Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Об одном подходе к разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 3, 33–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2961>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:38:03

УДК 517.956.4

Об одном подходе к разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса*

© 2009. В. В. Жиков

Памяти Соломона Григорьевича Михлина

Предложен новый подход к доказательству существования слабых решений обобщенных, или модифицированных систем Навье–Стокса. Рассмотрены также системы, хорошо известные в настоящее время из теории неньютоновых электрореологических жидкостей.

1. Формулировка основных результатов

1. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей рассмотрим модельную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla \pi &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ A &= \nu |Du|^{p-2} Du, \quad \nu > 0, \quad p > 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u — вектор скорости, Du — симметрическая часть градиента ∇u , π — давление, $u \otimes u = \{u_i u_j\}$. В случае $p = 2$ получаем классическую систему Навье–Стокса. Если в (1.1) конвективное слагаемое $\operatorname{div}(u \otimes u) = u_i \partial u_j / \partial x_i$ отсутствует, имеем нелинейную систему Стокса. Нас будут интересовать слабые решения. Введем соответствующие функциональные пространства:

$$C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega) = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^d, \operatorname{div} u = 0\},$$

$$H — \text{замыкание множества } C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega) \text{ в } (L^2(\Omega))^d,$$

$$V — \text{замыкание множества } C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega) \text{ в } (W^{1,p}(\Omega))^d,$$

$$X = L^p(0, T, V),$$

$$\mathcal{E} = X \cap L^\infty(0, T, H).$$

Из неравенства Корна

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq c_0 \int_\Omega |Du|^p dx, \quad u \in (W_0^{1,p}(\Omega))^d,$$

следует, что величина $\|Du\|_{L^p(\Omega)}$ эквивалентна норме на V , а $\|Du\|_{L^p(Q_T)}$, где $Q_T = \Omega \times [0, T]$, есть эквивалентная норма на X . Произвольный функционал

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00616.

$f \in X^*$ можно записать в виде

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{Q_T} f \cdot D\varphi \, dx, \quad \varphi \in X,$$

$f = \{f_{ij}\}$ — симметрическая матрица, $f \in L^{p'}(Q_T)$, $p' = p/(p-1)$.

Определение 1.1. Пусть правая часть f в (1.1) представлена как элемент из X^* . Вектор-функция $u \in \mathcal{E}$ есть *слабое решение начально-краевой задачи* (1.1), если для любого $\eta = \eta(x) \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$

(i) выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u \cdot \eta \, dx \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} [A - (u \otimes u)] \cdot \nabla \eta \, dx \, dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} f \cdot \nabla \eta \, dx \, dt \quad \forall t_0, t_1 \in [0, T]; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\Omega} u \cdot \eta \, dx = \int_{\Omega} u_0 \cdot \eta \, dx.$$

Из этого определения видно, что $u(\cdot, t)$ слабо непрерывна как функция $[0, T] \rightarrow H$ и $u|_{t=0} = u_0$. Это следует из ограниченности функции $u(\cdot, t): [0, T] \rightarrow H$, непрерывности на $[0, T]$ скалярных функций $\int_{\Omega} u(x, t) \cdot \eta(x) \, dx$ и плотности множества $C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$ в H .

Для системы Стокса существование и единственность слабого решения доказаны методом монотонных операторов при любом $p > 1$. Для системы Навье–Стокса значение показателя p уже играет определяющую роль. Достаточно ясно, что при увеличении показателя p положение с существованием решения только улучшается.

Ладыженская [1] и Лионс [2] доказали, что при

$$p \geq \frac{3d+2}{d+2} \equiv p_0 \quad (1.3)$$

слабое решение существует для любых $u_0 \in H$, $f \in X^*$, а при $p \geq (d+2)/2$ имеет место также и единственность.

Если выполнено условие (1.3), система Навье–Стокса оказывается слабым возмущением системы Стокса, что обеспечивается соотношением

$$u \otimes u \in L^{p'}(Q_T) \quad \forall u \in \mathcal{E}$$

и вытекающим из него равенством

$$\int_{Q_T} (u \otimes u) \cdot \nabla u \, dx \, dt = 0. \quad (1.4)$$

Метод монотонных операторов, приспособленный собственно к системе Стокса, автоматически действует и в присутствии конвективного члена. В связи с этим число $p_0 = 11/5$ (при $d = 3$) трактуют как нижнюю границу применимости метода монотонных операторов, классический показатель $p = 2$ сюда не попадает.

Между тем существование слабых решений при $p = 2$ доказано для задачи Дирихле Хопфом [3] в 1951 г., а для задачи Коши — еще ранее Лере [4] в 1934 г. Результат Хопфа стоит как будто особняком, интервал показателей $(2, 11/5)$

не «заполнен» теоремой существования. Это обстоятельство не было обойдено вниманием, например, соответствующий вопрос поставлен в книге Лионса [2, гл. II, 11.5]. При этом многократно отмечалось, что для приложений интересен также показатель $p < 2$ («сингулярный», или псевдопластический тензор вязких напряжений). Важные исследования, относящиеся главным образом к показателю $p \geq 2$, проведены Нечасом и его коллегами [4]–[7].

2. Введем другие нижние границы:

$$p_2 = \frac{3d}{d+2}, \quad p_1 = \max \left\{ \frac{d + \sqrt{3d^2 + 4d}}{d+2}, \frac{3d}{d+2} \right\}, \quad (1.5)$$

и отметим, что $p_2 = 9/5$, $p_1 < 1,86$ при $d = 3$. Условие $p \geq p_2$ обеспечивает подчиненность конвективного слагаемого в стационарном уравнении Навье–Стокса:

$$u \otimes u \in L^{p'}(\Omega) \quad \forall u \in V, \quad (1.6)$$

в частности, имеет место фундаментальное свойство

$$(u \otimes u) \cdot \nabla u \in L^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (u \otimes u) \cdot \nabla u \, dx = 0 \quad \forall u \in V. \quad (1.7)$$

В нестационарном случае в дело вступает граница p_1 и важно соотношение

$$u \otimes u \in L^1(0, T, L^{p'}(\Omega)) \quad \forall u \in \mathcal{E}, \, p \geq p_1, \quad (1.8)$$

при этом функция $(u \otimes u) \cdot \nabla u$, вообще говоря, не суммируема на Q_T и говорить о равенстве (1.4) нельзя.

Теорема 1.2. *Если $p \geq p_1$, то слабое решение системы (1.1) существует при любых $u_0 \in H$, $f \in X^*$.*

В [5], [6] предполагалось, что $p \geq 2$, а данные u_0 , f достаточно гладки; это связано с методом доказательства. Для перехода к пределу в галеркинских приближениях, где необходимо обеспечить определенные свойства компактности нелинейного «вязкого» слагаемого, авторы дифференцируют систему (1.1) по аргументу x и фактически изучают систему для $v = \nabla u$, чтобы получить подходящие оценки второго градиента $\nabla^2 u$. Поскольку для v нет никаких граничных условий, нужно доказывать оценки сначала внутри области, затем вблизи границы и т. д. Эта довольно сложная техника (представление о ней можно получить из [8, гл. VI]) требует многих ограничений гладкости. Особые трудности вызывают при таком подходе условия прилипания $u|_{\partial\Omega} = 0$, где критически важно предположение $p \geq 2$. Для задачи Коши, а также периодической задачи положение упрощается. В любом случае указанные приемы не работают, если коэффициент ν является кусочно-постоянным.

Применяемые нами методы носят иной характер, в определенном смысле они менее технические, не требуют тяжелых оценок второго градиента и позволяют изучить систему вида (1.1) в более общей форме.

