Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Бирман, В. А. Слоущ, Двусторонние оценки для следа разности пары полугрупп, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 3, 26–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:17:30

Двусторонние оценки для следа разности пары полугрупп

© 2009. М. Ш. БИРМАН, В. А. СЛОУЩ

*Светлой памяти
профессора Соломона Григорьевича Михлина*

Работа посвящена выводу двусторонних оценок для следа разности двух полугрупп, генерируемых парой операторов Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^3)$ с ядерной разностью резольвент. Используется чисто теоретико-операторная техника. Результаты получаются в достаточно общих абстрактных терминах. Точность полученных оценок подтверждается тем, что из них вытекает асимптотика поведения следа разности полугрупп при $t \rightarrow +0$. Рассуждения существенно основываются на формуле Крейна–Лифшица и на представлении Бирмана–Соломака для функции спектрального сдвига.

Введение. Основной результат

Настоящая работа посвящена выводу двусторонних оценок для следа разности двух полугрупп, генерируемых парой операторов Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Близкий вопрос обсуждался недавно в [1] на основе представления Фейнмана–Каца для соответствующих тепловых ядер (ср. также [2]). В настоящей статье мы используем чисто теоретико-операторную технику, развитую впервые в [3]. При этом результаты получаются в достаточно общих абстрактных терминах. Для следа разности полугрупп получаются двусторонние оценки, точность которых подтверждается тем, что из них вытекает асимптотика поведения следа разности полугрупп при $t \rightarrow +0$. Наши рассуждения существенно основываются на формуле следов Крейна–Лифшица и на представлении для функции спектрального сдвига, полученном в [3].

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а A_k , $k = 0, 1$, — пара самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$. Предположим, что

$$\text{Dom } A_0 = \text{Dom } A_1, \quad (0.1)$$

$$V := A_1 - A_0 \in \mathfrak{S}_1. \quad (0.2)$$

Здесь $\mathfrak{S}_1$ — класс всех ядерных операторов в $\mathfrak{H}$. Далее, через $W_1(\mathbb{R})$ обозначается класс всех дифференцируемых функций $h(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, у которых первая производная есть преобразование Фурье от конечной (комплексной) меры. Если для пары A_1, A_0 выполнено условие (0.2), то существует *функция спектрального сдвига*, введенная Лифшицем и Крейном (см. [4], [5]). Подробнее, Крейну принадлежит следующий результат (см. [5]–[7]).

Теорема 0.1. Пусть A_0, V — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, $V \in \mathfrak{S}_1$, $A_1 = A_0 + V$. Тогда для любой функции $h \in W_1(\mathbb{R})$ справедливо включение $h(A_1) - h(A_0) \in \mathfrak{S}_1$. Существует (единственная) функция $\xi \in L_1(\mathbb{R})$, такая,

что для любой функции $h \in W_1(\mathbb{R})$ справедлива формула следов

$$\mathrm{Tr}(h(A_1) - h(A_0)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\lambda) h'(\lambda) d\lambda. \quad (0.3)$$

При этом $\|\xi\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|V\|_{\mathfrak{S}_1}$.

Функция $\xi(\lambda) =: \xi(A_1, A_0, \lambda)$ называется функцией спектрального сдвига для пары A_1, A_0 . Далее, для произвольного самосопряженного оператора A через $\sigma(A)$, $\varrho(A)$ и $E_A(\cdot)$ обозначаются спектр, множество регулярных точек и спектральная мера этого оператора. В [3] установлена следующая двусторонняя оценка.

Теорема 0.2. Пусть операторы A_0, A_1, V — те же, что и в теореме 0.1, а $f(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, — непрерывная неотрицательная невозрастающая функция с конечным полным изменением. Тогда справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) \mathrm{Tr}(E_{A_1}(d\mu)V) \leq \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) \xi(\mu) d\mu \leq \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) \mathrm{Tr}(E_{A_0}(d\mu)V), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (0.4)$$

Переходя в неравенствах (0.4) к пределу при $\lambda \rightarrow +\infty$, получим

Следствие 0.3. В условиях теоремы 0.2 верна двусторонняя оценка

$$\mathrm{Tr}(f(A_1)V) \leq \int_{\mathbb{R}} f(\mu) \xi(\mu) d\mu \leq \mathrm{Tr}(f(A_0)V). \quad (0.5)$$

Предположим теперь, что операторы A_k , $k = 0, 1$, полуограничены снизу:

$$(-\infty, \gamma] \cap \sigma(A_k) = \emptyset \quad \text{при некотором } \gamma, \quad k = 0, 1. \quad (0.6)$$

