Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Мазья, М. Митря, Т. О. Шапошникова,
Неоднородная задача Дирихле для системы Стокса
в липшицевой области с единичной нормалью,
близкой к VMO, *Функци. анализ и его прил.*, 2009,
том 43, выпуск 3, 65–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:12:27

УДК 517.956.223+517.518.23

Неоднородная задача Дирихле для системы Стокса в липшицевой области с единичной нормалью, близкой к VMO *

© 2009. В. МАЗЬЯ, М. МИТРЯ, Т. ШАПОШНИКОВА

Посвящается памяти С. Г. Михлина

Цель этой работы — исследование неоднородной задачи Дирихле для системы Стокса в липшицевой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Основной результат — корректность такой задачи в пространствах Бесова–Лизоркина–Трибеля при условии, что единичная нормаль ν к Ω имеет малое среднее колебание.

§1. Введение

Цель этой статьи — доказательство корректности неоднородной задачи Дирихле для системы Стокса линеаризованной гидростатики в произвольной ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, когда решения и данные задачи принадлежат пространствам Бесова:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} - \nabla \pi &= \vec{f} \in B_{s+1/p-2}^{p,q}(\Omega), \quad \operatorname{div} \vec{u} = g \in B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \\ \vec{u} &\in B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega), \quad \pi \in B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad \operatorname{Tr} \vec{u} = \vec{h} \in B_s^{p,q}(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Как обычно, $\vec{u}$ обозначает векторное поле скоростей, а π — давление. В предположении, что единичная внешняя нормаль ν к Ω имеет достаточно малое среднее колебание, где малость определяется параметрами p , q , s и константой Липшица границы $\partial\Omega$, показано, что задача (1.1) однозначно разрешима, если данные удовлетворяют некоторым необходимым условиям согласования. Рассмотрен также случай пространств Лизоркина–Трибеля вместо пространств Бесова. Точнее, справедливо следующее утверждение (обозначения, определения и вспомогательный материал см. в §2).

Теорема 1.1. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с произвольной топологией. Пусть ν — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$ и σ — мера на $\partial\Omega$. Предположим, что

$$(n-1)/n < p \leq \infty, \quad 0 < q \leq \infty \quad \text{и} \quad (n-1)(1/p-1)_+ < s < 1, \quad (1.2)$$

где $(a)_+ := \max\{a, 0\}$. Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для системы Стокса (1.1), подчиненную (необходимому) условию согласования

$$\int_{\partial\sigma} \langle \nu, \vec{h} \rangle d\sigma = \int_{\sigma} g(X) dX \quad \text{для любой связной компоненты } \sigma \text{ в } \Omega. \quad (1.3)$$

* Исследования авторов были выполнены при частичной поддержке NSF.

Тогда существует число $\delta > 0$, зависящее только от константы Липшица области Ω и показателя p и такое, что при выполнении условия

$$\{\nu\}_{\text{Osc}(\partial\Omega)} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{B_\varepsilon} \int_{B_\varepsilon \cap \partial\Omega} \int_{B_\varepsilon \cap \partial\Omega} |\nu(X) - \nu(Y)| d\sigma(X) d\sigma(Y) \right) < \delta, \quad (1.4)$$

где верхняя грань берется по всевозможным шарам B_ε с центром на $\partial\Omega$ и радиусом $\leq \varepsilon$, задача (1.1) корректна (с единственностью по модулю локально постоянного давления в Ω). В частном случае, когда $\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega)$, условие (1.4) заведомо выполнено. Кроме того, решение допускает интегральное представление в терминах гидростатических потенциалов и удовлетворяет обычным оценкам. А именно, существует положительная постоянная $C = C(\Omega, p, q, s, n)$, такая, что

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega)} + \inf_c \|\pi - c\|_{B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega)} \\ \leq C \|\vec{f}\|_{B_{s+1/p-2}^{p,q}(\Omega)} + C \|g\|_{B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega)} + C \|\vec{h}\|_{B_s^{p,q}(\partial\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где нижняя грань берется по всем локально постоянным функциям c в Ω .

Аналогичные результаты о корректности верны в шкале пространств Лизоркина–Трибеля, т. е. для задачи

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} - \nabla \pi = \vec{f} \in F_{s+1/p-2}^{p,q}(\Omega), \quad \text{div } \vec{u} = g \in F_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \\ \vec{u} \in F_{s+1/p}^{p,q}(\Omega), \quad \pi \in F_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad \text{Tr } \vec{u} = \vec{g} \in B_s^{p,p}(\partial\Omega), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где данные снова подчинены условию (1.3). На этот раз, в дополнение к условиям, наложенным на p и q , предполагается, что $p, q < \infty$.

Фигурирующие выше пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля $A_s^{p,q}(\Omega)$, $A \in \{B, F\}$, определяются как сужения на открытое множество Ω (умеренных) обобщенных функций из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$ (см. Хёрмандер [24]). Далее, $B_s^{p,q}(\partial\Omega)$ — пространство Бесова на липшицевом многообразии $\partial\Omega$, полученное из $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})$ стандартным образом (при помощи разбиения единицы и отображений в $\mathbb{R}^{n-1}$). Следует иметь в виду, что мы используем одинаковые обозначения для этих пространств скалярных функций и для соответствующих пространств векторнозначных функций. Заметим, что условия (1.2) описывают самую широкую область значений p, q, s , для которых пространства $B_s^{p,q}(\partial\Omega)$ могут быть разумно определены на липшицевом многообразии $\partial\Omega$.

Необходимо сделать несколько замечаний о характере нашего основного результата. Во-первых, на липшицеву область Ω никаких топологических ограничений не накладывается (в частности, граница может быть несвязной). Это важно, так как наш подход основан на граничных потенциалах, обратимость которых напрямую зависит от топологической природы области. Мы преодолеваем эту сложность, рассматривая подходящую комбинацию потенциалов. Во-вторых, соответствующие варианты сформулированных выше результатов справедливы для неограниченных липшицевых областей с компактными границами, для которых выполнено условие (1.4), а также для краевой задачи Неймана. В-третьих, можно показать, что на самом деле $\{\nu\}_{\text{Osc}(\partial\Omega)} \approx \text{dist}(\nu, \text{VMO}(\partial\Omega))$,

где расстояние берется в $\text{ВМО}(\partial\Omega)$. Тогда условие (1.4) становится эквивалентным условию

$$\text{dist}(\nu, \text{ВМО}(\partial\Omega)) < \delta, \quad (1.7)$$

где расстояние измеряется в $\text{ВМО}(\partial\Omega)$. В-четвертых, поверхности коразмерности один в $\mathbb{R}^n$, единичная нормаль к которым имеет малую ВМО -норму, были исследованы Сэмсом [51] с точки зрения геометрической теории меры, тогда как в контексте уравнений в частных производных класс липшицевых областей, для которых выполнено условие малости (1.4), был впервые введен Мазьей, Митрей и Шапошниковой в [42] (где авторы установили корректность неоднородных задач Дирихле для эллиптических систем высокого порядка с ограниченными комплекснозначными коэффициентами). Эллиптические уравнения в частных производных (с граничными данными из L^p и с оценками нетангенциальной максимальной функции для решений) в классе (двусторонних) НТА -областей (в смысле Джерисона и Кенига [26]), удовлетворяющих условию Альфорса регулярности границы и подчиняющихся условию (1.7) (при δ , зависящем от p и естественных геометрических характеристик области), были недавно изучены Хофманом, Митрей и Тейлором [25].

Задача, к которой мы обращаемся в этой работе, имеет долгую историю и обширный список публикаций. Для достаточно гладких $\partial\Omega$ различные случаи (в основном соответствующие пространствам Соболева целочисленной гладкости) изучались Солонниковым [55], Каттабрига [10], Темамом [58], Гига [23], Фарнхорном [59], Дотрэ и Лионсом [18] и др., когда $\partial\Omega$ — по крайней мере класса C^2 . Полученные результаты были перенесены на $\partial\Omega \in C^{1,1}$ Амрушем и Жиро [6], а затем на липшицевы $\partial\Omega$ с малой константой Липшица Гальди, Симадером и Зором [21]. Существует также большое число результатов, связанных с теоремой 1.1, в случае, когда Ω — плоская полигональная область или трехмерный многогранник. Исчерпывающий обзор этой области исследования можно найти в книге Козлова, Мазьи и Росмана [36], содержащей также ссылки на более ранние работы. Упомянем также недавнюю статью Мазьи и Росмана [43].

Для ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, как задача Дирихле, так и задача регулярности с L^p -оценками нетангенциальной максимальной функции решения, были решены при малых $|p - 2|$ Фейбсом, Кенигом и Верховой в [20], а при $n = 3$ и $2 - \varepsilon < p < \infty$ Шеном в [53]. Результаты последней работы были перенесены на случай высоких размерностей Килти [32]. Недавно однородная и неоднородная задачи для системы Стокса с граничными условиями Дирихле, Неймана или условиями сопряжения в произвольных липшицевых областях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, были изучены Митрей и Райтом [48]. Чтобы описать ту часть их работы, которая относится к неоднородной задаче Дирихле, для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ и $n \geq 2$ рассмотрим двумерную область $\mathcal{R}_{n,\varepsilon}$ на $(s, 1/p)$ -плоскости, зависящую от размерности, как указано на приведенных ниже рисунках.

В [48] показано, что для любой ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, существует $\varepsilon = \varepsilon(\Omega) \in (0, 1]$, такое, что задача (1.1) (подчиненная условиям согласования (1.3)) корректна, если $0 < q \leq \infty$ и пара $(s, 1/p)$ принадлежит области $\mathcal{R}_{n,\varepsilon}$, изображенной на этих рисунках. Аналогичный результат справедлив для задачи (1.6) при $p, q < \infty$. Более ранние результаты

того же типа получены Брауном и Шеном для трехмерных липшицевых областей в [9]. Липшицевы подобласти и C^1 -подобласти римановых многообразий рассматривались в статьях Диндоша и Митри [19] и Митри и Тейлора [47].

