Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ильин, О спектре оператора Стокса, *Функци. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 4, 14–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 08:39:45

О спектре оператора Стокса*

© 2009. А. А. Ильин

Доказываются нижние оценки типа Ли–Яу для собственных значений оператора Стокса и приводятся их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса.

§1. Введение

Монотонно упорядоченные собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$-\Delta \varphi_k = \mu_k \varphi_k, \quad \varphi_k|_{\partial\Omega} = 0$$

удовлетворяют классической асимптотической формуле Г. Вейля

$$\mu_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $|\Omega|$ обозначает n -мерную меру Лебега области Ω , а $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \sim \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n} \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

На самом деле

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (1.1)$$

Эта замечательная оценка снизу была получена в [16] и выполняется для $m = 1, 2, \dots$ и для любой области Ω с $|\Omega| < \infty$.

В настоящей работе мы доказываем оценки типа Ли–Яу для спектра $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ оператора Стокса. Соответствующая спектральная задача записывается так:

$$\begin{aligned} -\Delta v_k + \nabla p_k &= \lambda_k v_k, \\ \operatorname{div} v_k &= 0, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega| < \infty$, $n \geq 2$. Асимптотическое поведение собственных значений известно (см. [1] для $n = 3$ и [19] для $n \geq 2$):

$$\lambda_k \sim \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-01-00288 и 08-01-00099, и Программы РАН №1 «Современные проблемы теоретической математики».

Основной результат работы, доказываемый в §2, состоит в том, что для спектра оператора Стокса справедлива следующая точная оценка снизу:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n(n-1)|\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (1.4)$$

Кроме того, мы показываем, что $\lambda_1 > \mu_1$. Затем в §3 мы применяем оценку (1.4) с $n = 2$ и неравенство Либба–Тирринга с улучшенной постоянной для оценки размерности аттракторов уравнений Навье–Стокса с краевыми условиями Дирихле.

§2. Оценки Ли–Яу для спектра оператора Стокса

Всюду Ω обозначает открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с конечной n -мерной мерой Лебега $|\Omega|$,

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad |\Omega| < \infty.$$

Напомним основные факты из теории уравнений Навье–Стокса ([5], [13], [22], [24]). Обозначим через $\mathcal{V}$ множество гладких бездивергентных вектор-функций с компактными носителями,

$$\mathcal{V} = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, u \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\},$$

и обозначим через H и V замыкания множества $\mathcal{V}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ соответственно. Ортогональный проектор Гельмгольца–Лере P отображает $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на H , $P : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow H$. При этом (см. [22])

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = H \oplus H^\perp, \quad H^\perp = \{u \in \mathbf{L}_2(\Omega), u = \nabla p, p \in L_2^{\text{loc}}(\Omega)\},$$

$$V \subseteq \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\},$$

где последнее включение переходит в равенство в случае ограниченной области Ω с липшицевой границей.

Оператор Стокса A определяется равенством

$$(Au, v) = (\nabla u, \nabla v) \quad \text{для всех } u, v \in V \quad (2.1)$$

и осуществляет изоморфизм между V и сопряженным пространством V' . Для достаточно гладкого u

$$Au = -P\Delta u.$$

Оператор Стокса A — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в H с компактным обратным, причем V совпадает с областью определения оператора $A^{1/2}$. Он обладает полной в H и V ортонормированной системой собственных функций $\{v_k\}_{k=1}^\infty \in V$ с соответствующими собственными значениями $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$:

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad (2.2)$$

Умножая (2.2) скалярно на v_k , в силу ортонормированности и равенства (2.1) получаем

$$\lambda_k = \|\nabla v_k\|^2. \quad (2.3)$$

Если Ω — ограниченная область с гладкой границей, задача на собственные значения (2.2) переходит в (1.2).

Наша главная цель состоит в доказательстве равномерных оценок преобразований Фурье ортонормированных семейств бездивергентных вектор-функций (лемма 2.4).