Рассмотрим полугруппы

$$\mathcal{U}_k(t) := e^{-tA_k}, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \quad (0.7)$$

порожденные операторами A_k . Легко видеть, что если выполнено условие (0.6), то теорема 0.2 и следствие 0.3 справедливы и для функции $f(\mu) = e^{-t\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $t > 0$ (несмотря на то, что $f \notin W_1(\mathbb{R})$). При этом оценка (0.5) принимает вид

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{U}_1(t)V) \leq \int_{\gamma}^{+\infty} e^{-t\mu} \xi(\mu) d\mu \leq \mathrm{Tr}(\mathcal{U}_0(t)V). \quad (0.8)$$

Кроме того, если выполнено условие (0.2), то $\mathcal{U}_1(t) - \mathcal{U}_0(t) \in \mathfrak{S}_1$, $t > 0$. Положим

$$\Xi(t) := \mathrm{Tr}(\mathcal{U}_0(t) - \mathcal{U}_1(t)), \quad t > 0.$$

Если имеет место условие (0.6), то для $h(\mu) = e^{-t\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $t > 0$, верна формула следов (0.3):

$$\Xi(t) = t \int_{\gamma}^{+\infty} e^{-t\mu} \xi(\mu) d\mu, \quad t > 0. \quad (0.9)$$

Сравнивая (0.8) и (0.9), приходим к следующему утверждению [3]:

Следствие 0.4. Пусть A_0, A_1, V — те же, что в теореме 0.1, и дополнительно пусть операторы A_0 и A_1 полуограничены снизу. Тогда верна двусторонняя оценка

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{U}_1(t)V) \leq t^{-1} \Xi(t) \leq \mathrm{Tr}(\mathcal{U}_0(t)V), \quad t > 0.$$

Наша цель — распространить теорему 0.2 и следствие 0.4 на случай ограниченного «относительно ядерного» возмущения. Мы используем эти результаты, чтобы получить асимптотику функции $\Xi(t)$ при $t \rightarrow +0$ для случая, когда производящие операторы полугрупп — операторы Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$. Будем предполагать выполненными условия (0.1), (0.6); условие (0.2) заменим более слабым:

$$V := A_1 - A_0 \in \mathfrak{B}, \quad |V|^{1/2}(A_0 - zI)^{-1} \in \mathfrak{S}_2, \quad z \in \varrho(A_0). \quad (0.10)$$

Здесь $\mathfrak{B}$ — класс всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_2$ — класс операторов Гильберта–Шмидта в $\mathfrak{H}$. Далее, для произвольного самосопряженного оператора A в $\mathfrak{H}$ положим $R(A, z) := (A - zI)^{-1}$, $z \in \varrho(A)$, $E_A^\lambda := E_A(-\infty, \lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Укажем элементарное следствие условия (0.10):

$$R(A_1, z) - R(A_0, z) \in \mathfrak{S}_1, \quad z \in \varrho(A_0) \cap \varrho(A_1). \quad (0.11)$$

Как отметил Крейн [6], для пары самосопряженных операторов A_1, A_0 , удовлетворяющих условию (0.11), также справедлива формула следов (0.3). Опишем удобный класс допустимых функций, для которых справедлива эта формула. Будем говорить, что функция $h(\lambda)$ допустима, если она имеет две локально ограниченные производные и при некотором $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$(\lambda^2 h'(\lambda))' = O(\lambda^{-1-\varepsilon}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Имеет место следующее утверждение (см., например, [8, гл. 8, §§7, 9]).

Теорема 0.5. Пусть A_0, A_1 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющие условиям (0.6), (0.11). Предположим, что функция h допустима. Тогда справедливо включение $h(A_1) - h(A_0) \in \mathfrak{S}_1$. Существует (единственная) функция $\xi \in L_1(\mathbb{R}, (\lambda^2 + 1)^{-1})$, такая, что $\xi(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow -\infty$, и для всякой допустимой функции h выполняется формула следов (0.3). При этом

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} -\xi(R(A_1, \gamma), R(A_0, \gamma), (\lambda - \gamma)^{-1}), & \lambda > \gamma, \\ 0, & \lambda \leq \gamma. \end{cases} \quad (0.12)$$

Функцию $\xi(\lambda) =: \xi(A_1, A_0, \lambda)$ также называют функцией спектрального сдвига пары A_1, A_0 . Сформулируем теперь двустороннюю оценку функции спектрального сдвига.