Пусть $A = A(x, t, \xi)$ — симметрическая матрица (размера $d \times d$), $x, t \in Q_T$, ξ пробегает пространство $\mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ симметрических матриц, $A(x, t, \xi)$ каратеодориева, т. е. непрерывна по ξ для почти всех $x, t \in Q_T$ и измерима по $x, t \in Q_T$ при каждом ξ . Предполагаем выполнение условий монотонности, коэрцитивности и ограниченности:

$$(A(x, t, \xi) - A(x, t, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0, \quad A(x, t, 0) \equiv 0, \quad (1.9)_1$$

$$A(x, t, \xi) \cdot \xi \geq c_0 |\xi|^{p(x)} - 1, \quad c_0 > 0, \quad (1.9)_2$$

$$|A(x, t, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p(x)-1} + 1. \quad (1.9)_3$$

При этом показатель p измерим на Ω и подчинен оценке

$$1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty. \quad (1.10)$$

Системы (1.1), в которых $A = A(x, t, Du)$, интенсивно изучаются в связи с теорией так называемых электрореологических жидкостей, при этом используются различные тензорные функции $A(\cdot, \xi)$, как потенциальные (вида $A = |\xi|^{p(x)-2}\xi$), так и не имеющие потенциала, см. [7].

Определения слабого решения и функциональных пространств остаются прежними, нужно только норму на X и V задать по Орличу, подробнее см. в §3.

Теорема 1.3. *Если $\alpha \geq p_1$, то слабое решение существует при любых $u_0 \in H$, $f \in X^*$.*

В книге [7, гл. 3] доказана важная теорема существования слабых решений для некоторых систем, описывающих электрореологические жидкости. При этом основной метод — вывод подходящей оценки для второго градиента $\nabla^2 u$ — привел к ряду ограничений: неравенство $\alpha \geq 2$ и некоторая оценка сверху для β , гладкость и потенциальность тензорной функции $A(\cdot, \xi)$, гладкость начальных данных u_0 , f . Между тем для многих электрореологических жидкостей в действительности $\alpha < 2$, а функция $A(\cdot, \xi)$ не является потенциальной. Обсуждение этих вопросов имеется в [7, с. 106].

§2. Метод

1. Для сокращения записи рассмотрим исходную систему (1.1) с $\nu = 1$, $f = 0$. Решение этой системы будет получено как предел подходящих приближенных решений.

Возьмем регуляризацию системы (1.1), в которой вместо $A = |Du|^{p-2}Du$ стоит

$$A_\varepsilon = |Du_\varepsilon|^{p-2}Du_\varepsilon + \varepsilon |Du_\varepsilon|^{\gamma-2}Du_\varepsilon, \quad \gamma = \max\{p, p_0\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Регуляризованная задача разрешима по теореме Ладыженской–Лионса, решение u_ε принадлежит пространству $L^\gamma(0, T, (W_0^{1,\gamma}(\Omega))^d)$, и выполнено энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u_\varepsilon^2 dx \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega (|Du_\varepsilon|^p + \varepsilon |Du_\varepsilon|^\gamma) dx dt = 0, \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T, \quad (2.1)$$

в частности,

$$\int_\Omega u_\varepsilon^2(x, t) dx + 2 \int_0^t \int_\Omega (|Du_\varepsilon|^p + \varepsilon |Du_\varepsilon|^\gamma) dx d\tau = \int_\Omega u_0^2(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Мы видим, что последовательность u_ε ограничена в пространстве $\mathcal{E}$, а последовательность A_ε ограничена в $L^{\gamma'}(Q_T)$. Без потери общности считаем, что имеют место слабые сходимости

$$Du_\varepsilon \rightharpoonup Du \text{ в } L^p(Q_T), \quad A_\varepsilon \rightharpoonup z \text{ в } L^{\gamma'}(Q_T).$$

Отметим, что в действительности $z \in L^{p'}(Q_T) \subset L^{\gamma'}(Q_T)$. В самом деле, элементарно проверяется, что $\varepsilon |Du_\varepsilon|^{\gamma-2} Du_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $L^{\gamma'}(Q_T)$ (см. лемму 3.4), а так как последовательность $|Du_\varepsilon|^{p-2} Du_\varepsilon$ очевидным образом ограничена в $L^{p'}(Q_T)$, то $z \in L^{p'}(Q_T)$. Кроме того, из восходящих к Хопфу «параболических» лемм о компактности следует сильная сходимость

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } L^2(Q_T) = L^2(0, T, L^2(\Omega)),$$

и можно считать, что $u_\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ в $L^2(\Omega)$ для п.в. $t \in [0, T]$. Здесь важно только неравенство $p > 2d/(d+2)$, которое обеспечивает компактность вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ и в наших условиях очевидным образом выполняется. Подробно это объяснено в §3, см. лемму 3.3.

Теперь в тождестве (1.2) с $A = A_\varepsilon$ можно перейти к пределу и получить такое же тождество, в котором на месте A стоит z , т. е.

$$\int_\Omega u \cdot \eta dx \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega [z - (u \otimes u)] \cdot \nabla \eta dx dt = 0, \quad \eta \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega).$$

Таким образом, все сводится к доказательству равенства $z = A = |Du|^{p-2} Du$. Поскольку A_ε зависит от Du_ε нелинейно (при $p \neq 2$), а сходимость $Du_\varepsilon \rightharpoonup Du$ только слабая, получаем нетривиальную задачу. В цитированных выше работах [5], [6] с помощью оценок второго градиента доказывалась сходимость $Du_\varepsilon(x) \rightarrow Du(x)$ почти всюду на Q , которая легко обеспечивает нужную сходимость $A_\varepsilon \rightharpoonup A$.

Наш подход основан на других соображениях. Ключевую роль играют свойства последовательности $A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$, которая всегда ограничена, но не обязательно слабо компактна в $L^1(Q_T)$. Без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимость

$$A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx dt \rightharpoonup d\mu, \quad (2.3)$$

где μ — некоторая конечная борелева мера на компакте $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$. Сходимость (2.3) означает (ввиду ограниченности $A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ в $L^1(Q_T)$), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_T} \varphi A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx dt = \int_{Q_T} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T).$$

Далее используются простейшие свойства слабой сходимости неотрицательных мер [9], а именно, если имеет место (2.3), то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx dt \geq \int_K d\mu \quad \text{для любого открытого } K \subset \bar{Q}_T, \quad (2.4)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx dt \leq \int_K d\mu \quad \text{для любого замкнутого } K \subset \bar{Q}_T. \quad (2.5)$$

Пусть $d\mu = a dx dt + d\mu^s$ — разложение меры μ на абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега в Q_T) и сингулярную компоненты.

Сравним плотность $a \in L^1(Q_T)$ с функцией $z \cdot \nabla u$, также принадлежащей $L^1(Q_T)$, так как $\nabla u \in L^p(Q_T)$, $z \in L^{p'}(Q_T)$. Следующая лемма доказана в §3.

Лемма 2.1. *Если абсолютно непрерывная компонента меры μ равна $z \cdot \nabla u$, то равенство $z = A$ имеет место. Другими словами, если $a = z \cdot \nabla u$, то $z = A$.*

Видим, что сингулярная компонента меры μ не играет роли, но требуется, чтобы абсолютно непрерывная компонента имела «естественную» структуру $z \cdot \nabla u$.

Для оценки снизу меры μ используем особое свойство типа полунепрерывности снизу для монотонных операторов. Общая формулировка этого свойства будет приведена в §3, а сейчас достаточно следующего варианта:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \, dt \geq \int_K z \cdot \nabla u \, dx \, dt \quad \text{для любого измеримого } K \subset Q_T. \quad (2.6)$$

Это приводит к оценке снизу $d\mu \geq z \cdot \nabla u \, dx \, dt$, так как из (2.5), (2.6) вытекает, что

$$\int_K d\mu \geq \int_K z \cdot \nabla u \, dx \, dt \quad \text{для любого замкнутого } K \subset Q_T. \quad (2.7)$$

В свою очередь, из (2.7) следует неравенство

$$a \geq z \cdot \nabla u \quad \text{п.в. на } Q_T, \quad (2.8)$$

поскольку в качестве K можно взять произвольное замкнутое множество, лежащее вне носителя сингулярной компоненты μ^s .