Для скалярной функции $\varphi \in L_2(\Omega)$ мы обозначим через $\widehat{\varphi}(\xi)$ преобразование Фурье этой функции, продолженной нулем вне Ω ,

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\xi x} \varphi(x) dx.$$

Лемма 2.1. Пусть семейство $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ скалярных функций φ_k ортонормировано в $L_2(\Omega)$, $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2 \leq |\Omega|. \quad (2.4)$$

Доказательство. Обозначая через $*$ комплексное сопряжение, в силу ортонормированности имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \left(e^{-i\xi x} - \sum_{k=1}^m \widehat{\varphi}_k(\xi) \varphi_k(x) \right) \left(e^{-i\xi x} - \sum_{l=1}^m \widehat{\varphi}_l(\xi) \varphi_l(x) \right)^* dx \\ &= |\Omega| - \sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Замечание 2.1. Неравенство (2.4) есть не что иное, как неравенство Бесселя, примененное к функции $h(x) = e^{-i\xi x}|_{x \in \Omega}$ с $\|h\|_{L_2}^2 = |\Omega|$ и ортонормированной системе $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ [16].

Далее, заметим, что лемма 2.1 остается справедливой, если условие ортонормированности заменить условием субортонормированности.

Определение 2.1. Семейство $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ называется субортонормированным, если для любого $\zeta \in \mathbb{C}^m$

$$\sum_{i,j=1}^m \zeta_i \zeta_j^* (\varphi_i, \varphi_j) \leq \sum_{j=1}^m |\zeta_j|^2. \quad (2.5)$$

Замечание 2.2. Удобное и гибкое понятие субортонормированности было введено в [9] с действительными $\zeta \in \mathbb{R}^m$ и эквивалентно формально более общему определению 2.1.

Лемма 2.2. Пусть семейство $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ скалярных функций φ_k субортонормировано в $L_2(\Omega)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2 \leq |\Omega|. \quad (2.6)$$

Доказательство. Как и в лемме 2.1, используя (2.5) вместо условия ортонормированности, получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \left(e^{-i\xi x} - \sum_{k=1}^m \widehat{\varphi}_k(\xi) \varphi_k(x) \right) \left(e^{-i\xi x} - \sum_{l=1}^m \widehat{\varphi}_l(\xi) \varphi_l(x) \right)^* dx = \\ &= |\Omega| - 2 \sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2 + \sum_{k,l=1}^m \widehat{\varphi}_k(\xi) \widehat{\varphi}_l(\xi)^* (\varphi_k, \varphi_l) \leq |\Omega| - \sum_{k=1}^m |\widehat{\varphi}_k(\xi)|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем теперь к ортонормированным семействам вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m$, где $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^n)$.

Лемма 2.3. Пусть семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m$ ортонормировано в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, и пусть Q — произвольный ортопроектор. Тогда семейство $\{Qu_k\}_{k=1}^m$ субортонормировано.

Доказательство. Положим $u_k = v_k + w_k$, где $v_k = Qu_k$ и $w_k = (I - Q)u_k$. Тогда $(v_k, w_l) = 0$ и $(u_k, u_l) = (v_k, v_l) + (w_k, w_l)$ для всех $k, l = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^m \zeta_k \zeta_l^* (v_k, v_l) &= \sum_{k,l=1}^m \zeta_k \zeta_l^* (u_k, u_l) - \sum_{k,l=1}^m \zeta_k \zeta_l^* (w_k, w_l) \\ &= \sum_{k=1}^m |\zeta_k|^2 - \left\| \sum_{k=1}^m \zeta_k w_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^m |\zeta_k|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 2.1. Если семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m$ ортонормировано в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2 \leq n |\Omega|. \quad (2.7)$$

Доказательство. В силу леммы 2.3 семейство $\{u_k^j\}_{k=1}^m$ субортонормировано при каждом $j = 1, \dots, n$, и (2.7) следует из леммы 2.2. $\square$

Следующая лемма занимает центральное место в получении нижних оценок для спектра и говорит о том, что при условии бездивергентности оценка (2.7) переходит в (2.8).

