\mathbb{R}^n$, имеет обратное $(I - Q)^{-1}$; это обратное отображение является монотонным и определено во всяком случае на конусе K , а рассматриваемое только на конусе K , является к тому же еще и полуаддитивным.

Центральным результатом заметки является

Теорема 2. Пусть M есть полное *K*-метрическое пространство, а $F: M \rightarrow M$ является *Q-сжатием*. Тогда уравнение (1) имеет в M единственное решение x^* . Для произвольной точки a из M справедлива оценка

$$\rho(x^*, a) \leq (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a)$$

(локализация решения). Это решение можно получить методом последовательных приближений (2), отправляясь от произвольного нулевого приближения x_0 из M , причем справедливы следующие оценки погрешности:

$$\rho(x^*, x_k) \leq Q^k(I - Q)^{-1}\rho(x_1, x_0) \leq (I - Q)^{-1}Q^k\rho(x_1, x_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь Q^k — это k -я итерация отображения Q . Как Q^k , так и $(I - Q)^{-1}$, рассматриваемое на K , — полуаддитивные отображения, которые, вообще говоря,

не коммутируют, но произведение которых в любом порядке является снова полуаддитивным отображением.

Оценка погрешности (6) с $(I - Q)^{-1}Q^k$ содержится в статье [8, с. 844], однако в ней отсутствует оценка погрешности с $Q^k(I - Q)^{-1}$.

Отметим частный, но весьма важный случай, когда отображение Q является *линейным*, т. е. может быть описано с помощью матрицы. В этом случае требования 1)–4) сводятся к тому, что эта матрица должна быть *неотрицательной*, а требование абсолютной устойчивости равносильно тому, что ее *спектральный радиус* должен быть меньше единицы. При этих предположениях теорема 2 хорошо известна (см., например, [10, с. 415] или [11]), причем отображения $(I - Q)^{-1}$ и Q^k (т. е. матрицы) всегда коммутируют и, следовательно, оценки (6) сливаются в одну.

4. Иногда Q -сжатие F может быть задано не на всем K -метрическом пространстве M , а только на некоторой его части, о которой неизвестно, инвариантна ли она относительно F . В такой ситуации можно воспользоваться приведенным ниже локальным вариантом принципа сжимающих отображений — теоремой 3.

Теорема 3. Пусть на K -шаре $S(a, \tau) = \{x \in M : \rho(x, a) \leq \tau\}$ полного K -метрического пространства M задано Q -сжатие $F: S(a, \tau) \rightarrow M$. Пусть, кроме того,

$$(I - Q)^{-1}\rho(Fa, a) \leq \tau.$$

Тогда уравнение (1) в K -шаре $S(a, \tau)$ имеет единственное решение x^* , причем

$$\rho(x^*, a) \leq (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a)$$

(локализация решения). Это решение может быть получено методом последовательных приближений (2), отправляясь от произвольного начального приближения x_0 из K -шара $S(a, \sigma)$, где

$$\sigma = (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a),$$

причем справедливы оценки погрешности (6), которые при $x_0 = a$ принимают вид

$$\rho(x^*, x_k) \leq Q^k(I - Q)^{-1}\rho(Fa, a) \leq (I - Q)^{-1}Q^k\rho(Fa, a), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $\sigma \geq 0$ и $\sigma \leq \tau$, то $S(a, \sigma) \subseteq S(a, \tau)$. Оказывается, что K -шар $S(a, \sigma)$ инвариантен относительно отображения F . К отображению F , рассматриваемому только на K -шаре $S(a, \sigma)$, применима теорема 2, из которой немедленно вытекают все утверждения теоремы 3.

5. Критерий абсолютной устойчивости полуаддитивного отображения $Q: K \rightarrow K$ приведем в терминах резольвентного отображения $T = I - Q$.

Теорема 4. Для того чтобы полуаддитивное отображение Q было абсолютно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

- 1) если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha \neq \beta$, то $T\alpha \neq T\beta$;
- 2) для любого $\beta \geq 0$ существует единственное $\alpha \geq 0$, для которого $T\alpha = \beta$;
- 3) если σ и τ принадлежат области определения обратного отображения T^{-1} и $\sigma \leq \tau$, то $T^{-1}\sigma \leq T^{-1}\tau$.

Условие 1) означает, что отображение T является взаимно однозначным и поэтому существует обратное отображение T^{-1} , определенное на области значений отображения T . Условие 2) означает, что область определения обратного отображения T^{-1} содержит конус K (может быть, совпадая с ним). Условие 3) означает, что обратное отображение T^{-1} является монотонным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970. [2] Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск, 1986. [3] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960. [4] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967. [5] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматлит, М., 1962. [6] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962. [7] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1977. [8] P. P. Zabrejko, *Collect. Math.*, **48**:4–6 (1997), 825–859. [9] Л. Коллатц, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Мир, М., 1969. [10] Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975. [11] А. И. Перов, Обобщенный принцип сжимающих отображений, *Вестник ВГУ*, 2005, № 1, 196–207.

Воронежский госуниверситет
e-mail: perov@nosc.vsu.ru

Поступило в редакцию
30 января 2008 г.

УДК 517.432+517.515+515.958

Проблема Кёнигса и крайние неподвижные точки

© 2010. В. А. СЕНДЕРОВ, В. А. ХАЦКЕВИЧ

Проблема вложения Кёнигса (КЕ-проблема), возникшая в работах Г. Кёнигса, П. Леви и Ж. Адамара в связи с решением различных прикладных задач, имеет более чем вековую историю. Общая формулировка этой проблемы такова. Пусть D — область комплексного банахова пространства и $f \in \text{Hol}(D)$. Существует ли семейство $\{F(t)\}_{t \geq 0} \subset \text{Hol}(D)$, непрерывно (в топологии локально равномерной сходимости над D) зависящее от t и такое, что $F(0) = I$, $F(1) = f$ и $F(s+t) = F(s) \circ F(t)$ при всех $s, t \geq 0$?

Если семейство $\{F(t)\}_{t \geq 0}$ существует, то говорят, что f обладает КЕ-свойством.

В последние годы появились новые работы, относящиеся к КЕ-проблеме и к ее приложениям. Так, в [1]–[5] рассматривался случай, когда D — единичный открытый шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, а f — порождаемое (плюс-)оператором A по формуле (1) (см. ниже) преобразование шара D . Этот же случай рассматривается и в данной работе.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ — комплексное индефинитное ($\min\{\dim \mathfrak{H}_1, \dim \mathfrak{H}_2\} > 0$) пространство Крейна и A — оператор с блок-матрицей $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Пусть