Теорема 0.6. Пусть A_k , $k = 0, 1$, $V := A_1 - A_0$ — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющие условиям (0.1), (0.6), (0.10), и пусть функция $f(\mu)$, $\gamma \leq \mu \leq \lambda$, непрерывна, неотрицательна и не возрастает на $[\gamma, \lambda]$. Тогда верна оценка

$$\int_\gamma^\lambda f(\mu) \operatorname{Tr}(E_{A_1}(d\mu) V E_{A_1}^\lambda) \leq \int_\gamma^\lambda f(\mu) \xi(\mu) d\mu \leq \int_\gamma^\lambda f(\mu) \operatorname{Tr}(E_{A_0}(d\mu) V E_{A_0}^\lambda). \quad (0.13)$$

Доказательство теоремы 0.6 приведено в §2. Произвольным образом доопределив $f(\mu)$ на всей оси, перепишем неравенства (0.13) так:

$$\operatorname{Tr}(E_{A_1}^\lambda f(A_1) V E_{A_1}^\lambda) \leq \int_\gamma^\lambda f(\mu) \xi(\mu) d\mu \leq \operatorname{Tr}(E_{A_0}^\lambda f(A_0) V E_{A_0}^\lambda). \quad (0.14)$$

Положив в (0.14) $f(\mu) = e^{-t\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $t > 0$, получим

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E_{A_1}^\lambda \mathcal{U}_1(t/2)V\mathcal{U}_1(t/2)E_{A_1}^\lambda) &\leq \int_{\gamma}^{\lambda} e^{-t\mu} \xi(\mu) d\mu \\ &\leq \text{Tr}(E_{A_0}^\lambda \mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2)E_{A_0}^\lambda), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (0.15)$$

Учитывая вытекающие из (0.10), (0.11) включения $\mathcal{U}_k(t)V\mathcal{U}_k(t) \in \mathfrak{S}_1$, $t > 0$, $k = 0, 1$, перейдем в (0.15) к пределу при $\lambda \rightarrow +\infty$ и получим

$$\text{Tr}(\mathcal{U}_1(t/2)V\mathcal{U}_1(t/2)) \leq \int_{\gamma}^{+\infty} e^{-t\mu} \xi(\mu) d\mu \leq \text{Tr}(\mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2)), \quad t > 0. \quad (0.16)$$

С другой стороны, функция $h(\mu) = e^{-t\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $t > 0$, допустима, и из формулы следов (0.3) вытекает равенство (0.9). Сравнивая (0.9) и (0.16), получаем следующую двустороннюю оценку.

Следствие 0.7. Пусть A_0 , A_1 , V такие же, как и в теореме 0.6. Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$\text{Tr}(\mathcal{U}_1(t/2)V\mathcal{U}_1(t/2)) \leq t^{-1}\Xi(t) \leq \text{Tr}(\mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2)), \quad t > 0. \quad (0.17)$$

Комментарии. (i) Оценка, подобная правому неравенству в (0.17), была получена в [1] для случая операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$.

(ii) Легко видеть, что разность между верхней и нижней оценкой в (0.17) удовлетворяет неравенству

$$|\text{Tr}(\mathcal{U}_1(t/2)V\mathcal{U}_1(t/2)) - \text{Tr}(\mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2))| \leq 2\|V\|e^{-t\gamma/2}\|\mathcal{U}_1(t/2) - \mathcal{U}_0(t/2)\|_{\mathfrak{S}_1}. \quad (0.18)$$

Сказанное позволяет вычислить асимптотику функции $\Xi(t)$ при $t \rightarrow +0$ для случая операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$.

Авторы благодарят В. С. Буслаева за содержательное обсуждение и комментарии и Н. Д. Филонова, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

§1. Асимптотика функции $\Xi(t)$ при $t \rightarrow +0$ для операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$ определим операторы

$$A_0 = -\Delta, \quad \text{Dom } A_0 = H^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.1)$$

$$A_1 = A_0 + V. \quad (1.2)$$

Здесь $H^2(\mathbb{R}^3)$ — стандартное пространство Соболева. Предполагается, что

$$V = \overline{V} \in L_\infty(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3). \quad (1.3)$$

Если выполнено условие (1.3), операторы (1.1), (1.2) являются самосопряженными в $\mathfrak{H}$ и удовлетворяют условиям (0.1), (0.6) (при любом $\gamma < -\|V\|_{L_\infty}$). Обозначим через Φ преобразование Фурье,

$$\Phi u(k) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ikx} u(x) dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3).$$