Лемма 2.4. Если семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m$ ортонормировано, $u_k \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} u_k = 0$, $k = 1, \dots, m$, то

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2 \leq (n-1) |\Omega|. \quad (2.8)$$

Доказательство. Сначала заметим, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi \cdot \widehat{u}_k(\xi) = \xi \cdot \int e^{-i\xi x} u_k(x) dx = i \int u_k \cdot \nabla_x e^{-i\xi x} dx = -i \int e^{-i\xi x} \operatorname{div} u_k dx = 0.$$

Пусть

$$\xi_0 = (a, 0, \dots, 0), \quad a \neq 0. \quad (2.9)$$

Так как $\xi_0 \cdot \widehat{u}_k(\xi_0) = 0$, то $\widehat{u}_k^1(\xi_0) = 0$ для $k = 1, \dots, m$, что в силу леммы 2.3 и леммы 2.2 доказывает оценку (2.8) для ξ вида (2.9):

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi_0)|^2 = \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k^j(\xi_0)|^2 \leq (n-1)|\Omega|.$$

Общий случай сводится к случаю (2.9) с помощью подходящего вращения. Пусть ρ — вращение пространства $\mathbb{R}^n$ вокруг начала координат, представленное ортогональной $(n \times n)$ -матрицей ρ с элементами ρ_{ij} . Для заданной вектор-функции $u(x) = (u^1(x), \dots, u^n(x))$ рассмотрим вектор-функцию

$$u_\rho(x) := \rho u(\rho^{-1}x), \quad x \in \rho\Omega.$$

Вычислим ее дивергенцию. Полагая $\rho^{-1}x = y$, $y_l = \sum_k (\rho^{-1})_{lk} x_k$, имеем

$$\frac{\partial u_\rho^i(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \rho_{ij} u^j(y) \right) = \sum_j \rho_{ij} \sum_l \frac{\partial u^j(y)}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = \sum_j \rho_{ij} \sum_l \frac{\partial u^j(y)}{\partial y_l} (\rho^{-1})_{li}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} u_\rho(x) = \sum_{i,j,l} \rho_{ij} \frac{\partial u^j(y)}{\partial y_l} (\rho^{-1})_{li} = \sum_{j,l} \frac{\partial u^j(y)}{\partial y_l} \sum_i (\rho^{-1})_{li} \rho_{ij} = \operatorname{div} u(y).$$

При этом $(u_\rho, v_\rho) = \int \rho u(\rho^{-1}x) \cdot \rho v(\rho^{-1}x) dx = \int u(\rho^{-1}x) \cdot v(\rho^{-1}x) dx = (u, v)$. Из сказанного выше следует, что семейство $\{(u_k)_\rho\}_{k=1}^m$ принадлежит $\mathbf{H}_0^1(\rho\Omega)$, является ортонормированным и $\operatorname{div}(u_k)_\rho = 0$.

Теперь мы покажем, что

$$\widehat{u}_\rho(\xi) = \rho \widehat{u}(\rho^{-1}\xi). \quad (2.10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u_\rho)(\xi) &= \widehat{u}_\rho(\xi) = \int e^{i\xi \cdot x} u_\rho(x) dx = \rho \int e^{i\xi \cdot x} u(\rho^{-1}x) dx \\ &= \rho \int e^{i\xi \cdot \rho y} u(y) dy = \rho \int e^{i\rho^{-1}\xi \cdot y} u(y) dy = \rho \widehat{u}(\rho^{-1}\xi). \end{aligned}$$

Зафиксируем теперь произвольный элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, и положим $\xi_0 = (|\xi|, 0, \dots, 0)$. Пусть ρ — вращение, такое, что $\xi = \rho^{-1}\xi_0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\rho^{-1}\xi_0)|^2 = \sum_{k=1}^m |\rho^{-1}(\widehat{u_k})_\rho(\xi_0)|^2 = \sum_{k=1}^m |(\widehat{u_k})_\rho(\xi_0)|^2 \leq (n-1)|\Omega|,$$

