Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Слабый тип $(1,1)$ в усиленной теореме Марцинкевича, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 3, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:51:56

Слабый тип (1,1) в усиленной теореме Марцинкевича*

© 2009. С. В. Кисляков

Памяти Соломона Григорьевича Михлина

В 1956 г. С. Г. Михлин [1] доказал, что ограниченная функция m на $\mathbb{R}^n$ является мультипликатором Фурье всех пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, если достаточное число ее производных удовлетворяет неравенству $|D^\alpha m(\xi)| \leq C|\xi|^{-|\alpha|}$, $\xi \neq 0$. Позже Хёрмандер [2] дал более точное условие на m :

$$\left(2^{-kn} \int_{2^k \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} |D^\alpha m(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq C2^{-k|\alpha|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ при } |\alpha| \leq \varkappa, \quad (1)$$

где $\varkappa$ — наименьшее целое число, большее $n/2$. Фактически, при этом условии оператор $T_m, \widehat{T_m f} = m\hat{f}$, можно интерпретировать как сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда. Таким образом, он имеет и слабый тип (1,1):

$$|\{x : |T_m f(x)| > t\}| \leq Ct^{-1} \|f\|_{L^1}, \quad t > 0. \quad (2)$$

Непрерывность мультипликатора во всех $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, гарантируется при иных условиях и теоремой Марцинкевича (см. [3]). В дальнейшем мы ограничимся случаем $n = 1$. Тогда условие Марцинкевича требует, чтобы вариации функции m , $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, на всех отрезках $I_k = [2^k, 2^{k+1}]$ и $J_k = [-2^{k+1}, -2^k]$, $k \in \mathbb{Z}$, были равномерно ограничены. Если функция m дифференцируема всюду, кроме нуля, это означает, что

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^k \leq |\xi| \leq 2^{k+1}} |m'(\xi)| d\xi < \infty. \quad (3)$$

В интересующем нас случае прямой $\mathbb{R}$ условие (1) *сильнее* условия (3), которое, однако, уже не гарантирует неравенства (2). Но это неравенство все же выполнено для всех функций f из класса Харди $H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ при } \xi < 0\}$, см. [4]. (В высших размерностях аналога такого утверждения нет.)

В статье [5] теорема Марцинкевича для прямой $\mathbb{R}$ была усилена: оказалось, что для действия оператора T_m во всех пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, достаточно всего лишь равномерной ограниченности 2-вариаций (определение дано ниже) функции m , $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, на отрезках I_k и J_k . Естественно спросить, остается ли справедливым при таком предположении неравенство (2) для $f \in H^1(\mathbb{R})$. Ответа я не знаю, однако верна следующая теорема. Пусть φ — возрастающая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$. Для каждого отрезка I положим $v_\varphi^I(m) = \sup \sum_{j=1}^l \varphi(|m(t_j) - m(t_{j-1})|)$, где верхняя грань берется по всем конечным наборам $t_0, \dots, t_l \in I$, $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l$. Напом-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00358.

ним, что, если $\varphi(t) = t^p$, то величина $v_\varphi^I(m)$ называется p -вариацией функции m на отрезке I .

Теорема 1. *Если m — ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$ и $\sup_j v_\varphi^{I_j}(m) < \infty$, где $\varphi(t) \geq Dt^2(\log(e + 1/t))^{2+\varepsilon}$, $t > 0$, для некоторого $\varepsilon > 0$, то неравенство (2) выполнено для оператора T_m при всех $f \in H^1(\mathbb{R})$.*

В частности, годятся ограниченные функции m , имеющие равномерно ограниченные p -вариации на всех отрезках I_j при каком-нибудь $p < 2$.

Приступим к доказательству. Успех авторов работы [5] был связан со следующим результатом Рубио де Франсиа [6]: если Δ_k — попарно непересекающиеся отрезки в $\mathbb{R}$, а f_k — функции (из L^1), такие, что $\text{supp } \hat{f}_k \subset \Delta_k$, то $\|\sum f_k\|_{L^p} \leq C\|(\sum |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^p}$, $1 < p \leq 2$. Бургейн [7] распространил эту оценку на $p = 1$. Недавно [8] она была доказана при всех $p \in (0, 2]$. Там же объяснялось и что

$$\left\| \sum f_k \right\|_{L^{1,\infty}} \leq C \left\| \left(\sum |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{1,\infty}}, \quad (4)$$

где $\|g\|_{L^{1,\infty}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} t|\{x : |g(x)| > t\}|$. Именно проникновение в область невыпуклых метрик помогает доказать теорему 1. Нам понадобится еще следующий результат.

