Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Г. В. Лукашенко, Об одном классе вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 2, 75–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:02:47

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Jenkins, Ann. of Math., **66** (1957), 440–453. [2] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin, 1984. [3] A. Douady, J. Hubbard, Invent. Math., **30**:2 (1975), 175–179. [4] Н. Я. Амбург, УМН, **57**:5 (2002), 145–146. [5] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982.

Государственный университет — Высшая школа экономики Поступило в редакцию
e-mail: artamkin@mail.ru 17 октября 2007 г.

Райффайзен банк
e-mail: yulia@pkbct.ru

Российский государственный гуманитарный университет
e-mail: george.shabat@gmail.ru

УДК 517.98

Об одном классе вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве*

© 2009. Г. М. ГУБРЕЕВ, Г. В. ЛУКАШЕНКО

1. Определение операторов класса G . Пусть L — вполне непрерывный оператор без вещественных собственных чисел в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. при каждом $g \in \mathfrak{H}$ мероморфная вектор-функция

$$G(z) := (I - zL^*)^{-1}g \quad (1)$$

аналитична вблизи $\mathbb{R}$. Через $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) обозначим область $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z < 0$). Напомним также, что мероморфная в $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) функция называется функцией ограниченной характеристики, если она представима в виде отношения двух аналитических ограниченных функций [1].

Определение 1. Оператор L назовем *оператором класса G* (или *G -оператором*), если существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, что

1) функция $(G(z), G(\bar{z}))$, а также функции $(G(z), h)$ для каждого $h \in \mathfrak{H}$ являются функциями ограниченной характеристики в $\mathbb{C}_\pm$;

2) существуют константы $m, M > 0$, такие, что

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|G(x)\|^{-2} |(G(x), h)|^2 dx \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Следующий простой пример послужил поводом для введения этого определения. Если положить

$$(J_a f)(x) = i \int_0^x f(s) ds, \quad f \in L_2(0, a), \quad (2)$$

то нетрудно проверить, что оператор $L := J_a \oplus (-J_b)$ в пространстве $L_2(0, a) \oplus L_2(0, b)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$, является G -оператором: можно взять $g = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ — функция, тождественно равная 1); при этом $m = M = 2\pi/(a + b)$. Проверяется, что в качестве вектора g можно также взять любую функцию

*Работа выполнена в рамках госбюджетной темы Украины, номер 0107U000937.

$g(x) := x^\alpha \oplus x^\alpha$, $-1/2 < \alpha < 1/2$. Заметим также, что если оба числа a , b больше 0, то оператор $J_a \oplus J_b$ уже не принадлежит классу G .

Другие примеры G -операторов связаны с теорией пространств де Бранжа [2]. Для удобства читателя напомним основные определения. Пусть E — целая функция, такая, что $|E^*(z)| < |E(z)|$, $z \in \mathbb{C}_+$. Здесь (и далее) $E^*(z) := \overline{E(\bar{z})}$. Линейное пространство целых функций F , таких, что

- (а) F/E , F^*/E суть функции ограниченной характеристики в $\mathbb{C}_+$,
- (b) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log(|F(\pm iy)/E(iy)|) \leq 0$,
- (c) $\int_{\mathbb{R}} |F(x)/E(x)|^2 dx < \infty$,

обозначается через $\mathcal{H}(E)$ и называется пространством де Бранжа. Пространство $\mathcal{H}(E)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$\langle F, Q \rangle := \int_{\mathbb{R}} F(x)Q^*(x)/|E(x)|^2 dx.$$

Целая функция S , которая удовлетворяет условиям (а), (b) и, кроме того, условию

$$\int_{\mathbb{R}} |S(x)/E(x)|^2 (1+x^2)^{-1} dx < \infty,$$

называется *сопутствующей* пространству $\mathcal{H}(E)$. Каждая сопутствующая функция S , такая, что $S(0) \neq 0$, порождает в $\mathcal{H}(E)$ вполне непрерывный оператор K_S по формуле

$$(K_S F)(z) := (F(z)S(0) - S(z)F(0))/zS(0), \quad F \in \mathcal{H}(E). \quad (3)$$

Фредгольмов спектр этого оператора совпадает с множеством корней функции S , ранг мнимой части $\text{Im } K_S := (K_S - K_S^*)/2i$ не превосходит двух, и в случае, когда он равен 2, оператор K_S не диссипативен, т.е. $\text{Im } K_S$ не является неотрицательным оператором. Следующий результат представляет самостоятельный интерес.

Теорема 1. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ действует вполне непрерывный оператор $\overset{\circ}{K}$ со следующими свойствами:

- 1) $\overset{\circ}{K}$ не имеет вещественных собственных чисел;
- 2) $\overset{\circ}{K}$ — не диссипативный оператор с мнимой частью ранга 2.

Тогда существуют пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ и сопутствующая ему функция S , такие, что $\overset{\circ}{K}$ унитарно эквивалентен оператору K_S .