Примеры областей, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1:

- (1) Области класса C^1 и, более общим образом, области, границы которых локально являются графиками липшицевых функций с градиентами из $ВМО$.
- (2) Области, границы которых локально являются графиками липшицевых функций с градиентами, достаточно близкими, в зависимости от значений показателя p , к $ВМО$, в частности, имеющими малую $ВМО$ -норму.
- (3) Липшицевы области с достаточно малой, в зависимости от значений показателя p , константой Липшица.
- (4) Области типа липшицевых полиэдров с многогранными углами, достаточно близкими, в зависимости от значений показателя p , к π .
- (5) Многоугольные области с углами, достаточно близкими, в зависимости от значений показателя p , к π .

Пример (5) интерпретируется следующим образом. Пусть $p \in ((n-1)/n, \infty)$. Существует малая постоянная $c > 0$, зависящая от p и константы Липшица рассматриваемой многогранной области, в которой углы отличаются от π не больше чем на величину c , такая, что неоднородная задача Дирихле (1.1), удовлетворяющая (необходимым) условиям согласования (1.3), корректно поставлена в этой многоугольной области. Примечательно, что важным оказывается только показатель p , а не q и s (ср. с [42]). Аналогично интерпретируются примеры (2)–(4). В случае примера (1) упомянутая задача Дирихле разрешима во всей области значений показателей p , q , s , для которых можно определять пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля на липшицевых областях. Для областей типа (5) наш результат соответствует прогнозам теории краевых задач для многогранников (где конкретные вычисления можно провести с помощью техники преобразования Меллина).

Упомянем еще, что при p , близких к 2, никаких ограничений на размер колебания единичной внешней нормали не требуется (т.е. при малом $|p - 2|$ и $0 < q \leq \infty$, $0 < s < 1$ упомянутая выше корректность краевой задачи имеет место для любой липшицевой области). Это вытекает из работы [20] Фейбса, Кенига и Верхоты, согласно которой как задача Дирихле, так и задача регулярности для системы Стокса в произвольной липшицевой области разрешимы

(и справедливы L^p -оценки нетангенциальной максимальной функции) при p , близких к 2. Применяя другой подход, основанный на некоторых оценках, полученных Саваре в [50], и недавних результатах Н. Я. Шнейберга об устойчивой интерполяции, Агранович в [2]–[5] получил целый ряд результатов при малом $|p - 2|$ и $0 < s < 1$, относящихся к общим сильно эллиптическим системам с эрмитовым главным символом в произвольных липшицевых областях. Результаты Аграновича относятся также к целому ряду других важных тем, таких, как оценки резольвент в спектральных задачах, нестационарные задачи и задачи сопряжения.

Отметим также, что одной из примечательных черт данной работы является рассмотрение значений p , меньших 1. Это важно потому, что в отличие от шкалы обычных пространств Соболева, где p принадлежит $[1, \infty]$, шкала пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля имеет смысл и при $p < 1$. Например, пространства Лизоркина–Трибеля с $p \leq 1$, $q = 2$ и с нулевой гладкостью соответствуют пространствам Харди. Это существенно, потому что, например, Стейн и его соавторы рассматривали в [11]–[13] неоднородную задачу Дирихле для оператора Лапласа в гладких областях с данными из пространств Харди. Они высказали предположение, что требования гладкости области можно существенно ослабить (в зависимости от того, насколько p меньше 1). Наш основной результат, в частности, подтверждает эту гипотезу (в случае систем Стокса) в том смысле, что неоднородная задача Дирихле для системы Стокса в липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с данными f из пространства Харди $H^p(\Omega) = F_0^{p,2}(\Omega)$ корректна, если $(n - 1)/n < p \leq 1$ и единичная внешняя нормаль ν к Ω принадлежит $VMO(\partial\Omega)$.

В заключение упомянем, что близкие по своей природе результаты для оператора Лапласа были получены в [27], [45], [46], [60].

§2. Вспомогательный материал

Под специальной липшицевой областью в смысле Стейна [56] мы будем понимать надграфик липшицевой функции $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Ограниченная область Ω в $\mathbb{R}^n$ называется липшицевой, если существует такой конечный набор $\{\mathcal{O}_j\}_{1 \leq j \leq N}$ открытых множеств, покрывающих $\partial\Omega$, что для любого $j \in \{1, \dots, N\}$ множество $\mathcal{O}_j \cap \Omega$ совпадает с частью множества $\mathcal{O}_j$, лежащей над графиком липшицевой функции $\varphi_j: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ — новая система координат, полученная из исходной сдвигами и поворотами. Определим *липшицеву константу* ограниченной липшицевой области как

$$\inf(\max\{\|\nabla\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} : 1 \leq j \leq N\}), \quad (2.1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным семействам $\{\varphi_j\}_{1 \leq j \leq N}$, введенным выше. Известно, что для липшицевой области Ω поверхностная мера $d\sigma$ корректно определена на $\partial\Omega$ и что внешняя нормаль $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ определена почти всюду на $\partial\Omega$. Для любого $p \in (0, \infty]$ через $L^p(\partial\Omega)$ обозначим пространство σ -измеримых по Лебегу функций, суммируемых со степенью p на $\partial\Omega$.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — липшицева область. Рассмотрим тангенциальную производную первого порядка $\partial_{\tau_{jk}}$ как оператор, действующий на функции

ψ класса C^1 с компактным носителем в окрестности границы $\partial\Omega$ по формуле

$$\partial_{\tau_{jk}}\psi := \nu_j(\partial_k\psi)|_{\partial\Omega} - \nu_k(\partial_j\psi)|_{\partial\Omega}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Интегрируя по частям, при любых $j, k \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\partial_{\tau_{jk}}\psi) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\partial_{\tau_{kj}}\varphi)\psi d\sigma \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — липшицева область, и пусть $1 < p, p' < \infty$ удовлетворяют равенству $1/p + 1/p' = 1$. Основываясь на (2.3), определим порожденное L^p пространство Соболева первого порядка на $\partial\Omega$:

$$L_1^p(\partial\Omega) := \left\{ f \in L^p(\partial\Omega) : \text{существует константа } c > 0, \text{ такая, что для } \psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \right. \\ \left. \text{имеет место оценка } \left| \int_{\partial\Omega} f(\partial_{\tau_{jk}}\psi) d\sigma \right| \leq c \|\psi\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}, j, k = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.4)$$

По теореме Рисса, если $f \in L_1^p(\partial\Omega)$, то для любых $j, k \in \{1, \dots, n\}$ существует функция $g_{jk} \in L^p(\partial\Omega)$, такая, что

$$\int_{\partial\Omega} f(\partial_{\tau_{jk}}\psi) d\sigma = \int_{\partial\Omega} g_{jk}\psi d\sigma \quad \forall \psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \quad (2.5)$$

Положим теперь $\partial_{\tau_{kj}}f := g_{jk}$. Тогда для липшицевой области Ω в $\mathbb{R}^n$ операторы $\partial_{\tau_{kj}} : L_1^p(\partial\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, $1 \leq j, k \leq n$, определены и ограничены. Кроме того, для любых $f \in L_1^p(\partial\Omega)$ и $g \in L_1^{p'}(\partial\Omega)$, где $1 < p, p' < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_{\tau_{jk}}f)g d\sigma = \int_{\partial\Omega} f(\partial_{\tau_{kj}}g) d\sigma, \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_1^p(\partial\Omega)} := \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} + \sum_{j,k=1}^n \|\partial_{\tau_{jk}}f\|_{L^p(\partial\Omega)}, \quad (2.7)$$

$L_1^p(\partial\Omega)$ становится банаховым пространством. Из (2.2) и плотности вложения

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\partial\Omega} \hookrightarrow L_1^p(\partial\Omega) \quad (2.8)$$

при любых $1 < p < \infty$ (доказательство см. в [44]) легко следует, что для липшицевой области Ω в $\mathbb{R}^n$ при $1 < p < \infty$ и $f \in L_1^p(\partial\Omega)$ равенства

$$\partial_{\tau_{jk}}f = \nu_j(\nabla_{\tan}f)_k - \nu_k(\nabla_{\tan}f)_j, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

имеют место почти везде по мере σ на $\partial\Omega$, где

$$\nabla_{\tan}f := \left(\sum_{k=1}^n \nu_k \partial_{\tau_{kj}}f \right)_{1 \leq j \leq n}, \quad f \in L_1^p(\partial\Omega). \quad (2.10)$$

Заметим, что при всех $p \in (1, \infty)$ из (2.9) и (2.10) следует эквивалентность

$$\|f\|_{L_1^p(\partial\Omega)} \approx \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|\nabla_{\tan}f\|_{L^p(\partial\Omega)}, \quad (2.11)$$

равномерная по $f \in L_1^p(\partial\Omega)$.

Далее, пусть Ω — липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем достаточно большую постоянную $\kappa > 0$. Определим нетангенциальный максимальный оператор как отображение, переводящее функцию $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в функцию $M(u): \partial\Omega \rightarrow [0, \infty]$, заданную при $X \in \partial\Omega$ равенством

$$M(u)(X) := \sup\{|u(Y)| : Y \in \Omega, |X - Y| < (1 + \kappa) \text{dist}(Y, \partial\Omega)\}. \quad (2.12)$$

Введем также нетангенциальное сужение функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ на границу формулой

$$u|_{\partial\Omega}(X) := \lim_{\substack{\Omega \ni Y \rightarrow X \\ |X - Y| < (1 + \kappa) \text{dist}(Y, \partial\Omega)}} u(Y), \quad X \in \partial\Omega, \quad (2.13)$$

если указанный предел существует.