В силу равенства $A_0 = \Phi^*[k^2]\Phi$ справедливы соотношения

$$R(A_0, z) = \Phi^*[(k^2 - z)^{-1}]\Phi, \quad z \in \varrho(A_0), \quad (1.4)$$

$$\mathcal{U}_0(t) = \Phi^*[e^{-tk^2}]\Phi, \quad t > 0. \quad (1.5)$$

Здесь и ниже $k^2 = |k|^2$, $k \in \mathbb{R}^3$, и через $[m(k)]$ обозначается оператор умножения в $L_2(\mathbb{R}^3)$ на функцию $m(k)$. Из (1.3) и (1.4) следует, что операторы (1.1), (1.2) удовлетворяют условию (0.10) и выполнено равенство

$$\| |V|^{1/2} R(A_0, z) \|_{\mathfrak{S}_2}^2 = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |V(x)| dx \int_{\mathbb{R}^3} |k^2 - z|^{-2} dk, \quad z \in \varrho(A_0). \quad (1.6)$$

При условии (1.3) операторы (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям теоремы 0.6 и следствия 0.7. Значит, полугруппы (0.7), порожденные операторами (1.1), (1.2), удовлетворяют оценке (0.17). Из (1.5) и элементарного равенства

$$\text{Tr}(\mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2)) = \|V_+^{1/2}\mathcal{U}_0(t/2)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 - \|V_-^{1/2}\mathcal{U}_0(t/2)\|_{\mathfrak{S}_2}^2$$

легко вывести, что

$$\text{Tr}(\mathcal{U}_0(t/2)V\mathcal{U}_0(t/2)) = (4\pi t)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) dx. \quad (1.7)$$

Ниже (см. лемму 1.2) мы покажем, что справедлива оценка

$$\|\mathcal{U}_1(t) - \mathcal{U}_0(t)\|_{\mathfrak{S}_1} = O(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow +0. \quad (1.8)$$

Из (0.17), (0.18), (1.7) и (1.8) вытекает

Предложение 1.1. *При условии (1.3) след разности полугрупп (0.7), порожденных операторами (1.1), (1.2), имеет асимптотику*

$$\Xi(t) = (4\pi)^{-3/2} t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) dx + O(t^{1/2}), \quad t \rightarrow +0. \quad (1.9)$$

Указанная асимптотика согласуется с асимптотическим разложением для теплового ядра для оператора $-\Delta + V$ при $t \rightarrow +0$ (см. [2], а также [1]).

Лемма 1.2. *При условии (1.3) разность полугрупп (0.7), порожденных операторами (1.1), (1.2), удовлетворяет оценке (1.8).*

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$\mathcal{U}_0(t) - \mathcal{U}_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-zt} (R(A_0, z) - R(A_1, z)) dz, \quad t > 0. \quad (1.10)$$

Здесь контур Γ приходит из бесконечности вдоль биссектрисы четвертой четверти, охватывает спектры $\sigma(A_k)$, $k = 0, 1$, и уходит в бесконечность вдоль биссектрисы первой четверти. Дважды применяя резольвентное тождество к разности резольвент в (1.10), получим

$$\mathcal{U}_0(t) - \mathcal{U}_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-zt} R(A_0, z) V R(A_0, z) (I - V R(A_1, z)) dz, \quad t > 0. \quad (1.11)$$

С учетом (1.6) и равномерной ограниченности нормы $\|I - V R(A_1, z)\|$ на Γ из (1.11) получим (1.8). $\square$

§2. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 0.6 достаточно проверить правое из неравенств (0.13). Левое неравенство в (0.13) получается из правого переменной ролей операторов A_0 и A_1 . Чтобы установить правое из неравенств (0.13), приблизим возмущение V «срезанными» операторами $V_s := E_{A_0}^s V E_{A_0}^s \in \mathfrak{S}_1$, $s > 0$. Для краткости введем обозначение $A_1^s := A_0 + V_s$, $s > 0$.