Оценка (2.8), как и лемма 2.1, носит общий характер, никакой связи с уравнениями не требуется. Эта связь становится существенной, если попытаться дополнить оценку снизу (2.8) подходящей оценкой сверху.

2. Для доказательства теоремы 1.2 достаточно установить, что

$$\int_\Omega a \, dx \Big|_{t=t_0} \leq \int_\Omega z \cdot \nabla u \, dx \Big|_{t=t_0} \quad \text{для п.в. } t_0 \in [0, T]. \quad (2.9)$$

В этом случае из (2.8) следует равенство $a = z \cdot \nabla u$ и можно применить лемму 2.1.

Из энергетического равенства (2.1) вычтем тождество (1.2) с $A = A_\varepsilon$, $f = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \, dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega [A_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)] \cdot \nabla \eta \, dx \, dt \\ &\quad - \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon \cdot \eta \right) dx \Big|_{t_0}^{t_1}, \quad \eta \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon \cdot \eta \right) dx \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_\varepsilon - \eta)^2 dx \Big|_{t_0}^{t_1}, \quad (2.10)$$

то

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega [A_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)] \cdot \nabla \eta \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_\Omega (u_\varepsilon - \eta)^2 dx \Big|_{t=t_0}.$$

Отсюда в силу свойств (2.4) слабой сходимости мер следует, что

$$\int_{\bar{\Omega} \times (t_0, t_1)} d\mu \leq \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega [z - (u \otimes u)] \cdot \nabla \eta \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_\Omega (u - \eta)^2 dx \Big|_{t=t_0}, \quad (2.11)$$

поскольку множество $\bar{\Omega} \times (t_0, t_1)$ открыто в $\bar{Q}_T$. Здесь предполагается, что t_0 выбрано удовлетворяющим условиям $u_\varepsilon(\cdot, t_0) \rightarrow u(\cdot, t_0)$ в $L^2(\Omega)$, $u(\cdot, t_0) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^d$.

Проверим, что в (2.11) можно положить $\eta = u(x, t_0)$, взяв соответствующую аппроксимацию $\eta_N \rightarrow \eta$ в $(W_0^{1,p}(\Omega))^d$, $\eta_N \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$, причем $\eta_N \rightarrow \eta$ в $L^2(\Omega)$ в силу непрерывности вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Сомнение может вызвать только слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (u \otimes u) \cdot \nabla \eta_N \, dx \, dt = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} (u \otimes u) \, dt \cdot \nabla \eta_N \, dx.$$

Но из свойства (1.8) видно, что интеграл $\int_{t_0}^{t_1} (u \otimes u) \, dt$ есть элемент пространства $L^{p'}(\Omega)$, и поэтому предельный переход законен. Аналогично,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} z \cdot \nabla \eta_N \, dx \, dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} z \, dt \cdot \nabla \eta_N \, dx = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} z \, dt \cdot \nabla \eta \, dx,$$

так как $\int_{t_0}^{t_1} z \, dt \in L^{p'}(\Omega)$. Далее, полагая $t_1 = t_0 + h$, $h > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} a \, dt \, dx &\leq \frac{1}{h} \int_{\bar{\Omega} \times (t_0, t_0+h)} d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} [z - (u \otimes u)] \, dt \cdot \nabla \eta \, dx, \quad \eta = u(\cdot, t_0), \end{aligned} \quad (2.12)$$

поскольку $a \, dx \, dt \leq d\mu$.

Далее нам понадобится понятие точки Лебега для функции $g(t)$ со значениями в банаховом пространстве Y (см. [17]). Если $g \in L^1(0, T, Y)$, то

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} g(t) \, dt \xrightarrow{Y} g(t_0) \quad \text{для п.в. } t_0 \in [0, T]. \quad (2.13)$$

Считаем, что t_0 есть точка Лебега для $z + u \otimes u$ как функции из $L^1(0, T, L^{p'}(\Omega))$, а также для a как функции из $L^1(0, T, L^1(\Omega))$. В таком случае по свойствам точек Лебега

$$\int_{\Omega} a \, dx \Big|_{t=t_0} \leq \int_{\Omega} [z - (u \otimes u)] \cdot \nabla u \, dx \Big|_{t=t_0} = \int_{\Omega} z \cdot \nabla u \, dx \Big|_{t=t_0} \quad (2.14)$$

в силу (1.7). Неравенство (2.9) доказано. Таким образом, установлено представление $d\mu = z \cdot Du \, dx \, dt + d\mu^s$, из которого по лемме 2.1 следует равенство $z = |Du|^{p-2} Du$, обеспечивающее теорему существования.

3. Часто в определение слабого решения (см. определение 1.1) включается выполнение энергетического неравенства

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) \, dx \quad \forall t \geq 0 \quad (2.15)$$

(мы по-прежнему берем $f = 0$). Для полученного выше решения это неравенство имеет место. Действительно, воспользуемся простым фактом: семейство $u_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо равномерно непрерывно в $L^2(\Omega)$ (см. предложение 4.1). Из него следует, что $u_\varepsilon(\cdot, t) \rightharpoonup u(\cdot, t)$ в $L^2(\Omega)$ для любого $t \geq 0$. Теперь (2.15)

получается из (2.2) с помощью стандартных свойств полунепрерывности снизу при слабой сходимости, не требуется даже знать, что u есть решение.

4. Итак, в пределе обычное энергетическое равенство может не сохраняться. Однако с помощью предельной меры энергетический баланс восстанавливается, и «энергетическое равенство» принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |Du|^p dx d\tau + \int_{\bar{\Omega} \times [0, t)} d\mu^s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx \quad (2.16)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. В самом деле, перейдем к пределу в (2.2). Как отмечалось ранее,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^2(x, t) dx = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx$$

для почти всех t . Далее, ясно, что для сечений $\bar{\Omega}_t = \bar{\Omega} \times \{t\}$ выполнено равенство $\mu(\bar{\Omega}_t) = 0$, за исключением, самое большее, счетного множества точек $t \in [0, T]$. Тогда по свойствам слабой сходимости мер

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} dx d\tau = \int_{\bar{\Omega} \times [0, t)} d\mu,$$

где t взято вне исключительного множества. Поскольку представление

$$d\mu = |Du|^p dx dt + d\mu^s \quad (2.17)$$

уже установлено, равенство (2.16) также доказано.

Введем монотонную функцию

$$F(t) = \int_{\bar{\Omega} \times [0, t)} d\mu,$$

которая соответствует проекции меры μ на временную ось. Из (2.12), с учетом (2.14) и доказанных равенств $a = |Du|^p$, $z = |Du|^{p-2} Du$, получим

$$\frac{d}{dt} F = \int_{\Omega_t} |Du|^p dx \quad \text{для п.в. } t.$$

Другими словами,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\bar{\Omega} \times [0, t)} d\mu^s \right) = 0 \quad \text{для п.в. } t, \quad (2.18)$$

т. е. проекция компоненты μ^s на временную ось сама есть сингулярная мера.

Из равенства (2.16) можно исключить сингулярную меру μ^s двумя способами. Первый способ — это просто отбросить слагаемое с μ^s , что дает неравенство (2.15), так как сингулярная компонента неотрицательна. Второй способ — продифференцировать равенство (2.16) и воспользоваться свойством (2.18), при этом равенство сохраняется и получается следующий результат:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} u^2 dx + \int_{\Omega_t} |Du|^p dx = 0 \quad \text{п.в. по } t. \quad (2.19)$$

Отметим, что функция $\int_{\Omega_t} u^2 dx$ не обязательно абсолютно непрерывна, поэтому интегрированием по t соотношения (2.18) добиться равенства в (2.15) нельзя. Последнее, вообще говоря, и не имеет места.