Несколько отклонимся в сторону, чтобы напомнить определение пространства VMO на границе ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для измеримого подмножества $S \subseteq \partial\Omega$ положим

$$\int_S f(Y) d\sigma(Y) := \frac{1}{|S|} \int_S f(Y) d\sigma(Y), \quad \text{где } |S| := \sigma(S). \quad (2.14)$$

Назовем Δ_r поверхностным шаром радиуса $r > 0$, если существует точка $X \in \partial\Omega$, такая, что $\Delta_r := \partial\Omega \cap B(X, r)$. Для некоторого $\eta \in (0, \text{diam}(\partial\Omega))$ пространство Джона–Ниренберга функций с ограниченными средними колебаниями на $\partial\Omega$ определяют следующим образом:

$$f \in \text{BMO}(\partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in L^2(\partial\Omega) \quad \text{и} \quad \sup_{\Delta_r, r \leq \eta} \int_{\Delta_r} |f - f_{\Delta_r}| d\sigma < \infty \quad (2.15)$$

где $f_{\Delta_r} := \int_{\Delta_r} f d\sigma$, и снабжают естественной нормой

$$\|f\|_{\text{BMO}(\partial\Omega)} := \|f\|_{L^2(\partial\Omega)} + \sup_{\Delta_r, r \leq \eta} \int_{\Delta_r} |f - f_{\Delta_r}| d\sigma. \quad (2.16)$$

Пространство Сарасона функций с исчезающими средними колебаниями на $\partial\Omega$ вводится условиями

$$f \in \text{VMO}(\partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \text{BMO}(\partial\Omega) \quad \text{и} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \sup_{\Delta_r, r \leq R} \int_{\Delta_r} |f - f_{\Delta_r}| d\sigma = 0. \quad (2.17)$$

Через $\mathcal{D}'(\Omega)$ обозначим пространство обобщенных функций на Ω , где Ω — липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Через $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $F_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать стандартные пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля в $\mathbb{R}^n$. Этим пространствам посвящены многочисленные публикации, и мы отсылаем читателя к монографиям Берга и Лёфстрема [8] и Трибеля [57]. При $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\begin{aligned} B_\alpha^{p,q}(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \exists \text{ функция } v \in B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n), \text{ такая, что } v|_\Omega = u\}, \\ F_\alpha^{p,q}(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \exists \text{ функция } v \in F_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n), \text{ такая, что } v|_\Omega = u\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Допустим, что параметры p, q, s удовлетворяют условиям (1.2) и что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — надграфик липшицевой функции $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим $B_s^{p,q}(\partial\Omega)$ как пространство функций f , локально интегрируемых на $\partial\Omega$ и таких, что отображение $\mathbb{R}^{n-1} \ni x' \mapsto f(x', \varphi(x'))$ принадлежит $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})$. Норму в $B_s^{p,q}(\partial\Omega)$ зададим равенством

$$\|f\|_{B_s^{p,q}(\partial\Omega)} := \|f(\cdot, \varphi(\cdot))\|_{B_s^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (2.19)$$

Известно, что случай $p = q = \infty$ соответствует обычным неоднородным пространствам Гёльдера $C^s(\partial\Omega)$.

Аналогично вводятся пространства Бесова отрицательной гладкости, а именно

$$f \in B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \iff f(\cdot, \varphi(\cdot))\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\cdot)|^2} \in B_{s-1}^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad (2.20)$$

$$\|f\|_{B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega)} := \|f(\cdot, \varphi(\cdot))\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\cdot)|^2}\|_{B_{s-1}^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (2.21)$$

Приведенные определения переносятся на случай ограниченной липшицевой области в $\mathbb{R}^n$ стандартным образом с помощью разбиения единицы. Введенная таким образом шкала пространств Бесова на $\partial\Omega$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам этих пространств в евклидовой ситуации. Напомним некоторые из этих свойств.

Предложение 2.1. При $(n-1)/n < p \leq \infty$ и $(n-1)(1/p-1)_+ < s < 1$

$$\|f\|_{B_s^{p,p}(\partial\Omega)} \approx \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(X) - f(Y)|^p}{|X - Y|^{n-1+sp}} d\sigma(X) d\sigma(Y) \right)^{1/p}. \quad (2.22)$$

(Напомним, что $(a)_+ = \max\{a, 0\}$, где $a \in \mathbb{R}$.)

Доказательство приведено в [41].

Ниже нам понадобится следующий результат, касающийся интерполяции. В его формулировке через $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ обозначены интерполяционные скобки вещественной интерполяции. Позже для скобок при комплексной интерполяции мы также воспользуемся обозначением $[\cdot, \cdot]_\theta$.

Предложение 2.2. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$(L^p(\partial\Omega), L_1^p(\partial\Omega))_{\theta,q} = B_{\theta}^{p,q}(\partial\Omega), \quad (2.23)$$

где $1 < p, q < \infty$ и $0 < \theta < 1$.

В случае $p = q$ доказательство равенства (2.23) дано на с. 200 в [27], но это ограничение несущественно. Следующая теорема о следах доказана в [40] и [41] (близкие результаты для случая более общих областей, но при более жестких ограничениях на p, q, n, s можно найти в [28]).

Теорема 2.3. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, и пусть p и s удовлетворяют неравенствам $(n-1)/n < p \leq \infty$ и $(n-1)(1/p-1)_+ < s < 1$. Тогда

(i) сужение на границу продолжается до линейного ограниченного оператора

$$\text{Tr}: B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega) \rightarrow B_s^{p,q}(\partial\Omega), \quad 0 < q \leq \infty; \quad (2.24)$$

кроме того, этот оператор сюръективен и обладает ограниченным правым обратным оператором;

(ii) аналогичное утверждение справедливо для оператора $\text{Tr}: F_{s+1/p}^{p,q}(\Omega) \rightarrow B_s^{p,p}(\partial\Omega)$, где полагают $q = \infty$, если $p = \infty$; точнее, это ограниченный оператор, имеющий линейный ограниченный правый обратный.

Будем по-прежнему предполагать, что $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — произвольная липшицева область. После введения поверхностной меры и евклидова расстояния

граница $\partial\Omega$ становится пространством однородного типа в смысле Койфмана–Вейса [15]. Поэтому при $(n-1)/n < p \leq 1$ можно ввести атомное пространство Харди $h_{\text{at}}^p(\partial\Omega)$, а также пространство Харди–Соболева первого порядка $h_{\text{at}}^{1,p}(\partial\Omega)$. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} H^p(\partial\Omega) &:= \begin{cases} h_{\text{at}}^p(\partial\Omega) & \text{при } (n-1)/n < p \leq 1, \\ L^p(\partial\Omega) & \text{при } p > 1, \end{cases} \\ H_1^p(\partial\Omega) &:= \begin{cases} h_{\text{at}}^{1,p}(\partial\Omega) & \text{при } (n-1)/n < p \leq 1, \\ L_1^p(\partial\Omega) & \text{при } p > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.25)$$

§3. Приложение теории сингулярных интегральных операторов Михлина–Кальдерона–Зигмунда к системе Стокса

В этом параграфе мы изучим природу сингулярных интегральных операторов в теории поверхностных потенциалов, наиболее естественно возникающих при рассмотрении системы Стокса в липшицевых областях.

3.1. Билинейные формы и производные по конормали. При фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$ положим $a_{jk}^{\alpha\beta}(\lambda) := \delta_{jk}\delta_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{j\beta}\delta_{k\alpha}$, где $1 \leq j, k, \alpha, \beta \leq n$ и принято обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Рассмотрим дифференциальный оператор L_λ , заданный равенствами

$$(L_\lambda \vec{u})_\alpha := \partial_j (a_{jk}^{\alpha\beta}(\lambda) \partial_k u_\beta) = \Delta u_\alpha + \lambda \partial_\alpha (\operatorname{div} \vec{u}), \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (3.1)$$

Введем линейный дифференциальный оператор первого порядка $Du := (\partial_k u_\beta)_{1 \leq k, \beta \leq n}$, где $u = (u_\beta)_{1 \leq \beta \leq n}$, и линейный оператор нулевого порядка $Au := (a_{jk}^{\alpha\beta}(\lambda) v_{k\beta})_{1 \leq j, \alpha \leq n}$, где $v = (v_{k\beta})_{1 \leq k, \alpha \leq n}$. Тогда $D^*v = -(\partial_k v_{k\beta})_{1 \leq \beta \leq n}$ и, следовательно,

$$L_\lambda u = -D^* A D u = (\partial_j (a_{jk}^{\alpha\beta}(\lambda) \partial_k u_\beta))_{1 \leq \alpha \leq n}. \quad (3.2)$$

Выбор λ непосредственно влияет на выражение для производной по конормали для системы Стокса, которую мы определяем следующим образом:

$$\partial_\nu^\lambda(\vec{u}, \pi) := (\nu_j a_{jk}^{\alpha\beta}(\lambda) \partial_k u_\beta - \nu_\alpha \pi)_{1 \leq \alpha \leq n} = [(\nabla \vec{u})^\top + \lambda(\nabla \vec{u})] \nu - \pi \nu \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

где $\nabla \vec{u} = (\partial_k u_j)_{1 \leq j, k \leq n}$ — якобиева матрица векторнозначной функции $\vec{u}$, а $^\top$ обозначает транспонирование матрицы. Чуть ниже мы увидим, что алгебраическое выражение производной по конормали влияет на функционально-аналитические свойства потенциала двойного слоя.