Лемма 2.1. *В условиях теоремы 0.6 полуюсь $(-\infty, \gamma_1]$, $\gamma_1 < \gamma - \|V\|$, свободна от спектров $\sigma(A_1^s)$, $s > 0$. При этом справедливо соотношение*

$$\|R(A_1, \gamma_1) - R(A_1^s, \gamma_1)\|_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.1)$$

Доказательство. Полуюсь $(-\infty, \gamma_1]$, $\gamma_1 < \gamma - \|V\|$, свободна от спектров $\sigma(A_1^s)$, $s > 0$, в силу неравенства $\|V_s\| \leq \|V\|$. Далее, из условия (0.10) вытекает, что

$$\|R(A_0, z)(V - V_s)R(A_0, z)\|_{\mathfrak{S}_1} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty, \quad z \in \varrho(A_0). \quad (2.2)$$

Соотношение (2.1) следует из (2.2) и резольвентного тождества. $\square$

Доказательство теоремы 0.6. Поскольку (см. [5]) функция спектрального сдвига $\xi(A_0 + V, A_0, \cdot)$ непрерывна в L_1 -норме относительно изменений оператора V в $\mathfrak{S}_1$ -норме, из (2.1) вытекает, что

$$\|\xi(R(A_1^s, \gamma_1), R(A_0, \gamma_1), \cdot) - \xi(R(A_1, \gamma_1), R(A_0, \gamma_1), \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.3)$$

Из (0.12) и (2.3) следует соотношение $\|\xi(A_1^s, A_0, \cdot) - \xi(A_1, A_0, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}, (1+\lambda^2)^{-1})} \rightarrow 0$, $s \rightarrow +\infty$. Теперь правое неравенство в (0.13) получается предельным переходом при $s \rightarrow +\infty$ в неравенстве

$$\int_{\gamma}^{\lambda} f(\mu) \xi(A_1^s, A_0, \mu) d\mu \leq \int_{\gamma}^{\lambda} f(\mu) \operatorname{Tr}(E_{A_0}(d\mu) V_s E_{A_0}^{\lambda}). \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) справедливо в силу теоремы 0.2. Переход к пределу справа в (2.4) тривиален ввиду равенства $E_{A_0}(d\mu) V_s E_{A_0}^{\lambda} = E_{A_0}(d\mu) V E_{A_0}^{\lambda}$, $s > \lambda$. $\square$

Заключительный комментарий

Как уже отмечалось, основным результатом работы является оценка (0.17). Отметим, что эта оценка получена прямыми (теоретико-операторными) методами. Точность этой оценки подтверждена асимптотикой (1.9) при $t \rightarrow +0$. Ясно, что асимптотика (1.9) определяется асимптотикой параболической функции Грина при $t \rightarrow +0$. Мы обошлись без исследования такого рода асимптотики. Асимптотика тепловых ядер исследовалась во многих работах. Отметим здесь, прежде всего, работу [9], где указан путь для получения полного разложения для теплового ядра на диагонали при $t \rightarrow +0$. Выяснено, что соответствующие коэффициенты разложения определяются асимптотикой при больших значениях энергии для функции Грина оператора Шрёдингера (по этому поводу см. пионерскую работу [10]). Асимптотика теплового ядра на диагонали обсуждается также в [2] и [11]. В работах [9], [1] асимптотика тепловых ядер получена с помощью аппарата континуальных интегралов. Отметим, что в нашем случае возмущение V принадлежит $L_1 \cap L_{\infty}$. В этих условиях асимптотика (1.9),

по-видимому, раньше не была обоснована. Представляется, что аппарат континуальных интегралов не приспособлен для такого рода возмущений генераторов полугрупп.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. А. Степин, *Асимптотика интегрального ядра и регуляризованный след диффузионной полугруппы* (готовится к печати).
- [2] Y. Colin de Verdière, *Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **14**:1 (1981), 27–39.
- [3] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Замечания о функции спектрального сдвига*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 33–46.
- [4] И. М. Лифшиц, *Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой*, УМН, **7**:1 (1952), 171–180.
- [5] М. Г. Крейн, *О формуле следов в теории возмущений*, Матем. сб., **33**:3 (1953), 597–626.
- [6] М. Г. Крейн, *Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов*, Докл. АН СССР, **144**:2 (1962), 268–271.
- [7] М. Г. Крейн, *О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов*, в сб.: «Первая летняя матем. школа», I, Киев, 1964.
- [8] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, Изд-во Санкт-Петербургск. ун-та, СПб, 1994.
- [9] В. С. Буслаев, *Континуальные интегралы и асимптотика решений параболических уравнений при $t \rightarrow 0$. Приложения к дифракции*, Проблемы матем. физ., **2** (1967), 65–107.
- [10] В. С. Буслаев, *Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве*, Проблемы матем. физ., **1** (1966), 82–101.
- [11] Y. Kannai, *Offdiagonal short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations*, Commun. Partial Differ. Equations, **2**:8 (1977), 781–830.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: vsloushch@list.ru

Поступило в редакцию
18 февраля 2009 г.