Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Багдерина, Три серии инвариантных многообразий уравнения Савады–Котеры, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 4, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:32:13

Три серии инвариантных многообразий уравнения Савады–Котеры*

© 2009. Ю. Ю. БАГДЕРИНА

1. Введение. Уравнение Савады–Котеры ([1], [2])

$$u_t = F[u] \equiv u_5 - 30u u_3 - 30u_1 u_2 + 180u^2 u_1, \quad u_j = \partial^j u / \partial x^j, \quad (1)$$

как и уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) ([3], [4]), имеет гамильтоново представление $u_t = P^J \frac{\delta H}{\delta u}$ с гамильтоновым оператором $P^J = D^3 - 12(uD + Du)$ и гамильтонианом $H = \int (-u_1^2/2 - u^3) dx$. В [5] установлено, что уравнение (1) интегрируется методом обратной задачи рассеяния и имеет бесконечную серию полиномиальных законов сохранения $D_t T_i = D S_i$, где D_t , D — операторы полной производной по t и x соответственно. В [6], [7] при помощи факторизации оператора Лакса для уравнения (1) найдено преобразование Миуры, связывающее его с модифицированным уравнением. Бигамильтонова структура ([8], [9]) уравнения (1) позволила получить в [10] счетный набор его симметрий $X = f_i \partial_u$ и законов сохранения. Функции $f_i = D J_i$ и вариационные производные L_i плотностей законов сохранения связаны рекуррентными соотношениями

$$D J_{i+1} = P^J L_i, \quad L_{i+2} = (D^3 - 6(D^2 u D^{-1} + D^{-1} u D^2) + 18(u^2 D^{-1} + D^{-1} u^2)) D J_i. \quad (2)$$

В силу громоздкости формул (2) в [10] не было доказано, что законы сохранения находятся в инволюции. Уравнения $J_i = 0$, $L_i = 0$, $D J_i = 0$, $D L_i = 0$ задают инвариантные многообразия ([11], [12]) уравнения (1).

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$f(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0 \quad (3)$$

задает инвариантное многообразие эволюционного уравнения $u_t = F[u] \equiv F(x, u, u_1, \dots, u_m)$, если выполнено соотношение

$$X(F)f|_{[f]} = 0, \quad X(F) = F \partial_u + \sum_{j \geq 1} D^j F \partial_{u_j}, \quad (4)$$

где $[f]$ — многообразие, заданное уравнением (3) и его дифференциальными следствиями по x , а именно, уравнениями $D^j f = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Заметим, что из критерия инвариантности

$$X(f)(u_t - F)|_{u_t=F} = X(F)f - X(f)F = 0 \quad (5)$$

уравнения $u_t = F[u]$ относительно оператора симметрии

$$X(f) = f \partial_u + \sum_{j=1}^m D^j f \partial_{u_j} + D_t f \partial_{u_t}$$

*Работа выполнена при поддержке грантов МК-5863.2008.1, НШ-2215.2008.1 и РФФИ 09-01-92431-КЭ.

следует выполнение равенства (4), но обратное неверно. То же справедливо для законов сохранения ([12], [13]).

Ниже показано, что, в отличие от случая уравнения КдФ [11], многообразия, соответствующие симметриям и законам сохранения, не исчерпывают все множество инвариантных многообразий уравнения (1).

2. Инвариантные многообразия уравнения Савады–Котеры. В дополнение к двум известным сериям симметрий и законов сохранения [10] мы нашли третью бесконечную последовательность инвариантных многообразий уравнения (1). Члены всех трех последовательностей вычисляются рекуррентно: симметрии $X = DJ_i \partial_u$ определяются из соотношений

$$DJ_{i+1} = P^J L_i, \quad P^J = D^3 - 24uD - 12u_1, \quad J_{-1} = -1/6; \quad (6)$$

левые части равенств $U_i = 0$, задающих не известные ранее инвариантные многообразия, находятся из соотношений

$$DU_{i+1} = P^U J_i, \quad P^U = D^3 - 6uD - 6u_1 \quad (7)$$

или, после интегрирования, $U_{i+1} = D^2 J_i - 6u J_i$; плотности законов сохранения — из соотношений

$$DL_{i+1} = P^L U_i, \quad P^L = D^3 - 6uD, \quad L_{-1} = -1/12. \quad (8)$$

Нетрудно получить первые несколько членов этих последовательностей (константы интегрирования приравнены к нулю):