Вообще говоря, не каждый оператор K_S принадлежит классу G . Ниже мы увидим, что каждый G -оператор подобен некоторому оператору вида (3). Выделим теперь подкласс операторов K_S , которые заведомо являются G -операторами. Из неравенства $|E^*(z)| < |E(z)|$, $z \in \mathbb{C}_+$, вытекает, что для функции

$$\Delta(x) := - \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{E(x-iy)}{E(x+iy)} \right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

справедливо неравенство $\Delta(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Будем говорить, что пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ обладает свойством (Δ) , если существуют константы $\delta_1, \delta_2 > 0$, такие, что

$$\delta_1 \leq \Delta(x) \leq \delta_2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\Delta)$$

В следующей формулировке предполагается, что $E(0) \neq 0$, $E(0) \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. Пусть функция S сопутствует пространству де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ со свойством (Δ) и не имеет вещественных корней. Тогда оператор K_S является G -оператором, причем в качестве вектора g можно взять функцию $g(z) = (E^*(z) - E(z))/2\pi iz$.

Мы опускаем здесь анализ условия (Δ) , поскольку это не используется в дальнейшем. Отметим еще одно интересное свойство G -операторов. Пусть L — некоторый G -оператор, которому в силу определения 1 отвечает вектор g , и пусть $f \in \mathfrak{H}$ — такой элемент, что функция $\varphi(z) := 1 - z(G(z), f)$ не имеет вещественных корней. Тогда оператор

$$L_1 h := Lh + (h, g)f, \quad h \in \mathfrak{H},$$

снова является G -оператором, которому отвечает тот же вектор g .

2. Структурные теоремы о G -операторах. Обозначим через $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ ($\Lambda_{\pm} = \Lambda \cap \mathbb{C}_{\pm}$) фредгольмов спектр G -оператора L (случай $\Lambda = \emptyset$ не исключается). Существует целая функция S , обращающаяся в 0 на последовательности Λ и такая, что все функции $S(z)(h, G(\bar{z}))$, $h \in \mathfrak{H}$, будут целыми (G определяется формулой (1)). Эта функция определяется с точностью до множителя $\exp\{iz\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и справедливо равенство

$$S^*(z)/S(z) = B_-(z)/B_+(z) \exp\{iz\beta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где B_- — произведение Бляшке с нулями $\bar{\lambda}_k$, $\lambda_k \in \Lambda_-$, B_+ — произведение Бляшке с нулями λ_k , $\lambda_k \in \Lambda_+$. Оба произведения строятся с учетом кратностей фредгольмова спектра Λ . Поскольку нули целой функции $S(z)S^*(z)(G(z), G(\bar{z}))$ в $\mathbb{C}_{\pm}$ удовлетворяют условию Бляшке, то в силу теоремы де Бранжа [2] имеет место факторизация

$$S(z)S^*(z)(G(z), G(\bar{z})) = E(z)E^*(z),$$

где целая функция E удовлетворяет условию $|E^*(z)| < |E(z)|$, $z \in \mathbb{C}_+$, и, стало быть, порождает пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. Произволом в выборе S и E можно распорядиться так, чтобы S сопутствовала $\mathcal{H}(E)$. Теперь из определения 1 выводится, что оператор

$$(Qh)(z) := S(z)(h, G(\bar{z})), \quad h \in \mathfrak{H},$$

является изоморфизмом пространства $\mathfrak{H}$ на, вообще говоря, некоторое подпространство пространства $\mathcal{H}(E)$. Кроме того, справедливо равенство $QLh = K_S Qh$, $h \in \mathfrak{H}$, и поэтому L подобен сужению оператора K_S на $Q\mathfrak{H}$. Из теоремы 1 следует, что сужение $K_S|_{Q\mathfrak{H}}$ унитарно эквивалентно некоторому оператору вида (3), т. е. имеет место

Теорема 3. Для каждого G -оператора L существует пространство де Бранжа и сопутствующая ему функция, такие, что L подобен модельному оператору вида (3).

При каждом $h \in \mathfrak{H}$ функции $(h, G(\bar{z}))B_+(z)$, $(G(z), h)B_-(z)$ аналитичны в $\mathbb{C}_+$. Положим

$$\begin{aligned} a_- &:= \limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log(|B_+(iy)| \|G(-iy)\|), \\ a_+ &:= \limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log(|B_-(iy)| \|G(iy)\|). \end{aligned} \tag{4}$$

Условия формулируемой ниже теоремы 4 гарантируют, что оператор Q отображает $\mathfrak{H}$ на все пространство $\mathcal{H}(E)$, которое в этом случае обладает свойством (Δ) .

Теорема 4. Пусть L — оператор класса G . Пусть, кроме того, $a_+ = a_- = 0$ и существует A_2 -вес Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}$ [3], такой, что

$$\|G(x)\|^2 \leq w^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} w^2(x) \|G(x)\|^{-2} (1+x^2)^{-1} dx < \infty.$$

Тогда

1) оператор L подобен модельному оператору K_S вида (3), который действует в пространстве $\mathcal{H}(E)$ со свойством (Δ) ;

2) семейство корневых подпространств оператора L полно в пространстве $\mathfrak{H}$.