Обсудим отдельно классический случай $p = 2$. Известно, что существование решения, удовлетворяющего энергетической оценке (2.15), имеет место при любом $d \geq 2$. Однако представление (2.17) и связанные с ним энергетические равенства (2.16), (2.19) доказаны при $d \leq 4$, поскольку только в этом случае выполнено условие $2 \geq p_2$. Например, при $d = 5$ имеем $p_1 = p_2 = 15/7$ и представление (2.17) для предельной меры осталось открытым вопросом.

Представление (2.17) может оказаться важным и в других вопросах. Например, наряду с уравнением Навье–Стокса рассмотрим сопутствующее ему уравнение теплопроводности. Если взять регуляризацию, обслуживающую оба уравнения, то в пределе для температуры θ получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = |Du|^p + d\mu^s.$$

Видим, что сингулярная компонента играет ту же роль источника тепла, что и плотность вязкой энергии $|Du|^p$.

Открытые проблемы: пример с $\mu^s \neq 0$, структура носителя сингулярной меры, в частности, его хаусдорфова размерность, связь с теорией частичной регулярности.

5. Теперь о свойстве (1.8). Оно выводится из мультипликативного неравенства

$$\|u\|_s \leq c \|\nabla u\|_p^\lambda \|u\|_2^{1-\lambda} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

в котором $\|f\|_\alpha = (\int_\Omega |f|^\alpha dx)^{1/\alpha}$, $\alpha \geq 1$,

$$\frac{1}{s} = \lambda \frac{d-p}{dp} + \frac{1-\lambda}{2}, \quad \lambda \in [0, 1], \quad p < d.$$

Возьмем $s = 2p'$, что возможно при $p \geq 3d/(d+2)$. Тогда

$$\|u\|_{2p'}^{p/\lambda} = \|u^2\|_{p'}^{p/(2\lambda)} \leq c \|\nabla u\|_p^p \|u\|_2^{(1-\lambda)p/\lambda}.$$

Важно, что $p/(2\lambda) \geq 1$, так как $p/(2\lambda) = (p^2(d+2) - 2dp)/(2d) \geq 1$, если только p не меньше положительного корня квадратного уравнения $(d+2)p^2 - 2dp - 2d = 0$, что соответствует определению границы p_1 , см. (1.5). Поэтому для $u \in \mathcal{E}$ интегрированием по $[0, T]$ получим

$$\int_0^T \|u^2\|_{p'}^{p/(2\lambda)} dt \leq c \int_0^T \|\nabla u\|_p^p dt \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_2^{(1-\lambda)p/\lambda} < \infty,$$

что и обеспечивает свойство (1.8).

Остановимся на свойствах (1.6), (1.7), которые в целом хорошо известны. Свойство (1.6) непосредственно следует из вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{2p'}(\Omega)$, поскольку $2p' \leq p^* \equiv dp/(d-p)$ при $p \geq p_2$. Отсюда по неравенству Гёльдера получаем оценку

$$\|(u \otimes u) \cdot \nabla \varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^2 \|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega)},$$

из которой легко заключаем, что форма

$$b(u, \varphi) = \int_\Omega (u \otimes u) \cdot \nabla \varphi dx$$

непрерывна на $V \times V$. Равенство $b(u, u) = 0$ получается по непрерывности, поскольку для $u \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$ оно легко устанавливается.

§3. Вспомогательные результаты

Здесь мы, ориентируясь на систему (1.1) с тензором A общего вида, уточним определения соответствующих функциональных пространств, приведем формулировки свойства полунепрерывности снизу, «параболической» леммы о компактности и др.

1. Через $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ обозначим класс всех измеримых функций $f: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, таких, что

$$\int_{Q_T} |f|^p dx dt < \infty,$$

где показатель $p = p(x)$ удовлетворяет условию (1.10). Этот класс становится рефлексивным банаховым пространством, если норму определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{Q_T} |\lambda^{-1} f|^p dx dt \leq 1 \right\}. \quad (3.1)$$

Заметим, что точная нижняя грань в (3.1) достигается, если $\int_{Q_T} |f|^p dx dt > 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \lambda &\iff \int_{Q_T} |\lambda^{-1} f|^p dx dt = 1, \\ \|f_\varepsilon - f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \rightarrow 0 &\iff \int_{Q_T} |f_\varepsilon - f|^p dx dt \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\alpha - 1 \leq \int_{Q_T} |f|^p dx dt \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\beta + 1. \quad (3.3)$$

Аналогично определяется норма $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ для функции f на Ω . Ниже существенно используется тот факт, что показатель $p = p(x)$ не зависит от t . Прежде всего, имеет место вложение

$$L^{p(\cdot)}(Q_T) \subset L^\alpha(0, T, L^{p(\cdot)}(\Omega)), \quad (3.4)$$

поскольку

$$\int_{Q_T} |f|^p dx dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^p dx \right) dt \geq \int_0^T [\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}^\alpha - 1] dt,$$

где использовано неравенство вида (3.3) для $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Далее, если $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$, то для почти всех $t_0 \in [0, T]$

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(\cdot, t) dt \xrightarrow{L^{p(\cdot)}(\Omega)} f(\cdot, t_0) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Это — следствие вложения (3.4) и общей теоремы о точках Лебега, см. (2.13).

Определим пространство Соболева–Орлича

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

с нормой $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Справедливы очевидные вложения $W_0^{1,\beta}(\Omega) \subset W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Важно заметить, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ не обязательно плотно в $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, в отличие от случая классических пространств $W_0^{1,\beta}(\Omega)$ и $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

В связи с этим обстоятельством пространство V , состоящее из соленоидальных векторов, определим как замыкание множества $C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$ по норме $\|Du\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Аналогично, через X обозначим замыкание множества

$$\{u \in (C^\infty(\overline{Q_T}))^d, \operatorname{div} u = 0, u = 0 \text{ вблизи } \partial\Omega \times [0, T]\} \quad (3.5)$$

по норме $\|u\|_X = \|Du\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}$ и отметим вполне очевидное вложение

$$L^\beta(0, T, W_0^{1,\beta}(\Omega)) \subset X. \quad (3.6)$$

Лемма 3.1. *Если $u \in X$, то для почти всех $t_0 \in [0, T]$ функция $u(\cdot, t_0)$ принадлежит пространству V .*

Доказательство. Пусть u_n взяты из множества (3.5) и $u_n \rightarrow u$ в X . В силу (3.2)

$$\int_{Q_T} |D(u - u_n)|^p dx dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |D(u - u_n)|^p dx \right) dt \rightarrow 0.$$

Тогда (быть может, после перехода к подпоследовательности) для почти всех $t_0 \in [0, T]$

$$\int_\Omega |D(u - u_n)|^p dx \rightarrow 0,$$

а это, согласно (3.2), означает, что $Du_n(\cdot, t_0) \rightarrow Du(\cdot, t_0)$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Лемма доказана. $\square$

2. Особую роль играют свойства типа полунепрерывности снизу для монотонных операторов. Пусть $A_\varepsilon(x, \xi)$, $A(x, \xi)$ — каратеодориевы вектор-функции, такие, что

$$(A_\varepsilon(x, t, \xi) - A_\varepsilon(x, t, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0, \quad A_\varepsilon(x, t, 0) \equiv 0, \quad (3.7)_1$$

$$A_\varepsilon(x, t, \xi) \rightarrow A(x, t, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m \text{ п.в. по } x, t \in Q_T, \quad (3.7)_2$$

$$|A(x, t, \xi)| \leq c_1(|\xi|^{p(x)-1} + 1). \quad (3.7)_3$$

Лемма 3.2. *Пусть K — измеримое множество в Q_T . Предположим, что*

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v, \quad A_\varepsilon \equiv A_\varepsilon(x, t, v_\varepsilon) \rightharpoonup z \text{ в } L^1(K), \quad v \in L^{p(\cdot)}(K), \quad z \in L^{p'(\cdot)}(K),$$

и последовательность $A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ ограничена в $L^1(K)$. Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx dt \geq \int_K z \cdot v dx dt, \quad (3.8)$$

причем в случае равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx dt = \int_K z \cdot v dx dt \quad (3.9)$$

выполнено соотношение $z = A(x, t, v)$.

