Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 3, 3–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:11:45

Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей*

© 2009. М. С. АГРАНОВИЧ

Посвящается памяти Соломона Григорьевича Михлина

Мы рассматриваем сильно эллиптическую систему 2-го порядка в ограниченной n -мерной области Ω^+ с липшицевой границей Γ , $n \geq 2$. Предположения о гладкости коэффициентов минимизированы. Для удобства считаем, что эта область содержится в стандартном торе $\mathbb{T}^n$. В предыдущих работах автора получены результаты об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана в пространствах H_p^σ и B_p^σ без использования поверхностных потенциалов. В предлагаемой работе, используя подход Костабея и Маклина, мы определяем поверхностные потенциалы и изучаем их свойства в предположении однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана в Ω^+ и дополнительной области Ω^- . Доказываем обратимость в пространствах Бесова интегрального оператора простого слоя и гиперсингулярного оператора на Γ . Описываем некоторые спектральные свойства этих операторов и соответствующих задач сопряжения.

§1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ со связной липшицевой границей Γ , $n \geq 2$. В этой статье (кроме пп. 5.3 и 5.4) нам будет удобно рассматривать эту область как лежащую на торе.

Итак, пусть $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$ — стандартный n -мерный тор. Его точки x имеют 2π -периодические координаты $(x_1, \dots, x_n)$. Пусть он разделен $(n-1)$ -мерной связной липшицевой поверхностью Γ на две открытые части, $\Omega = \Omega^+$ и Ω^- .

На $\mathbb{T}$ предположим заданной сильно эллиптическую [36] систему 2-го порядка

$$Lu = f, \text{ где } Lu(x) = - \sum \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + \sum b_j(x) \partial_j u(x) + c(x)u(x), \quad (1.1.1)$$

с комплексными, вообще говоря, коэффициентами. Здесь $a_{j,k}(x)$, $b_j(x)$ и $c(x)$ — квадратные (2π -периодические) матрицы порядка m , соответственно $u(x)$ — вектор-столбец высоты m ; ∂_j — частные производные $\partial/\partial x_j$. Через $a(x, \xi)$ обозначим главный символ системы:

$$a(x, \xi) = \sum a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \quad (x \in \mathbb{T}, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (1.1.2)$$

Мы рассмотрим систему при двух вариантах предположений: I и II.

I. Главный символ эрмитов: $a = a^*$, точнее, $a_{jk}^* = a_{kj}$ при всех j и k . Условие сильной эллиптичности состоит тогда в том, что это положительно определенная матрица:

$$a(x, \xi) \geq c_0 |\xi|^2 E, \quad (1.1.3)$$

*Поддержано грантом РФФИ 07-01-00287.

где E — единичная матрица и c_0 — положительная постоянная. Это обширный класс систем, содержащий важнейшие сильно эллиптические системы, встречающиеся в приложениях.

Если еще $b_j = 0$ и $c = c^*$, то система формально самосопряженная.

II. Условие I не выполнено. Тогда условие сильной эллиптичности состоит в том, что главный символ имеет положительно определенную действительную часть:

$$\operatorname{Re} a(x, \xi) = \frac{1}{2}[a(x, \xi) + a^*(x, \xi)] \geq c_0 |\xi|^2 E. \quad (1.1.4)$$

Отсюда по непрерывности следует, что при $|\psi| \leq \theta$ с некоторым $\theta \in (0, \pi/2)$

$$\operatorname{Re}[e^{i\psi} a(x, \xi)] \geq c'_0 |\xi|^2 E, \quad (1.1.5)$$

где c'_0 — снова постоянная, $0 < c'_0 \leq c_0$. Иногда удобнее именно условие (1.1.5). При условии I оно выполнено с любым $\theta < \pi/2$.