3.2. Гидростатические потенциалы. Продолжим обзор вспомогательно-го материала, напомним определения и основные свойства поверхностных потенциалов для системы Стокса в произвольной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Через ω_{n-1} обозначим лебегову меру единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, а через $E(X) = (E_{jk}(X))_{1 \leq j, k \leq n}$ — матрицу Кельвина фундаментальных решений системы Стокса, где

$$E_{jk}(X) := -\frac{1}{2\omega_{n-1}} \left(\frac{1}{n-2} \frac{\delta_{jk}}{|X|^{n-2}} + \frac{x_j x_k}{|X|^n} \right), \quad X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (3.4)$$

при $n \geq 3$. При $n = 2$ следует заменить $\frac{1}{n-2} \frac{\delta_{jk}}{|X|^{n-2}}$ на $\log |X|$. Введем еще вектор давления

$$\vec{q}(X) = (q_j(X))_{1 \leq j \leq n} := -\frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{X}{|X|^n}, \quad X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (3.5)$$

Тогда для $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\partial_k E_{jk}(X) = 0 \text{ при } 1 \leq j \leq n \text{ и } \partial_j E_{jk}(X) = 0 \text{ при } 1 \leq k \leq n, \quad (3.6)$$

$$\Delta E_{jk}(X) = \Delta E_{kj}(X) = \partial_k q_j(X) = \partial_j q_k(X) \text{ при } 1 \leq j, k \leq n. \quad (3.7)$$

Зафиксируем $-1 < \lambda \leq 1$ и определим потенциалы простого слоя $\mathcal{S}$ и двойного слоя $\mathcal{D}_\lambda$ равенствами

$$\mathcal{S}\vec{f}(X) := \int_{\partial\Omega} E(X-Y)\vec{f}(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{D}_\lambda\vec{f}(X) := \int_{\partial\Omega} [\partial_{\nu(Y)}^\lambda \{E, \vec{q}\}(Y-X)]^\top \vec{f}(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.9)$$

где $\partial_{\nu(Y)}^\lambda \{E, \vec{q}\}$ — матрица, полученная применением ∂_ν^λ по переменной Y к каждой паре, состоящей из j -го столбца матрицы E и j -й компоненты вектора $\vec{q}$, а именно,

$$\begin{aligned} (\partial_{\nu(Y)}^\lambda \{E, \vec{q}\}(Y-X))_{jk} &:= \nu_\alpha(Y)(\partial_\alpha E_{kj})(Y-X) \\ &\quad + \lambda \nu_\alpha(Y)(\partial_k E_{\alpha j})(Y-X) - q_j(Y-X)\nu_k(Y). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Соответствующие потенциалы для давления задаются формулами

$$\mathcal{Q}\vec{f}(X) := \int_{\partial\Omega} \langle \vec{q}(X-Y), \vec{f}(Y) \rangle d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{P}_\lambda\vec{f}(X) := (1+\lambda) \int_{\partial\Omega} \nu_j(Y) \langle (\partial_j \vec{q})(Y-X), \vec{f}(Y) \rangle d\sigma(Y), \quad X \in \Omega. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\Delta \mathcal{S}\vec{f} - \nabla \mathcal{Q}\vec{f} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathcal{S}\vec{f} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.13)$$

и при любом $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Delta \mathcal{D}_\lambda\vec{f} - \nabla \mathcal{P}_\lambda\vec{f} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathcal{D}_\lambda\vec{f} = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (3.14)$$

Рассмотрим фундаментальное решение для лапласиана в $\mathbb{R}^n$

$$E_\Delta(X) := -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|X|^{n-2}}, \quad X \neq 0, \quad (3.15)$$

при $n \geq 3$ (с обычной модификацией при $n = 2$) и соответствующие гармонические потенциалы простого и двойного слоя

$$\mathcal{S}_\Delta f(X) := \int_{\partial\Omega} E_\Delta(X-Y)f(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{D}_\Delta f(X) := \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu(Y)} E_\Delta(X-Y)f(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega. \quad (3.17)$$

Тогда $\vec{q} = -\nabla E_\Delta$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и, следовательно,

$$\mathcal{Q}\vec{f} = -\sum_{k=1}^n \partial_k(\mathcal{S}_\Delta f_k) = -\operatorname{div} \mathcal{S}_\Delta \vec{f} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_\lambda \vec{f} = (1 + \lambda) \operatorname{div} \mathcal{Q}_\Delta \vec{f}. \quad (3.18)$$

Приведем основные результаты из теории сингулярных интегральных операторов типа Михлина–Кальдерона–Зигмунда на липшицевых областях. В настоящем виде они установлены в [45], вслед за работами [14] и [60].

Предложение 3.1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольная липшицева область. Существует целое положительно число $N = N(n)$, такое, что для любой фиксированной функции $k \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, подчиненной условиям

$$k(-X) = -k(X) \quad \text{и} \quad k(\lambda X) = \lambda^{-(n-1)} k(X) \quad \forall \lambda > 0, \quad (3.19)$$

сингулярный интегральный оператор

$$\mathcal{T}f(X) := \int_{\partial\Omega} k(X - Y) f(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.20)$$

удовлетворяет оценке

$$\|M(\mathcal{T}f)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|k|_{S^{n-1}}\|_{C^N} \|f\|_{H^p(\partial\Omega)} \quad (3.21)$$

при любом $p \in ((n-1)/n, \infty)$ с константой $C = C(p, n, \partial\Omega) > 0$. Кроме того, при любых $p \in (1, \infty)$ и $f \in L^p(\partial\Omega)$ почти везде на $\partial\Omega$ существует предел

$$Tf(X) := \text{p. v.} \int_{\partial\Omega} k(X - Y) f(Y) d\sigma(Y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\substack{Y \in \partial\Omega \\ |X - Y| > \varepsilon}} k(X - Y) f(Y) d\sigma(Y) \quad (3.22)$$

и имеет место формула скачка

$$\mathcal{T}f|_{\partial\Omega}(X) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \mathcal{F}(k)(\nu(X)) f(X) + Tf(X) \quad (3.23)$$

при почти всех $X \in \partial\Omega$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье.

Конкретизируем формулу скачка (3.23) для гидростатических потенциалов.

Предложение 3.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — произвольная липшицева область, и пусть $1 < p < \infty$. Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\vec{f} \in L^p(\partial\Omega)$ при почти всех $X \in \partial\Omega$ справедливы равенства

$$\mathcal{Q}\vec{f}|_{\partial\Omega}(X) = \frac{1}{2} \langle \nu(X), \vec{f}(X) \rangle + \text{p. v.} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{q}(X - Y), \vec{f}(Y) \rangle d\sigma(Y), \quad (3.24)$$

$$\mathcal{Q}_\lambda \vec{f}|_{\partial\Omega}(X) = \left(\frac{1}{2} I + K_\lambda \right) \vec{f}(X), \quad (3.25)$$

где I — тождественный оператор, следы понимаются в смысле равенства (2.13) и

$$K_\lambda \vec{f}(X) := \text{p. v.} \int_{\partial\Omega} [\partial_{\nu(Y)}^\lambda \{E, \vec{q}\}(Y - X)]^\top \vec{f}(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \partial\Omega. \quad (3.26)$$

Доказательство. Пусть m — целое число и P_j — гармонический однородный полином степени $j \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Известно (см., например, с. 73 в [56]), что

$$\mathcal{F}(Q_j)(X) = \frac{P_j(X)}{|X|^{j+n-m}}, \quad (3.27)$$

где

$$Q_j(X) := (-1)^j \gamma_{j,m} \frac{P_j(X)}{|X|^{j+m}}, \quad \gamma_{j,m} := (-1)^{j/2} \pi^{n/2-m} \frac{\Gamma(\frac{j}{2} + \frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{j}{2} + \frac{n}{2} - \frac{m}{2})} \quad (3.28)$$

(Γ — стандартная гамма-функция), при условии, что $0 < m < n$ или $m \in \{0, n\}$ и $j \geq 1$. Отсюда и из (3.23) в результате вычислений получаются следующие формулы следов (где граничные значения понимаются в смысле равенства (2.13)):

$$\partial_j(\mathcal{S}_{\alpha\beta} g)|_{\partial\Omega}(X) = -\frac{1}{2} \nu_j(X)(\delta_{\alpha\beta} - \nu_\alpha(X)\nu_\beta(X))g(X) + \partial_j S_{\alpha\beta} g(X), \quad (3.29)$$

которые справедливы при почти всех $X \in \partial\Omega$ для любых $g \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$. Здесь при любых $\alpha, \beta, j \in \{1, \dots, n\}$ мы пользовались обозначениями

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} g(X) := \int_{\partial\Omega} E_{\alpha\beta}(X - Y)g(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (3.30)$$

$$\partial_j S_{\alpha\beta} g(X) := \text{p. v.} \int_{\partial\Omega} (\partial_j E_{\alpha\beta})(X - Y)g(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \partial\Omega. \quad (3.31)$$

Поскольку в силу (3.10)

$$(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j = -\partial_\alpha \mathcal{S}_{kj}(\nu_\alpha f_k) - \lambda \partial_k \mathcal{S}_{\alpha j}(\nu_\alpha f_k) - \partial_j \mathcal{S}_\Delta(\nu_k f_k) \quad (3.32)$$

для $j \in \{1, \dots, n\}$, из (3.29) и равенства

$$\partial_j \mathcal{S}_\Delta g|_{\partial\Omega}(X) = -\frac{1}{2} \nu_j(X)g(X) + \text{p. v.} \int_{\partial\Omega} (\partial_j E_\Delta)(X - Y)g(Y) d\sigma(Y), \quad (3.33)$$

справедливого при почти всех $X \in \partial\Omega$, вытекает (при граничных значениях, понимаемых в смысле равенства (2.13)), что

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j|_{\partial\Omega} &= \frac{1}{2} \nu_\alpha(\delta_{kj} - \nu_k \nu_j) \nu_\alpha f_k - (\partial_\alpha S_{kj})(\nu_\alpha f_k) + \frac{1}{2} \lambda \nu_k(\delta_{\alpha j} - \nu_\alpha \nu_j) \nu_\alpha f_k \\ &\quad - \lambda(\partial_k S_{\alpha j})(\nu_\alpha f_k) + \frac{1}{2} \nu_j \nu_k f_k - (\partial_j S_\Delta)(\nu_k f_k), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\partial_j S_\Delta$ — сингулярный интегральный оператор, определяемый в смысле главного значения, с ядром $(\partial_j E_\Delta)(X - Y)$. Поскольку

$$\frac{1}{2} \nu_\alpha(\delta_{kj} - \nu_k \nu_j) \nu_\alpha f_k + \frac{1}{2} \lambda \nu_k(\delta_{\alpha j} - \nu_\alpha \nu_j) \nu_\alpha f_k + \frac{1}{2} \nu_j \nu_k f_k = \frac{1}{2} f_j \quad (3.35)$$

и

$$-(\partial_\alpha S_{kj})(\nu_\alpha f_k) - \lambda(\partial_k S_{\alpha j})(\nu_\alpha f_k) - (\partial_j S_\Delta)(\nu_k f_k) = (K_\lambda \vec{f})_j, \quad (3.36)$$

мы приходим к формуле (3.25). Формула (3.24) доказывается аналогично. $\square$

Следствие 3.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — ограниченная липшицева область. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ и положим

$$S\vec{f} := \mathcal{S}\vec{f}|_{\partial\Omega}. \quad (3.37)$$

Тогда операторы

$$K_\lambda: L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega), \quad S: L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^p_1(\partial\Omega) \quad (3.38)$$

определены, линейны и ограничены при любых $1 < p < \infty$.