где мы использовали (2.10) и тот факт, что неравенство (2.8) было доказано для ξ вида (2.9) для любого ортонормированного семейства бездивергентных вектор-функций. Наконец, оценка (2.8) продолжается в точку $\xi = 0$ по непрерывности (заметим, что $u_k \in \mathbf{L}_1(\Omega)$, поскольку $|\Omega| < \infty$, и, стало быть, преобразования Фурье $\widehat{u}_k$ непрерывны.) $\square$

Замечание 2.3. В действительности (2.8) выполняется при более слабом условии, что $u_k \in H$, $k = 1, \dots, m$.

Нам понадобится следующая лемма из [16], доказательство которой мы приведем для полноты изложения.

Лемма 2.5 (см. [16]). Пусть функция $f(\xi)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям

$$0 \leq f(\xi) \leq M_1 \quad \text{и} \quad \int |\xi|^2 f(\xi) d\xi \leq M_2.$$

Тогда

$$\int f(\xi) d\xi \leq (M_1 \omega_n)^{2/(2+n)} (M_2 (2+n)/n)^{n/(2+n)}. \quad (2.11)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что (2.11) превращается в равенство для умноженной на константу характеристической функции $g(\xi)$ любого шара в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Положим

$$g(\xi) = \begin{cases} M_1, & |\xi| \leq R, \\ 0, & |\xi| > R. \end{cases}$$

Тогда $(|\xi|^2 - R^2)(f(\xi) - g(\xi)) \geq 0$, так что

$$R^2 \int (f(\xi) - g(\xi)) d\xi \leq \int |\xi|^2 (f(\xi) - g(\xi)) d\xi \leq 0,$$

где второе неравенство будет выполнено, если R определено равенством

$$\int |\xi|^2 g(\xi) d\xi = M_2.$$

Поэтому

$$\int f(\xi) d\xi \leq \int g(\xi) d\xi = (M_1 \omega_n)^{2/(2+n)} (M_2 (2+n)/n)^{n/(2+n)}. \quad \square$$

Теперь сформулируем основные результаты.

Теорема 2.1. Пусть семейство вектор-функций $\{u_k\}_{k=1}^m \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ортонормировано и при этом $\operatorname{div} u_k = 0$, $k = 1, \dots, m$. Тогда

$$\sum_{k=1}^m \|\nabla u_k\|^2 \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Положим

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^m |\widehat{u}_k(\xi)|^2.$$

В силу леммы 2.4 и теоремы Планшереля для f выполнены условия

- (1) $0 \leq f(\xi) \leq (n-1)|\Omega|$;
- (2) $\int f(\xi) d\xi = (2\pi)^n m$;
- (3) $\int |\xi|^2 f(\xi) d\xi = (2\pi)^n \sum_{k=1}^m \|\nabla u_k\|^2$.

Используя лемму 2.5, получаем

$$(2\pi)^n m = \int f(\xi) d\xi \leq ((n-1)|\Omega| \omega_n)^{2/(2+n)} \left((2\pi)^n \sum_{k=1}^m \|\nabla u_k\|^2 \frac{2+n}{n} \right)^{n/(2+n)},$$

а это и есть (2.12). □

Теорема 2.2. Собственные значения λ_k оператора Стокса удовлетворяют следующей оценке снизу:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n(n-1)|\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Поскольку $V \subseteq \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$, мы можем выбрать первые m собственных векторов в качестве u_k в (2.12) и, учитывая (2.3), получаем (2.13). $\square$