Предложение 2. *Пусть Δ_{kj} — отрезки в $\mathbb{R}$, такие, что $\Delta_{kj} \cap \Delta_{kj'} = \emptyset$ при $j \neq j'$. Пусть измеримые функции f_{kj} на $\mathbb{R}$ таковы, что $(\sum_{k,j} |f_{kj}|^2)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\left\| \left(\sum_k \left| \sum_j T_{\chi_{\Delta_{kj}}} f_{kj} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{1,\infty}} \leq C \left\| \left(\sum_{k,j} |f_{kj}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1},$$

где C — универсальная постоянная.

В случае, когда индекс k принимает всего одно значение, предложение 2 было доказано в [8]. Общий случай не требует новых идей — только удлиняются формулы.

Следствие 3. *Пусть отрезки Δ_{kj} такие же, как в предложении 2, а λ_{kj} — комплексные числа, причем $b = \sup_k (\sum_j |\lambda_{kj}|^2)^{1/2} < \infty$. Положим $m_k = \sum_j \lambda_{kj} \chi_{\Delta_{kj}}$. Тогда*

$$\left\| \left(\sum_k |T_{m_k} f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{1,\infty}} \leq Cb \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1}.$$

Для доказательства достаточно применить предложение 2 к функциям $\lambda_{kj} f_k$ в качестве f_{kj} .

Теорема 4. *Пусть функция φ такая же, как в теореме 1, а m_k — равномерно ограниченные функции на $\mathbb{R}$, для которых $\sup_k v_\varphi^{\mathbb{R}}(m_k) < \infty$. Тогда*

$$\left\| \left(\sum_k |T_{m_k} f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{1,\infty}} \leq d \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1}.$$

В этой теореме не требуется, чтобы функции f_k лежали в классе Харди $H^1(\mathbb{R})$, так что она представляет и независимый интерес.

Для доказательства воспользуемся приемом из [5]. Пусть $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $A = v_\varphi^\mathbb{R}(m) < \infty$. Функция $h(t) = v_\varphi^{(-\infty, t]}(m)$ возрастает и удовлетворяет условию $\varphi(|m(t) - m(s)|) \leq |h(t) - h(s)|$, $s, t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $m = \mu \circ h$ для некоторой функции μ на отрезке $[0, A]$, и ясно, что $|\mu(u) - \mu(v)| \leq \varphi^{-1}(|u - v|)$, $u, v \in [0, A]$. Разобьем отрезок $[0, A]$ на 2^n отрезков I_σ равной длины; пусть μ_n — функция на $[0, A]$, равная $|I_\sigma|^{-1} \int_{I_\sigma} \mu$ на I_σ . Тогда $|\mu_n - \mu_{n-1}| \leq 2\varphi^{-1}(2^{-n-1}A)$, $n \geq 1$.

Нетрудно понять, что $\varphi^{-1}(u) \leq C^{-1/2} \sqrt{u}(\log(e + \sqrt{C}/\sqrt{u}))^{-1-\varepsilon/2}$. Таким образом,

$$|\mu_n - \mu_{n-1}| \leq c_1 2^{-n/2} (\log(e + 2^{n/2} c_1^{-1}))^{-1-\varepsilon/2},$$

где $c_1 = \sqrt{A/2C}$. Поэтому $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \dots$ (ряд сходится равномерно). Это ведет к представлению $m = m^0 + m^1, \dots$, где каждая функция m^n имеет вид $\sum_{\nu=1}^{2^n} \lambda_{\nu n} \chi_{\Delta_{\nu n}}$ для некоторых неперекрывающихся интервалов $\Delta_{\nu n}$, а числа $\lambda_{\nu n}$ — значения функции $\mu_n - \mu_{n-1}$ (либо функции μ_0 при $n = 0$). Таким образом, при $n \geq 1$ имеем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2^n} |\lambda_{\nu n}|^2 \right)^{1/2} \leq c_1 (\log(e + 2^{n/2} c_1^{-1}))^{-1-\varepsilon/2}.$$

Запишем такое представление для каждой функции m_k из теоремы 4: $m_k = \sum_{n \geq 0} m_{kn}$. Тогда

$$\left(\sum_k |T_{m_k} f_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{n \geq 0} \left(\sum_k |T_{m_{kn}} f_k|^2 \right)^{1/2}.$$

К каждому слагаемому в сумме по n применим следствие 3 и получим

$$\left\| \left(\sum_k |T_{m_{kn}} f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{1,\infty}} \leq b_n, \quad b_n = c_2 (\log(e + 2^{n/2} c_2^{-1}))^{-1-\varepsilon/2},$$

где c_2 зависит от C и общей мажоранты чисел $v_\varphi^\mathbb{R}(m_k)$. Теперь утверждение теоремы 4 вытекает из следующей леммы Стейна и Вейса (см., например, [9, гл. 4, лемма 3.3]). Пусть g_n — неотрицательные функции на $\mathbb{R}$, причем $\|g_n\|_{L^{1,\infty}} \leq b_n$. Пусть $D = \sum_n b_n < \infty$. Если $K = \sum_n (b_n/D) |\log(b_n/D)| < \infty$, то $\|\sum g_n\|_{L^{1,\infty}} \leq 2D(K+2)$.