Эта лемма доказана в [11], [15]. Теперь можно дать обобщенную версию леммы 2.1, в которой вместо Du_ε берется v_ε . Предполагаем, что имеет место слабая сходимост $A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx dt \rightharpoonup d\mu$, $A_\varepsilon \equiv A_\varepsilon(x, t, v_\varepsilon)$. Заметим, что меры $A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx dt$ неотрицательны в силу (3.7)₁.

Доказательство леммы 2.1. Обозначим через $S \subset Q_T$ множество нулевой лебеговой меры, на котором сосредоточена сингулярная компонента μ^s меры μ , $\mu^s(Q_T \setminus S) = 0$. Согласно (2.5), для любого замкнутого множества $K \subset Q_T \setminus S$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K A_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx dt \leq \int_K d\mu = \int_K z \cdot v dx dt.$$

Отсюда и из (3.8) заключаем, что выполнено равенство (3.9), поэтому $z|_K = A(x, t, v)|_K$. Поскольку множество S имеет нулевую лебегову меру, этого достаточно для равенства $z = A(x, t, v)$ для п.в. $x, t \in Q_T$. Лемма доказана. $\square$

3. Для удобства чтения приведем доказательство восходящей к Хопфу [3] «параболической» леммы о компактности. В литературе хорошо известны абстрактные утверждения такого рода (лемма Обэна–Лионса, см. [2], [5], [12], [13]).

Лемма 3.3. Пусть семейство $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t)$ ограничено в пространствах $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ и $L^1(0, T, W^{1,\alpha}(\Omega))$, $\alpha > 2d/(d+2)$, а также слабо равномерно непрерывно в $L^2(\Omega)$. Тогда это семейство компактно в $L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$.

Доказательство. Рассмотрим конечномерные проекторы $P_n : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, удовлетворяющие условию

$$P_n f \rightarrow f \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для любого } f \in L^2(\Omega), \quad P_n L^2(\Omega) \subset W^{1,\alpha}(\Omega).$$

Сильная сходимост ь операторов всегда равномерна на компактах, вложение $W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ компактно, и поэтому для любого $\delta > 0$

$$\|P_n f - f\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \|f\|_{W^{1,\alpha}(\Omega)}, \quad f \in W^{1,\alpha}(\Omega),$$

при $n \geq N(\delta)$. Пусть

$$\|P_n\| \leq M, \quad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq M, \quad \|u_\varepsilon\|_{L^1(0,T,W^{1,\alpha}(\Omega))} \leq M.$$

Положив $u_\varepsilon^n = P_n u_\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon^n - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq 2M\delta \|u_\varepsilon\|_{W^{1,\alpha}(\Omega)}, \\ \int_0^T \int_\Omega |u_\varepsilon^n - u_\varepsilon|^2 dx dt &\leq 2M^2\delta \quad \text{при } n \geq N(\delta). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При фиксированном n семейство u_ε^n компактно в $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ в силу слабой равномерной непрерывности в $L^2(\Omega)$ исходного семейства u_ε . Поэтому утверждение леммы следует из (3.10) по критерию Хаусдорфа (множество компактно тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ найдется компактная δ -сеть). Лемма доказана. $\square$

4. Рассмотрим поведение добавок, возникающих в результате регуляризации.

Лемма 3.4. Пусть $v_\varepsilon \in (L^\gamma(Q_T))^m$, $\gamma > 1$, и последовательность $\varepsilon|v_\varepsilon|^\gamma$ ограничена в $L^1(Q_T)$. Тогда

$$\varepsilon|v_\varepsilon|^{\gamma-2}v_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{в } L^{\gamma'}(Q).$$

Доказательство. Очевидно, что последовательность $\varepsilon|v_\varepsilon|^{\gamma-2}v_\varepsilon$ ограничена в $L^{\gamma'}(Q_T)$. Для вектора $\varphi \in (C_0^\infty(Q_T))^m$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} \varepsilon|v_\varepsilon|^{\gamma-2}v_\varepsilon \cdot \varphi \, dx \, dt \right| &\leq \varepsilon \int_{Q_T} |v_\varepsilon|^{\gamma-1} |\varphi| \, dx \, dt \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{Q_T} |v_\varepsilon|^\gamma \, dx \, dt \right)^{1/\beta'} \left(\int_{Q_T} |\varphi|^\gamma \, dx \, dt \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C\varepsilon^{1-1/\gamma'} \left(\int_{Q_T} \varepsilon|v_\varepsilon|^\gamma \, dx \, dt \right)^{1/\gamma'} \leq C_1 \varepsilon^{1-1/\gamma'} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что и требуется. $\square$

§4. Электрореологические жидкости

Здесь будет доказана теорема 1.3.

1. Рассмотрим регуляризацию системы (1.1), в которой вместо $A = A(x, t, Du)$ стоит

$$A_\varepsilon \equiv A(x, t, Du_\varepsilon) + \varepsilon|Du_\varepsilon|^{\gamma-2}Du_\varepsilon, \quad \gamma = \max\{p_0, \beta\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.1)$$

где β взято из условия (1.10). В этом случае решение u_ε принадлежит пространству $L^\gamma(0, T, (W_0^{1,\gamma}(\Omega)^d))$ и выполнено энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \, dx \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} A_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon \, dx \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} f \cdot Du_\varepsilon \, dx \, dt, \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T. \quad (4.2)$$

Поэтому (с учетом неравенства $A_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon \geq 0$)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \, dx + 2 \int_{Q_T} A_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon \, dx \, dt \leq \int_{\Omega} u_0^2 \, dx + 2 \int_{Q_T} |f \cdot Du_\varepsilon| \, dx \, dt,$$

а используя неравенство Юнга

$$\int_{Q_T} |f \cdot Du_\varepsilon| \, dx \, dt \leq \delta \int_{Q_T} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt + C(\delta) \int_{Q_T} |f|^{p'} \, dx \, dt$$

и условие коэрцитивности (1.9)₂, получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \, dx + \int_{Q_T} (|Du_\varepsilon|^p + \varepsilon|Du_\varepsilon|^\gamma) \, dx \, dt \leq M < \infty, \quad (4.3)$$

где константа M не зависит от ε . Теперь из (1.9)₃ и неравенства $p \leq \gamma$ вытекает, что последовательность A_ε ограничена в $L^{\gamma'}(Q_T)$. Можно считать, что $A_\varepsilon \rightharpoonup z$ в $L^{\gamma'}(Q_T)$; при этом $z \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$, поскольку второе слагаемое в (4.1) слабо сходится к нулю в $L^{\gamma'}(\Omega)$ по лемме 3.4, а первое ограничено в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$.