Доказательство. Ограниченность оператора K_λ в L^p вытекает из предложений 3.2 и 3.1. Поскольку $\partial_{\tau_{jk}} S$ — сингулярный оператор типа рассмотренных в предложении 3.1, S является ограниченным оператором из $L^p(\partial\Omega)$ в $L_1^p(\partial\Omega)$. $\square$

Теперь мы собираемся обсудить, как эти операторы действуют в пространствах Соболева–Харди. Заметим сначала, что из (3.9)–(3.10) при любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\vec{f} \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, вытекает формула

$$(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j(X) = \int_{\partial\Omega} (\nu_\alpha(Y)(\partial_\alpha E_{jk})(Y - X) + \lambda \nu_\alpha(Y)(\partial_j E_{\alpha k})(Y - X) - \nu_j(Y)q_k(Y - X)) f_k(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega. \quad (3.39)$$

Для любых $\vec{f} \in H_1^p(\partial\Omega)$, где $(n-1)/n < p < \infty$, любых $r, j \in \{1, \dots, n\}$ и $X \in \Omega$, используя (3.6)–(3.7) и интегрируя по частям (см. (2.6)), получаем

$$\partial_r(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j = -\partial_\alpha \mathcal{S}_{jk}(\partial_{\tau_{\alpha r}} f_k) - \lambda \partial_j \mathcal{S}_{\alpha k}(\partial_{\tau_{\alpha r}} f_k) - \partial_k \mathcal{S}_\Delta(\partial_{\tau_{jr}} f_k) \quad \text{в } \Omega. \quad (3.40)$$

Такого же типа рассуждение применяется и к (3.12). В результате для любого $X \in \Omega$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda \vec{f}(X) &= (1 + \lambda) \int_{\partial\Omega} (\partial_r E_\Delta)(Y - X)(\partial_{\tau_{rk}} f_k)(Y) d\sigma(Y) \\ &= (1 + \lambda) \partial_r \mathcal{S}_\Delta(\partial_{\tau_{rk}} f_k)(X), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\vec{f} \in H_1^p(\partial\Omega)$ и $(n-1)/n < p < \infty$. Теперь мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.4. *Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — произвольная липшицева область, и пусть $(n-1)/n < p < \infty$. Тогда существует постоянная $C = C(\partial\Omega, p) > 0$, такая, что*

$$\|M(\nabla \mathcal{D}_\lambda \vec{f})\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|M(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|\vec{f}\|_{H_1^p(\partial\Omega)} \quad \forall \vec{f} \in H_1^p(\partial\Omega). \quad (3.42)$$

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием предложения 3.1, равенств (3.40), (3.41) и того факта, что при любых $j, k \in \{1, \dots, n\}$ и $(n-1)/n < p < \infty$ оператор $\partial_{\tau_{jk}} : H_1^p(\partial\Omega) \rightarrow H^p(\partial\Omega)$ ограничен. $\square$

Предложение 3.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — липшицева область. Тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор*

$$K_\lambda : H_1^p(\partial\Omega) \rightarrow H_1^p(\partial\Omega) \quad (3.43)$$

определен и ограничен для любых $p \in ((n-1)/n, \infty)$.

Доказательство. Для любых $j \in \{1, \dots, n\}$ и почти всех $X \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_{rs}}(K_\lambda \vec{f})_j(X) &= \partial_{\tau_{rs}}(\tfrac{1}{2} \vec{f} + K_\lambda \vec{f})_j(X) - \tfrac{1}{2} \partial_{\tau_{rs}} f_j(X) \\ &= \nu_r(\partial_s \mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j|_{\partial\Omega}(X) - \nu_s(\partial_r \mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j|_{\partial\Omega}(X) - \tfrac{1}{2} \partial_{\tau_{rs}} f_j(X). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Обозначим через $\partial_j S_\Delta$ интегральный оператор на $\partial\Omega$ с ядром $(\partial_j E_\Delta)(X - Y)$, понимаемый в смысле главного значения. В силу (3.40) и (3.29) почти везде на

$\partial\Omega$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \partial_s(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{1}{2}\nu_\alpha(\delta_{jk} - \nu_j\nu_k)\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k - \partial_\alpha S_{jk}(\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k) + \lambda\frac{1}{2}\nu_j(\delta_{\alpha k} - \nu_\alpha\nu_k)\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k \\ &\quad - \lambda\partial_j S_{\alpha k}(\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k) - \frac{1}{2}\nu_k\partial_{\tau_{sj}}f_k + \partial_k S_\Delta(\partial_{\tau_{sj}}f_k). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Аналогичная формула верна для $\partial_r(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j \Big|_{\partial\Omega}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(\delta_{jk} - \nu_j\nu_k)\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k &= \nu_\alpha(\delta_{jk} - \nu_j\nu_k)(\nu_\alpha(\nabla_{\tan} f_k)_s - \nu_s(\nabla_{\tan} f_k)_\alpha) \\ &= (\nabla_{\tan} f_j)_s - \nu_j\nu_k(\nabla_{\tan} f_k)_s \end{aligned} \quad (3.46)$$

и, аналогично,

$$\nu_j(\delta_{\alpha k} - \nu_\alpha\nu_k)\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k = -\nu_j\nu_s(\nabla_{\tan} f_k)_k, \quad (3.47)$$

$$\nu_k\partial_{\tau_{sj}}f_k = \nu_k\nu_s(\nabla_{\tan} f_k)_j - \nu_k\nu_j(\nabla_{\tan} f_k)_s. \quad (3.48)$$

Следовательно, скачки в разностях $\nu_r\partial_s(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j \Big|_{\partial\Omega} - \nu_s\partial_r(\mathcal{D}_\lambda \vec{f})_j \Big|_{\partial\Omega}$ равны $\frac{1}{2}J_1 + \frac{\lambda}{2}J_2 - \frac{1}{2}J_3$, где

$$\begin{aligned} J_1 &:= \nu_r(\nabla_{\tan} f_j)_s - \nu_s(\nabla_{\tan} f_j)_r - \nu_r\nu_j\nu_k(\nabla_{\tan} f_k)_s + \nu_s\nu_j\nu_k(\nabla_{\tan} f_k)_r \\ &= \partial_{\tau_{rs}}f_j - \nu_j\nu_k\partial_{\tau_{rs}}f_k, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$J_2 := -\nu_s\nu_j\nu_r(\nabla_{\tan} f_k)_k + \nu_r\nu_j\nu_s(\nabla_{\tan} f_k)_k = 0, \quad (3.50)$$

и

$$\begin{aligned} J_3 &:= \nu_r\nu_k\nu_s(\nabla_{\tan} f_k)_j - \nu_r\nu_k\nu_j(\nabla_{\tan} f_k)_s - \nu_s\nu_k\nu_r(\nabla_{\tan} f_k)_j + \nu_s\nu_k\nu_j(\nabla_{\tan} f_k)_r \\ &= -\nu_j\nu_k\partial_{\tau_{rs}}f_k. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Таким образом, $\frac{1}{2}J_1 + \frac{\lambda}{2}J_2 - \frac{1}{2}J_3 = \frac{1}{2}\partial_{\tau_{rs}}f_j$, что сокращается с последним членом в (3.44). Подытоживая, мы приходим к заключению, что все члены, соответствующие скачкам, взаимно сокращаются, и мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_{rs}}(K_\lambda \vec{f})_j &= \nu_s\partial_\alpha S_{jk}(\partial_{\tau_{\alpha r}}f_k) + \lambda\nu_s\partial_j S_{\alpha k}(\partial_{\tau_{\alpha r}}f_k) - \nu_s\partial_k S_\Delta(\partial_{\tau_{rj}}f_k) \\ &\quad - \nu_r\partial_\alpha S_{jk}(\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k) - \lambda\nu_r\partial_j S_{\alpha k}(\partial_{\tau_{\alpha s}}f_k) + \nu_r\partial_k S_\Delta(\partial_{\tau_{sj}}f_k), \end{aligned} \quad (3.52)$$

справедливому почти везде на границе. Поскольку $\partial_{\tau_{\alpha\beta}}f_k \in H^p(\partial\Omega)$, утверждение предложения вытекает из (3.52) и свойств операторов, фигурирующих в (3.52). $\square$

§4. Сингулярные интегральные операторы в пространствах Бесова–Лизоркина–Трибеля

В настоящем параграфе мы расширим рамки наших предыдущих результатов, чтобы получить некоторые полезные свойства сингулярных интегральных операторов, связанных с системой Стокса, в шкалах пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля.

4.1. Пространства нулей эллиптических операторов. Пусть $L = \sum_{|\gamma|=m} a_\gamma \partial^\gamma$ — однородный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m \in 2\mathbb{N}$ с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Для заданной ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, обозначим через $\text{Ker } L$ пространство

функций, удовлетворяющих уравнению $Lu = 0$ в Ω . При $0 < p \leq \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathbb{H}_\alpha^p(\Omega; L)$ пространство функций $u \in \text{Ker } L$, таких, что

$$\|u\|_{\mathbb{H}_\alpha^p(\Omega; L)} := \|D^{(\alpha)-\alpha} |\nabla^{(\alpha)} u|\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=0}^{\langle \alpha \rangle - 1} \|\nabla^j u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty. \quad (4.1)$$

Здесь ∇^j — вектор производных порядка j , $D := \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$, а $\langle \alpha \rangle$ — наименьшее неотрицательное целое число, большее или равное α . Следующее утверждение получено в [41] и [29]. Оно обобщает результаты из [27], относящиеся к случаю $1 < p, q < \infty$, $s > 0$, $L = \Delta$, и из [1], где предполагалось, что $1 < p, q < \infty$, $s > 0$ и $L = \Delta^2$.