$$\begin{aligned} U_0 &= u, \quad U_1 = u_2 - 6u^2, \\ U_3 &= u_6 - 6(6uu_4 + 10u_1u_3 + 5u_2^2) + 360(u^2u_2 + uu_1^2 - u^4), \quad \dots, \\ J_0 &= u, \quad J_2 = u_4 - 30uu_2 + 60u^3, \\ J_3 &= u_6 - 42(uu_4 + u_1u_3 + u_2^2) + 252(2u^2u_2 + uu_1^2 - 2u^4), \quad \dots, \\ L_1 &= u_2 - 3u^2, \quad L_2 = u_4 - 18uu_2 - 9u_1^2 + 24u^3, \quad \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Каждый третий член в последовательностях J_i , U_i , L_i отсутствует:

$$L_{3k} = 0, \quad J_{3k+1} = 0, \quad U_{3k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Последовательное применение формул (6), (8), (7) приводит к соотношению $J_{i+3} = D^{-1}P^J D^{-1}P^L D^{-1}P^U J_i$ для J_i . Из него с учетом факторизации операторов $P^L = (D^2 - 6u)D$ и $P^U = D(D^2 - 6u)$ следует известная формула

$$f_{i+3} = Rf_i, \quad R = (D^2 - 24u - 12u_1D^{-1})(D^2 - 6u)D(D^2 - 6u)D^{-1},$$

для симметрий $f_i = DJ_i$ уравнения (1) с рекурсионным оператором R , найденным В. В. Соколовым и А. Б. Шабатом. Таким образом, оператор P^U в (7), определяющий дополнительную серию инвариантных многообразий уравнения (1), является одним из множителей оператора R .

Если возникающие при интегрировании соотношений (6)–(8) постоянные K_i не приравнять к нулю, то справедливо следующее утверждение.

Теорема. Уравнение (1) имеет счетный набор инвариантных многообразий, задаваемых уравнениями

$$\begin{aligned} R_{2n}^J[u] &\equiv J_n + \sum_{i=0}^{n-1} K_i J_i + K_{-1} = 0, & R_{2n}^U[u] &\equiv U_n + \sum_{i=0}^{n-1} K_i U_i + K_{-1} = 0, \\ R_{2n}^L[u] &\equiv L_n + \sum_{i=0}^{n-1} K_i L_i + K_{-1} = 0, & K_{-1}, \dots, K_{n-1} &= \text{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

где J_i , U_i , L_i принадлежат алгебре A полиномов от функции u и ее производных по переменной x и вычисляются по рекуррентным формулам (6)–(8). При этом $X(DJ_i) = DJ_i \partial_u$ являются симметриями, а L_i — вариационными производными плотностей законов сохранения уравнения (1); соответствующие производным L_i функционалы T_i находятся в инволюции относительно скобки Пуассона

$$\{T_i, T_j\} \equiv \int \frac{\delta T_i}{\delta u} P^J \frac{\delta T_j}{\delta u} dx = \int L_i P^J L_j dx = \int L_i D J_{j+1} dx = (L_i, D J_{j+1}).$$

Доказательство. Утверждение теоремы, относящееся к симметриям $X(DJ_i) = DJ_i \partial_u$, доказано в [10]. Исключение U_i из (7), (8) приводит к соотношению $DL_{i+2} = (D^5 - 6(2uD^3 + 3u_1D^2 + 3u_2D + u_3) + 36(u^2D + uu_1))J_i$, что совпадает с результатом применения оператора D ко второму соотношению (2).

Покажем, что ОДУ $U_{i+1} = 0$ задает инвариантное многообразие уравнения (1), которое в обозначениях (9) принимает вид $u_t = DJ_2$. Использование соотношения (5) в форме $X(DJ_2)DJ_i = X(DJ_i)DJ_2$ и перегруппировка слагаемых в цепочке равенств

$$\begin{aligned} X(DJ_2)U_{i+1} &= (D^2 - 6u)X(DJ_2)J_i - 6J_iDJ_2 \\ &= (D^2 - 6u)D^{-1}(X(DJ_2)DJ_i) - 6J_iDJ_2 \\ &= (D^2 - 6u)X(DJ_i)J_2 - 6J_iDJ_2 \\ &= (D^2 - 6u)(D^5J_i - 30uD^3J_i + (180u^2 - 30u_2)DJ_i) \\ &\quad - 6J_iD(u_4 - 30uu_2 + 60u^3) \\ &= (D^5 - 30uD^3 - 30u_1D^2 + 180u^2D)(D^2 - 6u)J_i \\ &= D^5U_{i+1} - 30uD^3U_{i+1} - 30u_1D^2U_{i+1} + 180u^2DU_{i+1} \end{aligned}$$

приводят к соотношению (4) для ОДУ $U_{i+1} = 0$.