Важнейшие задачи для системы (1.1.1) в $\Omega^\pm$ — Дирихле и Неймана. Их начальную постановку мы считаем классической вариационной, или слабой, т. е. основанной на формулах Грина, в L_2 -пространствах Соболева, точнее — в L_2 -пространствах $H^\sigma = H_2^\sigma$ (бесселевых) потенциалов. См. §2. Простейшие результаты по однозначной разрешимости этих задач и по спектральным свойствам задач с параметром в этих пространствах выводятся из неравенства Гординга, которое в случае задачи Дирихле, а также в случае скалярной задачи Неймана с вещественными $a_{j,k} = a_{k,j}$ следует из сильной эллиптичности (см., например, [29] и [22]). В случае более общей задачи Неймана это неравенство является традиционным добавочным предположением о коэрцитивности отвечающей оператору L формы на пространстве $H^1(\Omega^\pm)$ (см., например, [28] и [22]). Чтобы иметь однозначную разрешимость, мы предполагаем, что $\operatorname{Re}(cu, u)_{\Omega^\pm} \geq C \|u\|_{L_2(\Omega^\pm)}^2$ с достаточно большим C .

В литературе имеются обширные исследования этих задач в липшицевых областях в более общих пространствах, включая пространства потенциалов H_p^σ и пространства Бесова B_p^σ , на основе анализа фундаментального решения, поверхностных потенциалов и условий разрешимости соответствующих уравнений на Γ . Используется глубокая теорема об ограниченности сингулярного интегрального оператора на липшицевой поверхности в пространствах L_p , восходящая к Кальдерону [12] и в полной общности доказанная в [13] (случай постоянных коэффициентов), [26] и [25]. Используются также тонкие факты теории пространств H_p^σ и B_p^σ в сочетании со средствами теории интерполяции. Получены очень общие результаты в отношении задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Лапласа–Бельтрами с младшими членами с использованием средств гармонического анализа, см. [19] и [27], а также задачи Дирихле для общих сильно эллиптических систем с эрмитовым главным символом [25] (см. также обширную литературу в этих работах) и задачи Неймана для некоторых систем, включая систему Ламе [17]. Эта методика проходит, если известны так называемые тождества Реллиха, позволяющие оценивать данные Неймана через данные Дирихле в задаче Дирихле и наоборот в задаче Неймана. Оценки первого типа получаются в полной общности (см. [28], [22] и приведенные там ссылки), но в отношении оценок второго типа это не так.

В настоящем выпуске журнала печатается статья [24]. Она относится к этому направлению, но посвящена системе Стокса.

В работах автора [5]–[7] развивается альтернативный подход — без использования поверхностных потенциалов — с обобщением определения вариационного решения на пространства H_p^σ и B_p^σ . Наши доказательства однозначной разрешимости и гладкости решений основаны на методе Саваре исследования гладкости классического вариационного решения при $p = 2$ (см. [33] в скалярном случае) и на использовании средств теории интерполяции, включая оценки Шнейберга [34], при p , близких к 2. *Метод Саваре имеет меньшую общность, чем автор предполагал в [6], [7] (в отличие от [2]–[5]), он применим при условии I. Однако при условии II тоже возможно получение некоторых результатов при помощи оценок Шнейберга.*

В случае I и задачи Дирихле теорема об однозначной разрешимости для $p = 2$ содержится в книге [22], стр. 206, она фактически получена там при помощи тождеств Реллиха, см. также [28] и [14]. Метод Саваре применим в случае I к обоим задачам, Дирихле и Неймана; в спектральных задачах он позволил получить оптимальные оценки резольвенты. Но при этом, за исключением случая скалярного уравнения с вещественными $a_{j,k} = a_{k,j}$, на главный символ мы накладываем дополнительное *условие неотрицательности*. См. пп. 2.2 и 5.1.

Пространства H_p^σ и B_p^σ с указанными дальше ограничениями на индексы идеально приспособлены к рассмотрению этих задач в липшицевых областях. Необходимый минимум сведений об этих пространствах напомним в п. 6.1.

Как отмечено в [5], из этих результатов должны получаться следствия в отношении обратимости и спектральных свойств операторов типа потенциала на Γ . Разработка этих следствий и является основной целью в настоящей статье.