Теорема 4.1. Пусть L — однородный эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — ограниченная липшицева область. Тогда

$$\mathbb{H}_\alpha^p(\Omega; L) = F_\alpha^{p,q}(\Omega) \cap \text{Ker } L \quad (4.2)$$

при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ и $0 < q < \infty$. В частности, при любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < p < \infty$ пространство $F_\alpha^{p,q}(\Omega) \cap \text{Ker } L$ не зависит от $q \in (0, \infty)$.

При $p = \infty$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $s \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\mathbb{H}_{k+s}^\infty(\Omega; L) = B_{k+s}^{\infty,\infty}(\Omega) \cap \text{Ker } L. \quad (4.3)$$

4.2. Оценки операторов в пространствах Бесова–Лизоркина–Трибе-ля. Приведем некоторые результаты о действии интегральных операторов в пространствах Бесова. Модельными для первого из этих результатов являются гармонические и гидростатические потенциалы двойного слоя.

Предложение 4.2 [41]. Пусть Ω — произвольная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть T — оператор, определенный равенством

$$Tf(X) := \int_{\partial\Omega} K(X, Y) f(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (4.4)$$

и такой, что $T1$ — постоянная функция в Ω , а ядро K удовлетворяет неравенству

$$|\nabla_X^k K(X, Y)| \leq C |X - Y|^{-(n+k-1)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

при некотором целом положительном N . Тогда

$$\|D^{k-1/p-s} |\nabla^k Tf|\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=0}^{k-1} \|\nabla^j Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{B_s^{p,p}(\partial\Omega)}, \quad (4.6)$$

где $D := \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$, $k \in \{1, \dots, N\}$, $(n-1)/n < p \leq \infty$ и $(n-1)(1/p-1)_+ < s < 1$.

Следующее утверждение является аналогом предложения 4.2 для операторов типа потенциалов простого слоя.

Предложение 4.3 [41]. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть R — оператор, определенный равенством

$$Rf(X) := \int_{\partial\Omega} K(X, Y) f(Y) d\sigma(Y), \quad X \in \Omega, \quad (4.7)$$

ядро которого удовлетворяет неравенству

$$|\nabla_X^k \nabla_Y^j K(X, Y)| \leq C |X - Y|^{-(n-2+k+j)}, \quad j = 0, 1, \quad (4.8)$$

при $k = 1, \dots, N$ и некотором целом положительном N . Тогда

$$\|D^{k-1/p-s} |\nabla^k Rf|\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=0}^{k-1} \|\nabla^j Rf\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{B_{s-1}^{p,p}(\partial\Omega)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.9)$$

где $(n-1)/n < p \leq \infty$ и $(n-1)(1/p-1)_+ < s < 1$.

Перейдем к свойствам гидростатических потенциалов в пространствах Бесова и Лизоркина–Трибеля для липшицевых областей.

Теорема 4.4. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и что p, q, s удовлетворяют условиям (1.2). Тогда операторы

$$\mathcal{D}_\lambda: B_s^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega), \quad \mathcal{D}_\lambda: B_s^{p,p}(\partial\Omega) \rightarrow F_{s+1/p}^{p,q}(\Omega), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{P}_\lambda: B_s^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad \mathcal{P}_\lambda: B_s^{p,p}(\partial\Omega) \rightarrow F_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{Q}: B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad \mathcal{Q}: B_s^{p,p}(\partial\Omega) \rightarrow F_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad (4.12)$$

$$\mathcal{S}: B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega), \quad \mathcal{S}: B_s^{p,p}(\partial\Omega) \rightarrow F_{s+1/p}^{p,q}(\Omega) \quad (4.13)$$

определены и ограничены. В случае пространств Лизоркина–Трибеля предполагается, что $p \neq \infty$.

Доказательство. В силу предложений 4.2 и 4.1 оператор

$$\mathcal{D}_\lambda: B_s^{p,p}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_{s+1/p}^p(\Omega; \Delta^2) = F_{s+1/p}^{p,q}(\Omega) \cap \text{Ker } \Delta^2 \quad (4.14)$$

определен и ограничен при $0 < p, q \leq \infty$, $(n-1)(1/p-1)_+ < s < 1$, причем $q = \infty$, если $p = \infty$. Вместе с вещественной интерполяцией это влечет за собой ограниченность операторов (4.10). Для второго оператора в (4.10) мы также пользуемся монотонностью шкалы пространств Лизоркина–Трибеля по второму индексу, чтобы включить случай $q = \infty$. Для операторов (4.11)–(4.13) рассуждения аналогичны. $\square$

Предложение 4.5. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предположим, что p, q, s удовлетворяют условиям (1.2) и что $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда операторы

$$K_\lambda: B_s^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_s^{p,q}(\partial\Omega), \quad S: B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \rightarrow B_s^{p,q}(\partial\Omega), \quad (4.15)$$

определены, линейны и ограничены.

Доказательство. Поскольку $\text{Tr} \circ \mathcal{D}_\lambda = \frac{1}{2}I + K_\lambda$ и $\text{Tr} \circ \mathcal{S} = S$, утверждение об операторах из (4.15) вытекает из теоремы 4.4 и теоремы 2.3. $\square$

5. Доказательство теоремы 1.1

Начнем с некоторых дополнительных обозначений. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть χ_E обозначает характеристическую

функцию множества E . Положим

$$\mathbb{R}_{\partial\Omega} := \left\{ \sum_j c_j \chi_{\Sigma_j} : c_j \in \mathbb{R} \text{ и } \Sigma_j \text{ — связная компонента границы } \partial\Omega \right\}, \quad (5.1)$$

$$\mathbb{R}_{\Omega_+} := \left\{ \sum_j c_j \chi_{\mathcal{O}_j} : c_j \in \mathbb{R} \text{ и } \mathcal{O}_j \text{ — связная компонента области } \Omega \right\}, \quad (5.2)$$

а также

$$\nu \mathbb{R}_{\partial\Omega} := \{\psi\nu : \psi \in \mathbb{R}_{\partial\Omega}\}, \quad \mathbb{R}_{\partial\Omega_+} := (\mathbb{R}_{\Omega_+})|_{\partial\Omega}, \quad \nu \mathbb{R}_{\partial\Omega_+} := \{\psi\nu : \psi \in \mathbb{R}_{\partial\Omega_+}\}. \quad (5.3)$$

Пусть Ψ есть $n(n+1)/2$ -мерное линейное пространство векторзначных функций $\psi = (\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$, определенных на $\mathbb{R}^n$, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих равенству $\partial_j \psi_k + \partial_k \psi_j = 0$ при $1 \leq j, k \leq n$. Заметим, что

$$\Psi = \{\psi(X) = AX + \vec{a} : A \text{ есть } (n \times n)\text{-антисимметричная матрица и } \vec{a} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (5.4)$$

Положим, кроме того,

$$\Psi(\partial\Omega_+) := \left\{ \sum_j \psi_j \chi_{\partial\mathcal{O}_j} : \psi_j \in \Psi, \mathcal{O}_j \text{ — ограниченная связная компонента области } \Omega \right\}. \quad (5.5)$$

Введем теперь некоторые варианты пространств Бесова на границе области, которые хорошо подходят для формулировки и исследования граничных задач для систем Стокса в липшицевых областях. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть p, q, s удовлетворяют условиям (1.2). Положим

$$B_{s, \nu_+}^{p,q}(\partial\Omega) := \left\{ \vec{f} \in B_s^{p,q}(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \vec{f} \rangle d\sigma = 0, \forall \psi \in \nu \mathbb{R}_{\partial\Omega_+} \right\}, \quad (5.6)$$

$$B_{s, \nu}^{p,q}(\partial\Omega) := \left\{ \vec{f} \in B_s^{p,q}(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \vec{f} \rangle d\sigma = 0, \forall \psi \in \nu \mathbb{R}_{\partial\Omega} \right\}. \quad (5.7)$$

Основной ингредиент в доказательстве теоремы 1.1 состоит в установлении того факта, что в условиях теоремы существует $\lambda \in (-1, 1]$, при котором оператор

$$\frac{1}{2}I + K_\lambda : B_{s, \nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)/\Psi^\lambda(\partial\Omega_+) \longrightarrow B_{s, \nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)/\Psi^\lambda(\partial\Omega_+) \text{ обратим.} \quad (5.8)$$

После того как это показано, более простые и хорошо разработанные рассуждения (см. детали в [48]) приводят к обратимости оператора

$$S : B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega)/\nu \mathbb{R}_{\partial\Omega} \longrightarrow B_{s, \nu}^{p,q}(\partial\Omega) \text{ при } n \geq 3. \quad (5.9)$$

Займемся доказательством теоремы 1.1, прежде чем перейти к утверждению (5.8). Рассмотрим интегральные операторы

$$\Pi \vec{u}(X) := \int_{\mathbb{R}^n} E(X-Y) \vec{u}(Y) dY, \quad \Theta \vec{u}(X) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle q(X-Y), \vec{u}(Y) \rangle dY, \quad X \in \mathbb{R}^n. \quad (5.10)$$

Это сглаживающие операторы порядков 2 и 1 соответственно как в пространствах Бесова, так и в пространствах Лизоркина–Трибеля. Кроме того,

$$\Delta \Pi - \nabla \Theta = I, \quad \operatorname{div} \Pi = 0, \quad \Delta \Pi_\Delta = I, \quad (5.11)$$