Покажем, что L_i , J_j удовлетворяют условиям

$$(L_i, DJ_j) = 0, \quad i, j \geq 0, \quad i \neq 3k, \quad j \neq 3m + 1, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Для $F_1, F_2 \in A$ имеют место соотношения (ср. с [11])

$$\begin{aligned} (F_1, DF_2) &= -(DF_1, F_2), & (F_1, P^U F_2) &= -(P^L F_1, F_2), \\ (F_1, P^J F_2) &= -(P^J F_1, F_2), & (F_1, P^L F_2) &= -(P^U F_1, F_2). \end{aligned}$$

Выполнение соотношений (12) следует из $(L_{-1}, DJ_j) = 0$, $(L_i, DJ_{-1}) = 0$, $i, j \geq 0$, и формальной цепочки равенств

$$\begin{aligned}
(L_i, DJ_j) &= -(DL_i, J_j) = -(P^L U_{i-1}, J_j) = (U_{i-1}, P^U J_j) = (U_{i-1}, DU_{j+1}) \\
&= -(DU_{i-1}, U_{j+1}) = -(P^U J_{i-2}, U_{j+1}) = (J_{i-2}, P^L U_{j+1}) \\
&= (J_{i-2}, DL_{j+2}) = -(DJ_{i-2}, L_{j+2}) = -(P^J L_{i-3}, L_{j+2}) \\
&= (L_{i-3}, P^J L_{j+2}) = (L_{i-3}, DJ_{j+3}).
\end{aligned}$$

□

3. Солитонные решения. Как следует из (10), (11), при любом $n > 0$ уравнение (1) имеет два инвариантных многообразия порядка $2n$, что позволяет построить для него два n -солитонных решения. Применение инвариантных многообразий, задаваемых ОДУ (3), является обобщением метода разделения переменных для эволюционных уравнений [12]. Построение n -солитонных решений уравнения (1) сводится к нахождению подходящего n -параметрического решения $u(x) = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ ОДУ $R_{2n}[u] = 0$ и затем подстановке функции $u(t, x) = \varphi(x, c_1(t), \dots, c_n(t))$ в уравнение (1), что приводит к системе ОДУ первого порядка относительно параметров $c_1(t), \dots, c_n(t)$.

n -солитонные решения уравнения (1) имеют вид

$$u(t, x) = E_n - (\ln f_n)_{xx}, \quad E_n = \text{const}. \quad (13)$$

Для односолитонных решений (13)

$$f_1^U = \text{ch } a(x + c_1), \quad E_1^U = b/6, \quad f_1^L = b + \text{ch } a(x + c_1), \quad E_1^L = a^2/6;$$

для двухсолитонных решений (13)

$$\begin{aligned}
f_2^J &= a_2 \text{ch } a_1(x + c_1) + ba_1 \text{ch } a_2(x + c_2), \quad E_2^J = \frac{(a_1^2 + 3a_2^2)b^2 - 3a_1^2 - a_2^2}{18(b^2 - 1)}, \\
f_2^L &= \text{ch } a_1(x + c_1)[(2a_1^2 + a_2^2) \text{ch } a_2(x + c_2) + b] - 3a_1a_2 \text{sh } a_1(x + c_1) \text{sh } a_2(x + c_2), \\
E_2^L &= a^2/6, \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Здесь a, a_i, b — константы. Индекс J, U или L при f_n, E_n указывает на то, что данное решение (13) при определенном значении параметров K_i, b порождено соответствующим многообразием (11) порядка $2n$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K. Sawada, T. Kotera, Prog. Theor. Phys., **51**:5 (1974), 1355–1367. [2] P. J. Caudrey, R. K. Dodd, J. D. Gibbon, Proc. R. Soc. Lond. A, **351**:1666 (1976), 407–422. [3] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Функц. анализ и его прил., **5**:4 (1971), 18–27. [4] C. S. Gardner, J. Math. Phys., **12**:8 (1971), 1548–1551. [5] J. Satsuma, D. J. Kaup, J. Phys. Soc. Japan, **43** (1977), 692–697. [6] В. В. Соколов, А. Б. Шабат, Функц. анализ и его прил., **14**:2 (1980), 79–80. [7] A. P. Fordy, J. Gibbons, J. Math. Phys., **21**:10 (1980), 2508–2510. [8] F. Magri, J. Math. Phys., **19**:5 (1978), 1156–1162. [9] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Функц. анализ и его прил., **13**:4 (1979), 13–30. [10] B. Fuchssteiner, W. Oevel, J. Math. Phys., **23**:3 (1982), 358–363. [11] P. Lax, SIAM Review, **18**:3 (1976), 351–375. [12] В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов, *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике*, Наука, Новосибирск, 1994. [13] О. В. Капцов, Динамика сплошной среды (ИГ СО АН СССР), **46** (1980), 46–57.