Лемма 4.1. *Последовательность решений $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо равномерно непрерывна в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Поскольку $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq M$, достаточно проверить, что семейство скалярных функций

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon(x, t) \cdot \eta(x) \, dx$$

равностепенно непрерывно для любого $\eta \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$. Из тождества вида (1.2), полагая $g_\varepsilon = -A_\varepsilon + (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) + f$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_\varepsilon \cdot \eta \, dx \Big|_{t_0}^{t_1} \right| &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} g_\varepsilon \cdot \nabla \eta \, dx \, dt \right| \leq l \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (|A_\varepsilon| + |u_\varepsilon|^2 + |f|) \, dx \, dt \\ &\leq l \|A_\varepsilon\|_{L^{\gamma'}(Q_T)} ((t_1 - t_0)|\Omega|)^{1/\gamma} \\ &\quad + l M(t_1 - t_0) + l \|f\|_{L^{\gamma'}(Q_T)} ((t_1 - t_0)|\Omega|)^{1/\gamma} \leq l_1(t_1 - t_0)^{1/\gamma}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались ограниченностью последовательности A_ε в $L^{\gamma'}(Q_T)$. Лемма доказана. $\square$

Далее, так как u_ε принадлежит пространству $L^\gamma(0, T, (W_0^{1,\gamma}(\Omega))^d)$ и $\gamma \geq \beta$, то $u_\varepsilon \in X$ в силу вложения (3.6). Из оценки (4.3) видно, что семейство u_ε ограничено в X и $L^\infty(0, T, H)$. Без потери общности считаем, что

$$\begin{aligned} Du_\varepsilon &\rightharpoonup Du \text{ в } L^{p(\cdot)}(Q_T), \quad u \in X, \quad u \in L^\infty(0, T, H) \cap X \equiv \mathcal{E}, \\ u_\varepsilon(\cdot, t_0) &\rightarrow u(\cdot, t_0) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для п.в. } t_0 \in [0, T] \text{ (по лемме 3.3)}. \end{aligned}$$

2. Из энергетического равенства (4.2) вычтем тождество (1.2) с $A = A_\varepsilon$. С учетом равенства (2.9) получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \, dt &\leq \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} [A_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)] \cdot D\eta \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_\varepsilon - \eta)^2 \, dx \Big|_{t=t_0} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} f \cdot (Du_\varepsilon - D\eta) \, dx \, dt, \quad \eta \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Без потери общности считаем, что имеет место слабая сходимост мер (2.3). Нашей целью будет доказательство неравенства (2.8).

Предельный переход в (4.4) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} a \, dx \, dt &\leq \int_{\bar{\Omega} \times (t_0, t_1)} d\mu \leq \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} [z - (u \otimes u)] \cdot D\eta \, dx \, dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - \eta)^2 \, dx \Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} f \cdot (Du - D\eta) \, dx \, dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

для почти всех $t_0, t_1 \in [0, T]$. Здесь нет ничего нового по сравнению со сделанным в §2.

Проверим, что в (4.5) можно взять $\eta = u(x, t_0)$. Точку t_0 выбираем в соответствии с леммой 3.1, так что

$$\exists \eta_N \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega), \quad D\eta_N \rightarrow D\eta \text{ в } L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

при этом $\eta_N \rightarrow \eta$ в $L^2(\Omega)$ по непрерывности вложения $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Заметим, что $z, f \in L^1(0, T, L^{p'(\cdot)}(\Omega))$ в силу вложения вида (3.4) для $L^{p'(\cdot)}(Q_T)$, а $u \otimes u \in L^1(0, T, L^{p'(\cdot)}(\Omega))$, благодаря свойству (1.8). Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} (z - (u \otimes u) + f) \, dt \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$$

и предельный переход законен. Полагая $t_1 = t_0 + h$, $h > 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} a \, dt \, dx &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} [z - (u \otimes u)] \, dt \cdot D\eta \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f \cdot Du \, dt \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f \, dt \cdot D\eta \, dx, \quad \eta = u(\cdot, t_0). \end{aligned}$$

Считаем, что t_0 — точка Лебега для z , $u \otimes u$, f как функций из $L^1(0, T, L^{p'}(\cdot)(\Omega))$ и для $f \cdot Du$ как функции из $L^1(0, T, L^1(\Omega))$. В таком случае получим искомое неравенство (2.14), используя свойство (1.7). Теорема доказана.

Сформулируем результаты об энергетическом равенстве и свойствах сингулярной компоненты μ^s меры μ .

Теорема 4.2. *В условиях теоремы 1.3*

(i) *предельная мера допускает представление*

$$d\mu = A \cdot Du \, dx \, dt + d\mu^s, \quad A = A(x, t, Du),$$

где μ^s — сингулярная компонента;

(ii) *проекция сингулярной компоненты на временную ось есть сингулярная мера, т.е. имеет место свойство (2.18);*

(iii) *для п.в. $t \in [0, T]$ выполнены энергетические равенства*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} A \cdot Du \, dx \, d\tau + \int_{\bar{\Omega} \times [0, t)} d\mu^s &= \int_0^t \int_{\Omega} f \cdot Du \, dx \, d\tau, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} u^2 \, dx + \int_{\Omega_t} A \cdot Du \, dx &= \int_{\Omega_t} f \cdot Du \, dx. \end{aligned}$$

§5. Стационарное уравнение Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A - u \otimes u) &= f + \nabla \pi, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad A = |Du|^{p-2} Du, \quad f \in V^*. \end{aligned} \tag{5.1}$$

По определению $u \in V$ есть решение задачи (5.1), если

$$\int_{\Omega} [A - (u \otimes u)] \cdot D\varphi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot D\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_{0,\text{sol}}^{\infty}(\Omega), \tag{5.2}$$

где $f = \{f_{ij}\}$, $f_{ij} = f_{ji} \in L^{p'}(\Omega)$. При $p \geq p_2 = 3d/(d+2)$ существование решения доказано методом монотонных операторов, поскольку в этом случае система Навье–Стокса оказывается слабым возмущением системы Стокса, см. свойства (1.6), (1.7). Можно ли уменьшить нижнюю границу для показателя p (вопрос Лионса [2, гл. 2, 11.7])?

При $p < p_2$ легко обнаруживается следующее. В тождестве (5.2) нельзя положить $\varphi = u$, поскольку свойство (1.7) не гарантировано. В то же время из (5.2) видно, что функция

$$b(u, \varphi) \equiv \int_{\Omega} (u \otimes u) \cdot D\varphi \, dx,$$

первоначально заданная на векторах $\varphi \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega)$, по непрерывности определена и для $\varphi \in V$, в частности, для $\varphi = u$. В результате

$$\int_{\Omega} |Du|^p dx - b(u, u) = \int_{\Omega} f \cdot Du dx,$$

но столь важное равенство $b(u, u) = 0$ уже ничем не обеспечено, поэтому классическое энергетическое равенство, вообще говоря, не выполнено.

Теорема 5.1. *При $p > p_3 = 3d/(d+3)$ задача (5.1) имеет решение, для которого выполняется энергетическое неравенство*

$$\int_{\Omega} |Du|^p dx \leq \int_{\Omega} f \cdot Du dx. \quad (5.3)$$

Отметим, что новая граница p_3 связана с тем, что

$$\text{вложение } W^{1,p}(\Omega) \subset L^3(\Omega) \text{ компактно при } p > p_3, \quad (5.4)$$

так как $p_3^* = 3$. Для доказательства теоремы 5.1 рассматриваем регуляризованную задачу

$$\int_{\Omega} [A_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)] \cdot D\varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot D\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega), \quad (5.5)$$

в которой $A_\varepsilon = |Du_\varepsilon|^{p-2} Du_\varepsilon + \varepsilon |Du_\varepsilon|^{\beta-2} Du_\varepsilon$, где $\beta = \max\{p, p_2\}$. С помощью энергетического равенства

$$\int_{\Omega} A_\varepsilon \cdot Du_\varepsilon dx = \int_{\Omega} f \cdot Du_\varepsilon dx \quad (5.6)$$

легко убеждаемся, что последовательность решений u_ε ограничена в пространстве V , и можно считать, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в V . Последовательность A_ε ограничена в $L^{\beta'}(\Omega)$, но ее слабый предел z принадлежит $L^{p'}(\Omega)$. Кроме того, по теореме вложения $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \rightarrow u \otimes u$ в $L^1(\Omega)$. Поэтому из (5.5) получаем тождество

$$\int_{\Omega} [z - (u \otimes u)] \cdot D\varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot D\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega), \quad (5.7)$$

и остается установить равенство $z = A \equiv |Du|^{p-2} Du$. Это — ключевое место, и здесь требуются более тонкие средства по сравнению с использованными выше при доказательстве теоремы 1.2. Нужен специальный вариант так называемой леммы о компенсированной компактности, имеющих в литературе вариантов недостаточно. Дело в том, что хотя последовательность $A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$, как обычно, ограничена в $L^1(\Omega)$, играющая сходную роль последовательность $(u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon$, вообще говоря, не является ограниченной в $L^1(\Omega)$. По этой причине доказательство главного соотношения

$$A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup z \cdot \nabla u dx + d\mu^s \quad (5.8)$$

становится более сложным. Решающую роль играет следующая лемма.