где I — тождественный оператор. В силу теорем продолжения, доказанных в [49], любую обобщенную функцию можно продолжить с Ω на все евклидово пространство с сохранением классов Бесова и Лизоркина–Трибеля. Ниже при необходимости мы будем использовать такие продолжения, больше этого не оговаривая. Пусть $\vec{v} \in B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega)$ и $\operatorname{div} \vec{v} = g$ в Ω . Например, можно взять $\vec{v} := \nabla \Pi_\Delta g$, где $\Pi_\Delta : B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega) \rightarrow B_{s+1/p+1}^{p,q}(\Omega)$ — гармонический ньютонов потенциал в Ω (т.е. оператор свертки с E_Δ в (3.15)). Рассмотрим $\vec{w}$ и ρ , такие, что

$$(\vec{w}, \rho) \in B_{s+1/p}^{p,q}(\Omega) \oplus B_{s+1/p-1}^{p,q}(\Omega), \quad \Delta \vec{w} - \nabla \rho = \vec{f} - \Delta \vec{v} \text{ и } \operatorname{div} \vec{w} = 0 \text{ в } \Omega. \quad (5.12)$$

Например, можно взять $\vec{w} := \Pi(\vec{f} - \Delta \vec{v})$ и $\rho := \Theta(\vec{f} - \Delta \vec{v})$, где Π и Θ определены в (5.10). Покажем, что

$$\operatorname{Tr} \vec{v} + \operatorname{Tr} \vec{w} - \vec{h} \in B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega). \quad (5.13)$$

Заметим сначала, что $\operatorname{Tr} \vec{v} + \operatorname{Tr} \vec{w} - \vec{h} \in B_s^q(\partial\Omega)$. Чтобы проверить условие ортогональности на $\nu \mathbb{R}_{\partial\Omega_+}$, в силу (5.3) достаточно убедиться, что при $\psi \in \mathbb{R}_{\partial\Omega_+}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle (\operatorname{Tr} \vec{v} + \operatorname{Tr} \vec{w}), \nu \rangle \psi \, d\sigma &= \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\vec{v} + \vec{w}) \, dX \\ &= \int_{\Omega} g \psi \, dX = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, \vec{h} \rangle \psi \, d\sigma, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где последнее равенство имеет место в силу (1.3). Тем самым (5.13) доказано.

Убедимся теперь, что при $n \geq 3$ отображения

$$T : B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega) \oplus B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \longrightarrow B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega), \quad T(\vec{g}_1, \vec{g}_2) := (\tfrac{1}{2}I + K_\lambda)\vec{g}_1 + S\vec{g}_2 \quad (5.15)$$

сюрьективны. Воспользуемся вложением

$$\Psi^\lambda(\partial\Omega_+) \hookrightarrow B_{s,\nu}^{p,q}(\partial\Omega). \quad (5.16)$$

Рассмотрим произвольную функцию $\vec{f} \in B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)$. Из (5.8) вытекает существование такой функции $\vec{g}_1 \in B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)$, что $\vec{\psi} := \vec{f} - (\tfrac{1}{2}I + K_\lambda)\vec{g}_1 \in \Psi^\lambda(\partial\Omega_+)$. Отсюда и из (5.16) и (5.9) следует, что существует функция $\vec{g}_2 \in B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega)$, удовлетворяющая равенству $S\vec{g}_2 = \vec{\psi}$. Таким образом, $T(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = \vec{f}$ и сюрьективность (5.15) доказана.

Установив (5.13) и (5.15), мы можем построить решение задачи (1.1) вида

$$\vec{u} := \vec{v} + \vec{w} + \mathcal{D}_\lambda \vec{g}_1 + \mathcal{S} \vec{g}_2, \quad \pi := \rho + \mathcal{P}_\lambda \vec{g}_1 + \mathcal{Q} \vec{g}_2, \quad (5.17)$$

где

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) \in B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega) \oplus B_{s-1}^{p,q}(\partial\Omega) \text{ и } T(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = \vec{h} - \operatorname{Tr} \vec{v} - \operatorname{Tr} \vec{w}. \quad (5.18)$$

Кроме того, описанная выше конструкция неявным образом устанавливает справедливость оценки (1.5). Случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Наконец, единственность доказывается непосредственно, с использованием существования. Аналогичный подход применяется и для пространств Лизоркина–Трибеля.

Таким образом, доказательство теоремы закончено, не считая доказательства утверждения (5.8). Заметим, что достаточно установить обратимость оператора $\frac{1}{2}I + K_\lambda$ при каком-нибудь одном значении $\lambda \in (-1, 1]$. Из соображений экономии места покажем, что (5.8) справедливо при $\lambda = 1$, если p, q, s удовлетворяют условиям (1.2), в случае $\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega)$, а затем отметим изменения, которые необходимо произвести в случае, когда выполнено условие (1.7). Для этой цели полезно следующее утверждение, являющееся частным случаем результата из [25]. В приводимой ниже формулировке через $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ обозначено банахово пространство ограниченных линейных операторов, переводящих банахово пространство $\mathcal{X}$ в себя, а через $\text{Comp}(\mathcal{X})$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, состоящий из компактных отображений пространства $\mathcal{X}$ в себя.

Теорема 5.1. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, ν — единичный вектор нормали и σ — мера на поверхности $\partial\Omega$. Для любой функции $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, четной и однородной степени $-n$, положим при $X \in \partial\Omega$

$$Tf(X) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|X-Y| > \varepsilon, Y \in \partial\Omega} \langle X - Y, \nu(Y) \rangle k(X - Y) f(Y) d\sigma(Y). \quad (5.19)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $N = N(n)$ и малое число $\delta > 0$, зависящее лишь от $\varepsilon, n, p, \|k\|_{S^n} \|_{C^N}$ и константы Липшица области Ω (точнее, от геометрических характеристик этой области, рассматриваемой как нетангенциально достижимая область в смысле Дженерисона и Кенига [26]), такие, что

$$\text{dist}(\nu, \text{VMO}(\partial\Omega)) < \delta \implies \text{dist}(T, \text{Comp}(L^p(\partial\Omega))) < \varepsilon, \quad (5.20)$$

где расстояние в правой части импликации измеряется в $\mathcal{L}(L^p(\partial\Omega), d\sigma)$.

Как следствие получаем, что при указанных выше условиях на Ω и операторе T , заданном равенством (5.19), при любом $p \in (1, \infty)$ имеет место импликация

$$\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega) \implies T: L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega) \text{ — компактный оператор.} \quad (5.21)$$

Доказательство этого утверждения, данное в [25], весьма нетривиально. Оно основано на расщеплении границы $\partial\Omega$ на две части: одна из них близка к липшицевой поверхности с малой липшицевой константой, а другая имеет малую поверхностную меру, что составляет уточненную версию теоремы о разложении Сэмса (см. предложение 5.1 на с. 212 в [52], а также теорему 4.1 на с. 398 в [31]), и на других средствах гармонического анализа, таких, как неравенства «с хорошим λ ».

Обсудим теперь перспективу применения теоремы 5.1 к гидростатическому потенциалу двойного слоя, определяемому в смысле главного значения следующим образом:

$$K_\lambda \vec{f}(X) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{Y \in \partial\Omega, |X-Y| > \varepsilon} [\partial_{\nu(Y)}^\lambda \{E, \vec{q}\}(Y - X)]^\top \vec{f}(Y) d\sigma(Y) \quad (5.22)$$

при $X \in \partial\Omega$. Ядро оператора (5.22) — это $(n \times n)$ -матрица, (j, k) -элемент которой имеет вид

$$\begin{aligned} & - (1 - \lambda) \frac{\delta_{jk}}{\omega_{n-1}} \frac{\langle X - Y, \nu(Y) \rangle}{|X - Y|^n} - (1 + \lambda) \frac{n}{\omega_{n-1}} \frac{\langle X - Y, \nu(Y) \rangle (x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|X - Y|^{n+2}} \\ & - (1 - \lambda) \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{(x_j - y_j)\nu_k(Y) - (x_k - y_k)\nu_j(Y)}{|X - Y|^n}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

В случае $\lambda = 1$, рассмотренном, например в [38, гл. 3, §2], первый и последний члены в (5.23) обращаются в нуль. Таким образом, при этом выборе значения параметра λ оператор (5.22) становится оператором типа (5.19). Следовательно,

$$\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega) \implies K_1: L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega) \text{ — компактный оператор } \forall p \in (1, \infty). \quad (5.24)$$

Распространение свойства компактности на граничные пространства Бесова осуществляется с помощью предложения 2.2 и следующего замечательного «одностороннего» утверждения о компактности при вещественной интерполяции для совместимых банаховых пар, установленного Цвикелем в [16]:

Теорема 5.2. Пусть $X_j, Y_j, j = 0, 1$, — две совместимые банаховы пары, и пусть $T: X_j \rightarrow Y_j$ — ограниченный оператор при $j = 0$ и компактный при $j = 1$. Тогда оператор $T: (X_0, X_1)_{\theta, q} \rightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta, q}$ компактен при любых $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$.

В силу (5.24) оператор K_1 компактен в $B_s^{p, q}(\partial\Omega)$ при $1 < p, q < \infty, 0 < s < 1$. Остается изучить случай квазибанаховых пространств Бесова. Как показал Цвикель в [16], свойство компактности можно экстраполировать на банаховы пространства при комплексной интерполяции.

Теорема 5.3. Пусть $X_j, Y_j, j = 0, 1$, — две совместимые банаховы пары, и пусть $T: X_j \rightarrow Y_j, j = 0, 1$, — ограниченный линейный оператор, такой, что существует $\theta^* \in (0, 1)$, при котором $T: [X_0, X_1]_{\theta^*} \rightarrow [Y_0, Y_1]_{\theta^*}$ компактен. Тогда $T: [X_0, X_1]_{\theta} \rightarrow [Y_0, Y_1]_{\theta}$ компактен при любых $\theta \in (0, 1)$.

Неизвестно, справедлив ли подобный результат для любых совместимых квазибанаховых пар, но, как показано в [29], подобная экстраполяция имеет место во всей шкале пространств Бесова. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.4. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$, — липшицева область, и пусть R — открытое выпуклое подмножество множества

$$\{(s, 1/p, 1/q) : (n-1)/n < p < \infty, 0 < q \leq \infty, (n-1)(1/p-1)_+ < s < 1\}. \quad (5.25)$$

Пусть

$$T: B_s^{p, q}(\partial\Omega) \rightarrow B_s^{p, q}(\partial\Omega) \quad (5.26)$$

— линейный оператор, ограниченный при $(s, 1/p, 1/q) \in R$. Если существуют такие $s, 1/p^*, 1/q^*$, что T компактно отображает $B_{s^*}^{p^*, q^*}(\partial\Omega)$ в себя, то оператор (5.26) компактен при всех $(s, 1/p, 1/q) \in R$.