Теорема 5. Пусть L — оператор класса G . Если $a_+ = a_- = 0$ и вес $w^2(x) := \|G(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$, то оператор L , а также его сужение на любое инвариантное подпространство подобны ортогональной сумме $L_1 \oplus (-L_2)$, где L_1, L_2 — некоторые диссипативные операторы с минимальными частями ранга 1 и полными семействами корневых подпространств.

Отметим, что в том (и только в том) случае, когда фредгольмов спектр сужения оператора L лежит в одной из областей $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$, ортогональная сумма операторов $L_1 \oplus (-L_2)$ сводится к одному слагаемому.

В следующей формулировке B обозначает произведение Бляшке, построенное по нулям функции $(G(z), G(\bar{z}))$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ с учетом кратностей.

Теорема 6. Пусть L — оператор класса G с одномерными корневыми подпространствами и $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ — его фредгольмов спектр. Если выполняются условия

(a) $a_+ = a_- = 0$;

(b) вес $\|G(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$;

(c) последовательности Λ_+ и $\bar{\Lambda}_- := \{\bar{\lambda}_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$ удовлетворяют условию Карлесона (C) [3],

то семейство собственных векторов оператора L образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$. Обратно, пусть G -оператор L удовлетворяет условиям теоремы 4 и выполняются неравенства

$$\sup_{\lambda_k \in \Lambda_+} |B(\lambda_k)| < 1, \quad \sup_{\lambda_k \in \Lambda_-} |B(\bar{\lambda}_k)| < 1.$$

Если семейство собственных векторов оператора L образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то выполняются условия (b), (c).

Напомним, что J_a определяется формулой (2) и является диссипативным оператором. Далее, если $\sigma(L) = \{0\}$, то числа a_+, a_- вычисляются по формулам (4), в которых следует опустить множители $|B_{\pm}(iy)|$.

Теорема 7. Пусть оператор L принадлежит классу G , и пусть $\sigma(L) = \{0\}$. Если вес $\|G(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$, то L подобен прямой сумме $J_{a_-} \oplus (-J_{a_+})$. Обратно, если оператор L подобен прямой сумме $B_1 \oplus (-B_2)$, где B_1, B_2 — некоторые диссипативные операторы, то вес $\|G(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$.

Теоремы 5–7 доказываются сначала для модельных операторов K_S с последующим переносом на операторы класса G . Теорема 7 в модельном случае впервые

доказана в [4], а критерий базисности собственных векторов K_S был получен в [5].

В течение последних пятидесяти лет задача о подобии вольтеррова оператора оператору наиболее простой структуры рассматривалась многими авторами. Если речь идет об интегральных операторах Вольтерра с $(n \times n)$ -матричными ядрами $k(x, t)$, то наиболее полные результаты о подобии получены в [6]. Здесь приведены признаки подобия интегрального оператора и оператора вида $J \otimes B$, где J — оператор интегрирования, а B — невырожденная эрмитова $(n \times n)$ -матрица. В частности, в этой работе получены признаки подобия интегрального оператора оператору $J_a \oplus (-J_b)$ в терминах ядра $k(x, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.
 [2] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, 1968. [3] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984. [4] Г. М. Губреев, *Алгебра и анализ*, **12:6** (2000), 1–97. [5] Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, *Функц. анализ и его прил.*, **40:1** (2006), 71–75. [6] М. М. Маламуд, *Труды ММО*, **60** (1999), 199–259.

Полтавский национальный технический
 университет, Украина
 e-mail: gubreev@yandex.ru

Поступило в редакцию
 28 марта 2008 г.

УДК 512.622

Теорема о реализации в контексте композиции Шура–Сегё*

© 2009. В. П. Костов

Посвящается проф. Висенте Наварро

Для двух комплексных многочленов степени n от одной переменной $P = \sum_{j=0}^n C_n^j u_j x^j$ и $Q = \sum_{j=0}^n C_n^j v_j x^j$ определим их композицию Шура–Сегё формулой $P * Q = \sum_{j=0}^n C_n^j u_j v_j x^j$, где $C_n^j = n!/j!(n-j)!$. Имеет место очевидное равенство

$$P(x) * ((1+x)^n) = P(x). \quad (1)$$

Ясно, что композиция Шура–Сегё коммутативна и ассоциативна, поэтому мы будем писать $P * Q * R$ вместо $(P * Q) * R$ или $P * (Q * R)$ и т. д. Более подробную информацию о композиции Шура–Сегё можно найти в монографиях [1] и [2]. Рассмотрим многочлен P , такой, что $u_n = 1$ и $P(-1) = 0$. (Если нуль не является n -кратным корнем многочлена P , то последнего равенства можно добиться линейной заменой переменной x .) В работе [3] показано (см. также [4]), что многочлен P представляется в виде

$$P = K_{a_1} * \dots * K_{a_{n-1}}, \quad (2)$$

*Исследование частично финансировалось проектом сотрудничества между CNRS и FAPESP 20682 «Нули алгебраических многочленов».