Замечание 2.4. В работах [14], [15] было сделано замечательное наблюдение, что оценка (1.1) эквивалентна (через посредство преобразования Лежандра) неравенству Березина для оператора Лапласа. Эти рассуждения проходят и для оператора Стокса. Пусть система $\{u_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ортонормирована, $\operatorname{div} u_k = 0$, и пусть числа $\nu_k = \|\nabla u_k\|^2$ упорядочены по возрастанию. Тогда для $x \geq 0$ и $\sigma \geq 1$ справедливо неравенство Березина для оператора Стокса:

$$\sum_k (x - \nu_k)_+^\sigma \leq (n-1) L_{\sigma,n}^{\text{cl}} |\Omega| x^{\sigma+n/2}, \quad (2.14)$$

где $f_\pm = (|f| \pm f)/2$, а

$$L_{\sigma,n}^{\text{cl}} := \frac{\Gamma(\sigma+1)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\sigma+n/2+1)} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |\xi|^2)_+^\sigma d\xi. \quad (2.15)$$

Действительно,

$$(2\pi)^{-n} \int |\widehat{u}_k(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

откуда в силу неравенства $(\int f)_\pm \leq \int f_\pm$ и неравенства Гёльдера следует, что

$$(x - \nu_k)_+^\sigma = \left(\int (x - |\xi|^2) \frac{|\widehat{u}_k(\xi)|^2}{(2\pi)^n} d\xi \right)_+^\sigma \leq \int (x - |\xi|^2)_+^\sigma \frac{|\widehat{u}_k(\xi)|^2}{(2\pi)^n} d\xi.$$

Поэтому, используя основную оценку (2.8) и учитывая (2.15), получаем (2.14).

Положим в (2.14) $\sigma = 1$, и пусть

$$f(x) = \sum_k (x - \nu_k)_+ \quad \text{и} \quad g(x) = (n-1) L_{1,n}^{\text{cl}} |\Omega| x^{1+n/2}.$$

Обе функции определены на $\mathbb{R}^+$ и выпуклы. Применим преобразование Лежандра $\tilde{h}(p) = \sup_{x \geq 0} (px - h(x))$. Для кусочно-линейной функции f преобразование Лежандра вычисляется непосредственно и является кусочно-линейной функцией

$$\tilde{f}(p) = (p - [p])\nu_{[p]+1} + \sum_{k=1}^{[p]} \nu_k, \quad p \geq 0,$$

а преобразование Лежандра функции g есть

$$\tilde{g}(p) = \frac{2}{2+n} ((n-1) L_{0,n}^{\text{cl}} |\Omega|)^{-2/n} p^{1+2/n}, \quad p \geq 0,$$

где надо было учесть, что $L_{1,n}^{\text{cl}} = \frac{2}{2+n} L_{0,n}^{\text{cl}}$. Так как $f(x) \leq g(x)$, то $\tilde{f}(p) \geq \tilde{g}(p)$. При $p = m \in \mathbb{N}$ последнее неравенство есть в точности (2.12) ($L_{0,n}^{\text{cl}} = \omega_n/(2\pi)^n$).

В обратную сторону. Пусть выполнено (2.12), где ν_k не убывают. В силу выпуклости правой части можно считать, что (2.12) выполнено при всех $m = p \in \mathbb{R}^+$, если левую часть интерпретировать как кусочно-линейную выпуклую функцию $\tilde{f}(p)$, а именно $\tilde{f}(p) \geq \tilde{g}(p)$. Применяя еще раз преобразование Лежандра, получаем $f(x) = \tilde{f}(x) \leq \tilde{g}(x) = g(x)$, т.е. $(2.14)_{\sigma=1}$. Итак, $(2.12) \iff (2.14)_{\sigma=1}$. (Инволютивность преобразования Лежандра для гладких выпуклых функций хорошо известна, а для кусочно-линейных проверяется непосредственно.)

Замечание 2.5. Более слабые оценки снизу

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n n |\Omega|} \right)^{2/n} m^{1+2/n},$$

основанные на неравенстве (2.7), были ранее получены в [10] для $n = 2, 3$.