Лемма 5.2. *Предположим, что*

- (i) u_ε — соленоидальный вектор, $u_\varepsilon \in W^{1,p_2}(\Omega)$ и $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$;
- (ii) w_ε — симметрическая матрица, $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L^{\beta'}(\Omega)$;

(iii) $\operatorname{div}(w_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)) = 0$ в гидромеханическом смысле, т. е.

$$\int_{\Omega} (w_\varepsilon - (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon)) \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega); \quad (5.9)$$

(iv) последовательность $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ ограничена в $L^1(\Omega)$;

(v) для показателей α, β выполнены неравенства

$$p_3 \equiv \frac{3d}{d+3} < \alpha \leq \beta < \alpha^* \equiv \frac{\alpha d}{d-\alpha} \quad (\text{последнее при } \alpha < d). \quad (5.10)$$

Тогда в смысле слабой сходимости мер на компакте $\bar{\Omega}$

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \rightharpoonup d\mu = w \cdot \nabla u \, dx + d\mu^s, \quad (5.11)$$

где μ^s — сингулярная (относительно меры Лебега) компонента меры μ .

Из условия (5.10) получаем

$$\gamma \equiv \min\{\beta', \alpha^*/2\} > (\alpha^*)'. \quad (5.12)$$

Отметим, что в условиях этой леммы последовательность $(u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon$ не обязательно ограничена в $L^1(\Omega)$, поэтому слагаемое $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ нельзя присоединить к w_ε , а нужно изучать его отдельно. Лемма 5.2 представляет собой «гидромеханическую» версию имеющегося в [14], [15] результата. Она будет доказана в §6.

С помощью этой леммы легко завершить доказательство теоремы 5.1. Действительно, положим $w_\varepsilon = A_\varepsilon - f$. Условия леммы выполняются с показателями $\alpha = p$, $\beta = \max\{p, p_2\}$, поскольку последовательность A_ε ограничена в $L^{\beta'}(\Omega)$. При этом условие $\beta < p^*$ легко проверяется, например, с помощью неравенства $p_2 < p_3^*$. Из (5.11) очевидным образом следует (5.8), поэтому лемма 2.1 обеспечивает ключевое равенство $z = A$. Таким образом,

$$A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \rightharpoonup |Du|^p \, dx + d\mu^s$$

в смысле слабой сходимости мер на компакте $\bar{\Omega}$. Переходом к пределу в (5.6) получим энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} |Du|^p \, dx + \int_{\bar{\Omega}} d\mu^s = \int_{\Omega} f \cdot Du \, dx,$$

из которого следует (5.3). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу (5.1), в которой тензор $A = A(x, Du)$ удовлетворяет в области Ω условиям вида (1.9), (1.10).

Теорема 5.3. Пусть для показателей α, β из (1.10) выполнено условие (5.10). Тогда задача (5.1) имеет решение, для которого выполнено энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega} A \cdot Du \, dx \leq \int_{\Omega} f \cdot Du \, dx.$$

Доказательство. Рассматриваем регуляризованное уравнение, в котором

$$A_\varepsilon = A(x, Du_\varepsilon) + \varepsilon |Du_\varepsilon|^{\beta-2} Du_\varepsilon.$$

Отметим, что в исходном неравенстве (1.10) показатель β формально можно увеличить, в частности, при необходимости считать, что $\beta \geq p_2$. Тогда все условия леммы 5.2 будут выполнены, поскольку семейство u_ε ограничено в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$,

а семейство A_ε ограничено в $L^{\beta'}(\Omega)$. Завершается доказательство теоремы 5.3 в точности так же, как и доказательство теоремы 5.1. $\square$

§6. Доказательство «гидромеханической» леммы

Здесь дается доказательство леммы 5.2.

Упростим исходное соотношение (5.9) введением давления.

Предложение 6.1. Пусть F — симметрическая матрица,

$$F \in L^\gamma(\Omega), \quad \int_\Omega F \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in C_{0,\text{sol}}^\infty(\Omega). \quad (6.1)$$

Тогда найдется такая функция $\pi \in L^\gamma(\Omega)$, что $\operatorname{div} F = \nabla \pi$, т. е.

$$\int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \pi I \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \pi \operatorname{div} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^d. \quad (6.2)$$

Функция π определена с точностью до константы, и справедлива оценка

$$\|\pi\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq c_0 \|F\|_{L^\gamma(\Omega)}, \quad \int_\Omega \pi \, dx = 0. \quad (6.3)$$

Доказательство. Очевидно, что равенство (6.1) по замыканию выполнено для $\psi \in (W_0^{1,\gamma'}(\Omega))^d$, $\operatorname{div} \psi = 0$. Воспользуемся известным результатом Боговского [16]: для любого $h \in L^{\gamma'}(\Omega)$, $\int_\Omega h \, dx = 0$, найдется такой вектор $b \in (W_0^{1,\gamma'}(\Omega))^d$, что

$$\operatorname{div} b = h, \quad \|\nabla b\|_{L^{\gamma'}(\Omega)} \leq c_0 \|h\|_{L^{\gamma'}(\Omega)}. \quad (6.4)$$

При этом соответствие $h \rightarrow b$ можно выбрать линейным.

Пусть $h = \operatorname{div} \varphi$, где $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^d$, и b — соответствующий вектор. Положив в (6.1) $\psi = \varphi - b$, получим

$$\int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega F \cdot \nabla b \, dx = l(h).$$

Из оценки (6.4) видно, что $l(h)$ — линейный непрерывный по $h \in L^{\gamma'}(\Omega)$ функционал. Следовательно, справедливо представление

$$l(h) = \int_\Omega \pi h \, dx \quad \text{с некоторым } \pi \in L^\gamma(\Omega),$$

которое и требуется для доказательства тождества (6.2). Оценка (6.3) также следует из указанного представления и оценки (6.4). Предложение доказано. $\square$

Возвращаясь к (5.9), заметим, что матрица $F_\varepsilon = w_\varepsilon - u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ ограничена в $L^\gamma(\Omega)$ в силу условия (ii) леммы 5.2 и вложения $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^\gamma(\Omega)$, которое следует из (5.12). Поэтому можно записать

$$\operatorname{div}(w_\varepsilon - u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) = \nabla \pi_\varepsilon,$$

последовательность π_ε ограничена в $L^\gamma(\Omega)$.