Из приведенного выше анализа можно заключить, что для ограниченной липшицевой области Ω , удовлетворяющей условию $\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega)$, оператор K_1

компактен в $B_{s,q}^{p,q}(\partial\Omega)$, если p, q, s удовлетворяют условиям (1.2). В частности, $\frac{1}{2}I + K_1 : B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)/\Psi^1(\partial\Omega_+) \rightarrow B_{s,\nu_+}^{p,q}(\partial\Omega)/\Psi^1(\partial\Omega_+)$ фредгольмов с индексом 0. (5.27)

Отсюда стандартным образом выводится (5.8) при $\lambda = 1$. Наконец, если вместо включения $\nu \in \text{VMO}(\partial\Omega)$ имеет место лишь условие (1.7), мы можем показать, используя (5.20), что (5.27) остается в силе и, таким образом, конец доказательства теоремы 1.1 проходит и в этом случае.

В заключение приведем некоторые комментарии, касающиеся природы условия (1.7) в контексте теоремы 1.1. Рассмотрим двумерный случай, когда Ω — ограниченный криволинейный многоугольник, т. е. кусочно-гладкая область. Из основанного на преобразовании Меллина анализа структуры спектра сингулярных интегральных операторов известно, что наличие угла $\theta \neq \pi$ на границе нарушает компактность оператора K_1 в $L^p(\partial\Omega)$ при любом $p \in (1, \infty)$. Эту некомпактность оператора K_1 можно описать в более точных терминах. Рассмотрим случай криволинейного многоугольника с единственной угловой точкой в начале координат 0. Предположим, что в окрестности начала координат $\partial\Omega$ представляет собой угол раствора $\theta \in (0, \pi)$ с вершиной в 0. Внешняя единичная нормаль ν к Ω является гладкой на $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и кусочно постоянной около 0 и принимает два значения ν_+ и ν_- . Тогда

$$\{\nu\}_{\text{Osc}(\partial\Omega)} \approx \|\nu_+ - \nu_-\| \approx \sqrt{1 + \cos\theta}. \quad (5.28)$$

Это показывает, что существует семейство областей $\Omega = \Omega_\theta$ описанного выше типа, для которого

$$\text{dist}(\nu, \text{VMO}(\partial\Omega_\theta)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow \pi. \quad (5.29)$$

Отсюда заключаем, что при любом $\delta > 0$ существует ограниченная липшицева область Ω (липшицева константа которой равномерно мажорируется), такая, что $\text{dist}(\nu, \text{VMO}(\partial\Omega)) < \delta$, но при любом $p \in (1, \infty)$ оператор K_1 не является компактным в $L^p(\partial\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Adolfsson, J. Pipher, *The inhomogeneous Dirichlet problem for Δ^2 in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **159**:1 (1998), 137–190.
- [2] М. С. Агранович, *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей*, УМН, **57**:5 (2002), 3–78.
- [3] М. С. Агранович, *К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **41**:4 (2007), 1–21.
- [4] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ* , Функц. анализ и его прил., **42**:4 (2008), 2–23.
- [5] М. С. Агранович, *Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 3–24.
- [6] C. Amrouche, V. Girault, *On the existence and regularity of the solution of Stokes problem in arbitrary dimension*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **67**:5 (1991), 171–175.
- [7] C. Amrouche, V. Girault, *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*, Czechoslovak Math. J., **44(119)**:1 (1994), 109–140.

- [8] Й. Берг, Й. Лёфстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [9] R. M. Brown, Z. Shen, *Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains*, Indiana Univ. Math. J., **44**:4 (1995), 1183–1206.
- [10] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), 308–340.
- [11] D.-C. Chang, G. Dafni, E. M. Stein, *Hardy spaces, BMO, and boundary value problems for the Laplacian on a smooth domain in $\mathbb{R}^n$* , Trans. Amer. Math. Soc., **351**:4 (1999), 1605–1661.
- [12] D.-C. Chang, S. G. Krantz, E. M. Stein, *H^p theory on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$ and elliptic boundary value problems*, J. Funct. Anal., **114**:2 (1993), 286–347.
- [13] D.-C. Chang, S. G. Krantz, E. M. Stein, *Hardy spaces and elliptic boundary value problems*, in: The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), Contemp. Math., vol. 137, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 119–131.
- [14] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L^2 borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math., **116**:2 (1982), 361–388.
- [15] R. R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**:4 (1977), 569–645.
- [16] M. Cwikel, *Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators*, Duke Math. J., **65**:2 (1992), 333–343.
- [17] M. Dauge, *Stationary Stokes and Navier–Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations*, SIAM J. Math. Anal., **20**:1 (1989), 74–97.
- [18] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Evolution Problems II, vol. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [19] M. Dindoš, M. Mitrea, *The stationary Navier–Stokes system in nonsmooth manifolds: the Poisson problem in Lipschitz and C^1 domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., **174**:1 (2004), 1–47.
- [20] E. B. Fabes, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**:3 (1988), 769–793.
- [21] G. P. Galdi, C. G. Simader, H. Sohr, *On the Stokes problem in Lipschitz domains*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **167** (1994), 147–163.
- [22] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 749, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [23] Y. Giga, *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r spaces*, Math. Z., **178**:3 (1981), 297–329.
- [24] Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.
- [25] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes–Kenig–Toro domains*, Preprint, 2008.
- [26] D. S. Jerison, C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math., **46**:1 (1982), 80–147.
- [27] D. Jerison, C. Kenig, *The inhomogeneous problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130** (1995), 161–219.
- [28] A. Jonsson, H. Wallin, *Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$* , Math. Rep., **2**:1, 1984.
- [29] N. Kalton, S. Mayboroda, M. Mitrea, *Interpolation of Hardy–Sobolev–Besov–Triebel–Lizorkin spaces and applications to problems in partial differential equations*, in: Interpolation Theory and Applications, Contemp. Math., vol. 445, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 121–177.
- [30] R. B. Kellogg, J. E. Osborn, *A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon*, J. Funct. Anal., **21**:4 (1976), 397–431.

- [31] C. E. Kenig, T. Toro, *Free boundary regularity for harmonic measures and Poisson kernels*, Ann. of Math., **150**:2 (1999), 369–454.
- [32] J. Kilty, *The L^p Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains*, Preprint, 2008.
- [33] V. Kozlov, V. Maz'ya, *Boundary behavior of solutions to linear and nonlinear elliptic equations in plane convex domains*, Math. Res. Lett., **8**:1–2 (2001), 189–193.
- [34] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *Спектральные свойства операторных пучков, порожденных эллиптическими краевыми задачами в конусе*, Функц. анализ и его прил., **22**:2 (1988), 38–46.
- [35] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *О спектре операторного пучка, порожденного задачей Дирихле в конусе*, Матем. сб., **182**:5 (1991), 638–660.
- [36] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [37] V. A. Kozlov, V. Maz'ya, C. Schwab, *On singularities of solutions to the Dirichlet problem of hydrodynamics near the vertex of a cone*, J. Reine Angew. Math., **456** (1994), 65–97.
- [38] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Физматлит, М., 1961.
- [39] P. Maremonti, R. Russo, G. Starita, *On the Stokes equations: the boundary value problem*, in: Advances in Fluid Dynamics, Quad. Mat., vol. 4, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 1999, 69–140.
- [40] S. Mayboroda, M. Mitrea, *Sharp estimates for Green potentials on non-smooth domains*, Math. Res. Lett., **11** (2004), 481–492.
- [41] S. Mayboroda, M. Mitrea, *The solution of the Chang–Krein–Stein conjecture*, in: Proceedings of the Conference in Harmonic Analysis and its Applications (ed. A. Miyachi), Tokyo Woman's Cristian University, Tokyo, Japan, March 24–26, 2007, 61–154.
- [42] V. Maz'ya, M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains with boundary data in Besov spaces for higher order elliptic systems with rough coefficients*, J. d'Analyse Math., to appear; <http://arxiv.org/abs/math/0701898>.
- [43] V. Maz'ya, J. Rossmann, *Mixed boundary value problems for the Navier–Stokes system in polyhedral domains*, Arch. Rational Mech. Anal., 2009 (to appear).
- [44] I. Mitrea, M. Mitrea, *Multiple layer potentials for higher order elliptic boundary value problems*, Preprint, 2008.
- [45] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163**:2 (1999), 181–251.
- [46] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176** (2000), 1–79.
- [47] M. Mitrea, M. Taylor, *Navier–Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Math. Ann., **321**:4 (2001), 955–987.
- [48] M. Mitrea, M. Wright, *Boundary Value Problems for the Stokes System in Arbitrary Lipschitz Domains*, Preprint, 2008.
- [49] V. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc., (2), **60**:1 (1999), 237–257.
- [50] G. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **152**:1 (1998), 176–201.
- [51] S. Semmes, *Hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ whose unit normal has small BMO norm*, Proc. Amer. Math. Soc., **112**:2 (1991), 403–412.
- [52] S. Semmes, *Chord-arc surfaces with small constant. I*, Adv. Math., **85**:2 (1991), 198–223.

- [53] Z. Shen, *A note on the Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**:3 (1995), 801–811.
- [54] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.
- [55] В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Давидса–Л. Ниренберга. II*, Труды МИАН, **92** (1966), 233–297.
- [56] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, vol. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [57] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [58] R. Temam, *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 2, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
- [59] W. Varnhorn, *The Stokes Equations*, Mathematical Research, vol. 76, Akademie-Verlag, Berlin, 1994.
- [60] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **59**:3 (1984), 572–611.

Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool

Linköping University
e-mail: vlmaz@mai.liu.se

University of Missouri at Columbia
e-mail: mitream@missouri.edu

Linköping University
e-mail: tasha@mai.liu.se

Поступило в редакцию
6 мая 2009 г.