Следствие 2.2. Каждое собственное значение λ_k удовлетворяет неравенству

$$\lambda_k \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n}, \quad (2.16)$$

а для λ_1 выполняется неравенство

$$\lambda_1 > \mu_1 \geq \frac{n}{2+n} \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n |\Omega|} \right)^{2/n}. \quad (2.17)$$

Доказательство. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ неубывающая, и (2.16) очевидно. Так как $V \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, то

$$\mu_1 = \min_{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \leq \min_{u \in V} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} = \lambda_1,$$

и второе неравенство в (2.17) есть (1.1) с $m = 1$. Докажем, что $\lambda_1 > \mu_1$. Предположим, что $\mu_1 = \|\nabla u_0\|^2 / \|u_0\|^2$ для некоторого $u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Хорошо известно, что μ_1 — простое собственное значение, которому соответствует единственная (с точностью до множителя) собственная функция φ_1 . Поэтому u_0 имеет вид $u_0(x) = (l_1 \varphi_1(x), \dots, l_n \varphi_1(x))$ для некоторых постоянных $l_1, \dots, l_n$, $|l| > 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $|l| = 1$. Теперь $\lambda_1 = \mu_1$ тогда и только тогда, когда для указанного u_0 дополнительно выполняется $\operatorname{div} u_0 = 0$. Поэтому $\partial \varphi_1 / \partial l = \operatorname{div} u_0 = 0$, и φ_1 постоянна вдоль прямых, параллельных l , что невозможно. $\square$

Замечание 2.6. В заключение заметим, что, следуя [20], оценки (2.16) и (2.17) можно улучшить для так называемых $\mathbb{R}^n$ -покрывающих областей Ω , т.е. таких областей, копиями которых можно замостить все $\mathbb{R}^n$ без пропусков и наложений. А именно, если Ω есть $\mathbb{R}^n$ -покрывающая область, то для каждого k

$$\lambda_k \geq \left(\frac{(2\pi)^n}{\omega_n (n-1) |\Omega|} \right)^{2/n} k^{2/n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

§3. Приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса

Запишем двумерную систему Навье–Стокса как эволюционное уравнение в H

$$\partial_t u + \nu Au + B(u, u) = f, \quad u(0) = u_0, \quad (3.1)$$

где $A = -P\Delta$ — оператор Стокса, а $B(u, v) = P(\sum_{i=1}^2 u^i \partial_i v)$. Уравнение (3.1) порождает полугруппу $S_t: H \rightarrow H$, $S_t u_0 = u(t)$, обладающую компактным глобальным аттрактором $\mathcal{A} \in H$ (см., например, [2], [5], [7], [24] в случае гладкой границы $\partial\Omega$ и [12], [21] в случае негладкой границы). Аттрактор $\mathcal{A}$ есть максимальное строго инвариантное компактное множество.

Теорема 3.1. *Фрактальная размерность аттрактора $\mathcal{A}$ удовлетворяет оценке*

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{(8\sqrt{3}\pi)^{1/2}} (\lambda_1 |\Omega|)^{1/2} \frac{\|f\|}{\lambda_1 \nu^2} < \frac{1}{4\pi^{3/4}} \frac{\|f\| |\Omega|}{\nu^2}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Так как для доказательства оценки (3.2) мы должны лишь использовать в теореме 4.1 из [3] новые улучшенные постоянные из приводимого ниже неравенства Либа–Тирринга (3.6) и нижней оценки (2.12) при $n = 2$, то мы приведем только краткую схему доказательства. Полугруппа S_t равномерно дифференцируема в H с дифференциалом $L(t, u_0): \xi \rightarrow U(t) \in H$, где $U(t)$ есть решение уравнения в вариациях

$$\partial_t U = -\nu AU - B(U, u(t)) - B(u(t), U) =: \mathcal{L}(t, u_0)U, \quad U(0) = \xi. \quad (3.3)$$

Оценим числа $q(m)$ (суммы первых m глобальных показателей Ляпунова):

$$q(m) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{\{v_j\}_{j=1}^m \in V} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}(\tau, u_0) v_j, v_j) d\tau, \quad (3.4)$$