В нашей ситуации $b_n = O(n^{-1-\varepsilon/2})$, так что обе величины D и K конечны. $\square$

Выведем теорему 1 из теоремы 4. Пусть α — бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\text{supp } \hat{\alpha} \subset [1/2, 2]$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}(2^k x) = 1$ при $x > 0$. Пусть $\alpha_k(x) = 2^{-k} \alpha(2^{-k} x)$. Тогда для $f \in H^1(\mathbb{R})$ имеет место равенство $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k * f$ и справедлива оценка $\|(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k * f|^2)^{1/2}\|_{L^1} \leq C \|f\|_{L^1}$. См., например, [10]. (По существу, это утверждение — тоже вариант теоремы Михлина–Хёрмандера.)

Пусть $f_k = f * \varphi_k$. Рассматривая отдельно четные и нечетные k , мы можем считать, что спектры функций f_k заключены в попарно непересекающиеся отрезки Δ_k . Пусть $m_k = m \chi_{\Delta_k}$. Тогда, согласно теореме 4, $\|(\sum_k |T_{m_k} f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{1,\infty}} \leq D \|f\|_{L^1}$. В силу неравенства (4), отдельно для сумм по четным и нечетным

k , имеем $\|\sum_k T_{m_k} f_k\|_{L^{1,\infty}} \leq D' \|f\|_{L^1}$. Складывая эти две оценки, приходим к нужному неравенству $\|T_m f\|_{L^{1,\infty}} \leq D'' \|f\|_{L^1}$, $f \in H^1(\mathbb{R})$. $\square$

Стоит сказать, что результаты статьи [5] о показателях p , бóльших 1, переносятся на высшие размерности, см. [11].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Г. Михлин, ДАН СССР, **109** (1956), 701–703. [2] L. Hörmander, Acta Math., **104** (1960), 93–140. [3] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973. [4] Д. В. Париров, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 150–167. [5] Coifman R., J. L. Rubio de Francia, S. Semmes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **306** (1988), 351–354. [6] J. L. Rubio de Francia, Revista Mat. Iberoamericana, **1**:2 (1985), 1–13. [7] J. Bourgain, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B, **37**:1 (1985), 20–26. [8] С. В. Кисляков, Д. В. Париров, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 98–114. [9] М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}$* , Мир, М., 1978. [10] J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, J. L. Torrea, Adv. in Math., **62**:1 (1986), 7–48. [11] Xu Quanhua, Pacific J. Math., **176**:1 (1996), 287–296.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
12 мая 2009 г.

УДК 517.923+517.956.227

Лакуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области*

© 2009. С. А. НАЗАРОВ

Памяти С. Г. Михлина посвящается

Рассмотрим спектральную задачу Неймана для формально самосопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) &:= \overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^\top \mathcal{A}(x) \mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = \lambda u(x), & x \in \Pi, \\ \overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^\top \mathcal{A}(x) \mathcal{D}(\nabla_x)u(x) &= 0, & x \in \partial\Pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathcal{D}(\nabla_x)$ есть $(N \times k)$ -матрица однородных дифференциальных операторов первого порядка с постоянными комплексными коэффициентами, $\mathcal{A}$ — эрмитова матрица-функция размера $N \times N$ с измеримыми элементами,

$$c_{\mathcal{A}}|\xi|^2 \leq \overline{\xi}^\top \mathcal{A}(x)\xi \leq C_{\mathcal{A}}|\xi|^2 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{C}^N \text{ и п.в. } x \in \Pi, \quad 0 < c_{\mathcal{A}} \leq C_{\mathcal{A}}. \quad (2)$$

Кроме того, ν — вектор внешней нормали, $u = (u_1, \dots, u_k)^\top$, $^\top$ — знак транспонирования, а чертой обозначено комплексное сопряжение. Под $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ подразумеваем квазицилиндрическую область $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \varpi_j$ с липшицевой границей $\partial\Pi$ и периодически меняющимся сечением; здесь $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\varpi_j = \{x =$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Netherlands Organization for Scientific Research и Российского фонда фундаментальных исследований; совместный проект 047.017.020.