Без потери общности считаем, что

$$\pi_\varepsilon \rightharpoonup \pi \quad \text{в } L^\gamma(\Omega), \quad \int_\Omega \pi_\varepsilon \, dx = \int_\Omega \pi \, dx = 0. \quad (6.5)$$

Далее, положим

$$d\mu_\varepsilon = w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = w_\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}_\varepsilon, \quad \bar{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - t, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon &= \int_\Omega w_\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}_\varepsilon \varphi dx = \int_\Omega w_\varepsilon \cdot \nabla (\bar{u}_\varepsilon \varphi) dx - \int_\Omega w_\varepsilon \cdot (\bar{u}_\varepsilon \otimes \nabla \varphi) dx \\ &= \int_\Omega (u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) \cdot \nabla (\bar{u}_\varepsilon \varphi) dx + \int_\Omega \pi_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega w_\varepsilon \cdot (\bar{u}_\varepsilon \otimes \nabla \varphi) dx, \end{aligned} \quad (6.6)$$

поскольку $\operatorname{div}(\bar{u}_\varepsilon \varphi) = \bar{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi$. Преобразуем первое слагаемое в (6.6), опуская пока индекс ε . Для $u \in (W^{1,p_2}(\Omega))^d$, $\operatorname{div} u = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} - \int_\Omega (u \otimes u) \cdot \nabla (\bar{u} \varphi) dx &= \int_\Omega u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \bar{u}_j \varphi dx = \int_\Omega u_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \bar{u}_j \varphi dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{u}_j \bar{u}_j \varphi] dx - \frac{1}{2} \int_\Omega u_i \bar{u}_j \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega (\bar{u})^2 u \cdot \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

В результате первое слагаемое в (6.6) примет вид

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (\bar{u}_\varepsilon)^2 u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx,$$

и теперь в нем уже возможен предельный переход в силу компактности вложения $W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^3(\Omega)$, так как $3 < \alpha^*$, см. (5.4). Предельный переход во втором и третьем слагаемых в (6.6) очевиден, поскольку $w_\varepsilon \rightharpoonup w$, $\pi_\varepsilon \rightharpoonup \pi$ слабо в $L^{\beta'}(\Omega)$ и в $L^\gamma(\Omega)$, а $\bar{u}_\varepsilon \rightarrow \bar{u}$ сильно в $L^\beta(\Omega)$ и $L^\gamma(\Omega)$, благодаря (5.10), (5.12) и теореме вложения Соболева. Поэтому

$$\int_\Omega \varphi d\mu = -\frac{1}{2} \int_\Omega (\bar{u})^2 u \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \pi \bar{u} \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega w \cdot (\bar{u} \otimes \nabla \varphi) dx. \quad (6.7)$$

Пусть $B_r(x_0)$ — шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \Omega$, $|B_r|$ — его объем. Если $f \in L^\gamma(\Omega)$, $\gamma \geq 1$, то для почти всех $x_0 \in \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)|^\gamma dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(0)} |f(x_0 + ry) - f(x_0)|^\gamma dy = 0,$$

в частности, для $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(0)} f(x_0 + ry) \varphi(y) dy = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} f(x) \varphi_r(x) dx = f(x_0) \int_{B_1(0)} \varphi(y) dy,$$

где $\varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}(x - x_0))$. Из (6.7) следует, что

$$\begin{aligned} J \equiv \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \varphi_r d\mu &= \frac{1}{2|B_r|} \int_{B_r(x_0)} (\bar{u})^2 u \cdot \nabla \varphi_r dx + \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \pi \bar{u} \cdot \nabla \varphi_r dx \\ &\quad - \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} w \cdot (\bar{u} \otimes \nabla \varphi_r) dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Считаем, что $t = |B_r|^{-1} \int_{B_r(x_0)} u \, dx$, x_0 — точка Лебега функций $|u|^3$, ∇u , w , π , и пусть $k_0 = \max |\nabla \varphi|$. Покажем, что $\lim_{r \rightarrow 0} J_1 = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{k_0 r}{2|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |u| \left| \frac{\bar{u}}{r} \right|^2 dx \\ &\leq \frac{rk_0}{2} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |u|^3 dx \right)^{1/3} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \left| \frac{\bar{u}}{r} \right|^3 dx \right)^{2/3} \\ &\leq \frac{rk_1}{2} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |u|^3 dx \right)^{1/2} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^\alpha dx \right)^{2/\alpha} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера, неравенством Пуанкаре–Соболева (где использовано условие $\alpha^* \geq 3$) и свойствами точек Лебега.

Рассмотрим слагаемое J_2 . Так как $\int_{B_r(x_0)} \bar{u} \cdot \nabla \varphi_r \, dx = 0$, поскольку $\operatorname{div} \bar{u} = 0$, то

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} (\pi - C) \bar{u} \cdot \nabla \varphi_r \, dx, \quad C = \pi(x_0), \\ |J_2| &\leq \frac{k_0}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\pi - C| \left| \frac{\bar{u}}{r} \right| dx \\ &\leq k_0 \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\pi - C|^{\beta'} dx \right)^{1/\beta'} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \left| \frac{\bar{u}}{r} \right|^\beta dx \right)^{1/\beta} \\ &\leq k_1 \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\pi - C|^{\beta'} dx \right)^{1/\beta'} \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $r \rightarrow 0$. Здесь также использовано условие $\beta < \alpha^*$. Далее, положив $A = w(x_0)$, имеем

$$J_3 = -\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} (w - A) \cdot (\bar{u} \times \nabla \varphi_r) \, dx - \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} A \cdot (\bar{u} \times \nabla \varphi_r) \, dx = I_1 + I_2.$$

Соотношение $\lim_{r \rightarrow 0} I_1 = 0$ устанавливается тем же способом, что и выше. Наконец, по формуле Грина и свойствам точки Лебега

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} A \cdot \nabla \bar{u} \varphi_r \, dx = A \cdot \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \varphi_r \nabla u \, dx, \\ \lim_{r \rightarrow 0} I_2 &= A \cdot \nabla u(x_0) \int_{B_1(0)} \varphi \, dy. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} J = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \varphi_r \, d\mu = w(x_0) \cdot \nabla u(x_0) \int_{B_1(0)} \varphi \, dy \quad \text{для п.в. } x_0 \in \Omega. \quad (6.8)$$

Остается воспользоваться классической теоремой о дифференцировании меры μ по мере Лебега, см. [17]. Приведем эту теорему в подходящей формулировке. Определим в единичном шаре $B_1(0)$ меру μ_{r,x_0} равенством

$$\int_{B_1(0)} \varphi \, d\mu_{r,x_0} \equiv \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \varphi_r \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_1(0)), \quad \varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}(x - x_0)).$$

Теорема о дифференцировании. Для почти всех $x_0 \in \Omega$ (по мере Лебега) имеет место слабая сходимость

$$\mu_{r,x_0} \rightharpoonup a(x_0)dx \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $a(x)dx$ — абсолютно непрерывная компонента меры μ . Другими словами,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \varphi_r d\mu = a(x_0) \int_{B_1(0)} \varphi dy.$$

Теперь из (6.8) видно, что $a(x) = w(x) \cdot \nabla u(x)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О. А. Ладыженская, *О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач*, Труды МИАН, **102** (1967), 85–104.
- [2] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [3] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nach., **4** (1950–1951), 213–231.
- [4] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., **63**:1 (1934), 193–248.
- [5] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Růžička, *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 13, Chapman and Hall, London, 1996.
- [6] J. Málek, J. Nečas, M. Růžička, *On weak solution to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains. The case $p \geq 2$* , Adv. Differential Equations, **6**:3 (2001), 257–302.
- [7] M. Růžička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin–New York, 2000.
- [8] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [9] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.
- [10] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные задачи*, Мир, М., 1979.
- [11] В. В. Жиков, *Разрешимость трехмерной задачи о термисторе*, Труды МИРАН, **261** (2008), 101–114.
- [12] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, изд-во МГУ, М., 1978.
- [13] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса*, Мир, М., 1981.
- [14] В. В. Жиков, *К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях*, Докл. РАН, **420**:3 (2008), 300–305.
- [15] В. В. Жиков, *К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях*, Функц. анализ и его прил., **43**:2 (2009), 19–38.
- [16] М. Е. Боговский, *Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды*, Докл. АН СССР, **248** (1979), 1037–1040.
- [17] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.