где $\{v_j\}_{j=1}^m \in V$ — произвольная ортонормированная система размерности m (см. [2]–[5], [24]),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}(t, u_0) v_j, v_j) &= -\nu \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 - \int \sum_{j=1}^m \sum_{k,i=1}^2 v_j^k \partial_k u^i v_j^i dx \\ &\leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 + 2^{-1/2} \int \rho(x) |\nabla u(t, x)| dx \leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 + 2^{-1/2} \|\rho\| \|\nabla u\| \\ &\leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 + 2^{-1/2} \left(c_{\text{LT}} \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 \right)^{1/2} \|\nabla u(t)\| \\ &\leq -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2 + \frac{c_{\text{LT}}}{4\nu} \|\nabla u(t)\|^2 \leq -\frac{\nu c_{\text{sp}} m^2}{2|\Omega|} + \frac{c_{\text{LT}}}{4\nu} \|\nabla u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство $|\sum_{k,i=1}^2 v^k \partial_k u^i v^i| = |\nabla u \cdot \nabla u| \leq 2^{-1/2} |\nabla u| |v|^2$ [3, лемма 4.1], затем (3.6) и, наконец, неравенство (2.12), записанное для $n = 2$ и ортонормированного семейства $\{v_j\}_{j=1}^m \in V$ в виде

$$\sum_{k=1}^m \|\nabla v_k\|^2 \geq \frac{c_{\text{sp}} m^2}{|\Omega|}, \quad c_{\text{sp}} = 2\pi. \quad (3.5)$$

Используя известную оценку

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{t} \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{\|f\|^2}{\lambda_1 \nu^2} = \lambda_1 \nu^2 G^2, \quad G = \frac{\|f\|}{\lambda_1 \nu^2},$$

решений, лежащих на аттракторе, для чисел $q(m)$ получаем

$$q(m) \leq -\frac{\nu c_{\text{sp}} m^2}{2|\Omega|} + \frac{\nu \lambda_1 c_{\text{LT}} G^2}{4}.$$

В работах [4] (см. также [5], [24]) и [3] соответственно было доказано, что хаусдорфова и фрактальная размерности аттрактора $\mathcal{A}$ ограничены числом m_* , для которого $q(m_*) = 0$. Отсюда следует, что

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \left(\frac{c_{\text{LT}}}{2c_{\text{sp}}} \right)^{1/2} (\lambda_1 |\Omega|)^{1/2} G,$$

а это с учетом (3.6) и (3.5) доказывает первое неравенство в (3.2); второе неравенство следует из (2.17) с $n = 2$: $\lambda_1 > 2\pi/|\Omega|$. $\square$

Теорема 3.2. *Предположим, что семейство $\{v_j\}_{j=1}^m \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, ортонормировано и $\operatorname{div} v_j = 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда для $\rho(x) = \sum_{k=1}^m |v_k(x)|^2$ выполнено неравенство*

$$\|\rho\|^2 = \int \left(\sum_{j=1}^m |v_j(x)|^2 \right)^2 dx \leq c_{\text{LT}} \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2, \quad c_{\text{LT}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (3.6)$$

Доказательство. В [3], [11] показано, что наилучшая постоянная c_{LT} в (3.6) удовлетворяет $c_{\text{LT}} \leq 4L_{1,2}$, где $L_{1,2}$ — постоянная из спектральной оценки Либа–Тирринга [18]

$$\sum_{\mu_j < 0} |\mu_j|^\gamma \leq L_{\gamma,n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{\gamma+n/2} dx$$

для отрицательных собственных значений скалярного оператора Шрёдингера $-\Delta - f$ в $\mathbb{R}^n$, $f \geq 0$. Для $L_{\gamma,n}$ всегда выполняется неравенство

$$L_{\gamma,n} \geq L_{\gamma,n}^{\text{cl}} \quad (3.7)$$

(см. (2.15)).

Недавно показано [6], что для $n \geq 1$

$$L_{\gamma,n} \leq R \cdot L_{\gamma,n}^{\text{cl}}, \quad R = \pi/\sqrt{3} = 1,8138\dots, \quad \gamma \geq 1,$$

и это улучшает предыдущую важную оценку $L_{\gamma,n} \leq 2L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$, полученную в [8]. Поэтому $c_{\text{LT}} \leq 4RL_{1,2}^{\text{cl}} = 1/(2\sqrt{3})$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1. Идея использования неравенств Либа–Тирринга в контексте уравнений Навье–Стокса [17] позволила получить оценки размерности, линейные по числу Грасгофа G [23]. Первые явные оценки размерности аттракторов были получены в [10] и улучшены в [3]. Явные постоянные в (3.2) являются дальнейшим улучшением (на множитель $(2 \cdot (2/R))^{1/2} = 1,485\dots$) соответствующих постоянных из [3].

В заключение автор выражает благодарность А. А. Лаптеву, Ю. Г. Рыкову и В. В. Чепыжову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] К. И. Бабенко, *Об асимптотике собственных значений линеаризованных уравнений Навье–Стокса*, ДАН СССР, **263**:3 (1982), 521–525.
- [2] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.
- [3] V. V. Chepyzhov, A. A. Ilyin, *On the fractal dimension of invariant sets; applications to Navier–Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **10**:1–2 (2004), 117–135.
- [4] P. Constantin, C. Foias, *Global Lyapunov exponents, Kaplan–Yorke formulas and the dimension of the attractors for the 2D Navier–Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., **38**:1 (1985), 1–27.
- [5] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes Equations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [6] J. Dolbeault, A. Laptev, M. Loss, *Lieb–Thirring inequalities with improved constants*, J. European Math. Soc., **10**:4 (2008), 1121–1126.
- [7] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [8] D. Hundertmark, A. Laptev, T. Weidl, *New bounds on the Lieb–Thirring constants*, Invent. Math., **140**:3 (2000), 693–704.
- [9] J.-M. Ghidaglia, M. Marion, R. Temam, *Generalization of the Sobolev–Lieb–Thirring inequalities and applications to the dimension of attractors*, Differential Integral Equations, **1**:1 (1988), 1–21.
- [10] A. A. Ilyin, *Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure*, Nonlinear Anal., **27**:5 (1996), 605–616.
- [11] А. А. Ильин, *Интегральные неравенства Луба–Турринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса*, Матем. сб., **196**:1 (2005), 33–66.
- [12] О. А. Ladyzhenskaya, *First boundary value problem for Navier–Stokes equations in domain with nonsmooth boundaries*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, **314**:4 (1992), 253–258.
- [13] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.
- [14] A. Laptev, *Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces*, J. Funct. Anal., **151**:2 (1997), 531–545.
- [15] A. Laptev, T. Weidl, *Recent results on Lieb–Thirring inequalities*, in: Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (La Chapelle sur Erdre, 2000), pages Exp. No. XX, Univ. Nantes, Nantes, 2000.
- [16] P. Li, S.-T. Yau, *On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Comm. Math. Phys., **88**:3 (1983), 309–318.
- [17] E. Lieb, *On characteristic exponents in turbulence*, Comm. Math. Phys., **92**:4 (1984), 473–480.
- [18] E. Lieb, W. Thirring, *Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities*, in: Studies in Math. Physics. Essays in honor of Valentine Bargmann, Princeton University Press, 1976, 269–303.
- [19] G. Metivier, *Valeurs propres des opérateurs définis sur la restriction de systems variationnels à des sous-espaces*, J. Math. Pures Appl., **57**:2 (1978), 133–156.
- [20] G. Pólya, *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. London Math. Soc., **11** (1961), 419–433.
- [21] R. Rosa, *The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains*, Nonlinear Anal., **32**:1 (1998), 71–85.
- [22] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981.

- [23] R. Temam, *Attractors for Navier–Stokes equations*, in: Res. Notes Math., vol. 122, 1985, 272–292.
- [24] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1997.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
ilyin@keldysh.ru

Поступило в редакцию
21 февраля 2008 г.