В этом отношении наша работа примыкает к работе [14] и особенно к книге [22]; они содержат образцы для наших несектральных рассмотрений в пп. 3.1–3.4. Однако в [14] и [22] $p = 2$, а коэффициенты оператора L предполагаются бесконечно гладкими. *У нас p принадлежит окрестности точки 2, элементы матриц $a_{j,k}(x)$ принадлежат $C^1(\bar{\Omega})$, элементы матриц $b_j(x)$ липшицевы, а элементы матрицы $c(x)$ ограничены и измеримы.* Как следствие это верно и для формально сопряженной системы с оператором¹⁾

$$\tilde{L}v = - \sum \partial_k a_{j,k}^*(x) \partial_j v(x) - \sum b_j^*(x) \partial_j u(x) + \left[c^*(x) - \sum \partial_j b_j^*(x) \right]. \quad (1.1.6)$$

При такой минимизации предположений о гладкости становится особенно актуальным вопрос об освобождении определений поверхностных потенциалов и вывода связанных с ними формул от использования фундаментального решения и его свойств. Следуя по существу [14] и [22], мы сначала используем только обратный к L оператор на торе (в [14] и [22] рассматривается $\mathbb{R}^n$ вместо тора). Но затем мы предполагаем и используем однозначную разрешимость задач Дирихле или Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$. В частности, мы получаем утверждения об обратимости операторов типа потенциала в пространствах Бесова на Γ .

Фундаментальное решение — это ядро Шварца оператора L^{-1} . Даже при наших минимизированных предположениях о гладкости, как видно из [25], уста-

¹⁾Как в [22], нам будет удобно писать $\tilde{L}$ вместо L^* . В дальнейшем тильда будет использоваться при переходе от операторов, связанных с L (от $\mathcal{A}$ и т.п.), к аналогичным операторам, связанным с $\tilde{L}$, а звездочка — при переходе от данных операторов к сопряженным операторам относительно скалярных произведений в T , Ω или на Γ . Иногда устанавливается совпадение: см. (3.3.1).

навливаются некоторые привычные свойства фундаментального решения. Поэтому определениям потенциалов и всем формулам можно «апостериори» придать обычный вид (см. ниже п. 3.5).

Операторы типа потенциала тесно связаны с задачами сопряжения (см. пп. 2.4 и 4.2), так что новые результаты получаются и для этих задач. Как и задачи Пуанкаре–Стеклова, они были рассмотрены в [2]–[4], но в намного меньшей общности и с существенно меньшей полнотой, чем здесь.

Спектральные результаты в п. 4.3 аналогичны полученным в работе [7] и являются их дальнейшим развитием. (См., однако, поправки в п. 6.3.) Спектральная проблематика в случае несамосопряженных, вообще говоря, операторов напоминается в п. 6.2.

§2. Основные граничные задачи

2.1. Система на торе. Это, если угодно, периодическая задача: липшицевой границы здесь нет. Сформулируем утверждение об однозначной разрешимости сильно эллиптической системы (1.1.1) на торе, вытекающее из известных результатов.

Предложение 2.1.1. *Пусть*

$$\operatorname{Re}(cu, u)_{\mathbb{T}} \geq C_0 \|u\|_{L_2(\mathbb{T})}^2, \quad (2.1.1)$$

где C_0 — постоянная. Если она достаточно велика, то оператор $L: H_p^{1+\sigma}(\mathbb{T}) \rightarrow H_p^{-1+\sigma}(\mathbb{T})$ имеет ограниченный обратный при $p \in (1, \infty)$, $0 \leq \sigma < 1$. Такой же результат верен для формально сопряженного оператора $\tilde{L}$.

В качестве пояснения отметим, что если $c(x) = c_1(x) - \lambda E$, то постоянная C_0 растет при росте $\mu = -\operatorname{Re} \lambda$.

Укажем, как получается это утверждение. Пусть сначала $p = 2$, $\sigma = 0$. Введем форму

$$\Phi_{\mathbb{T}}(u, v) = \int_{\mathbb{T}} \left[\sum a_{j,k} \partial_k u \cdot \partial_j \bar{v} + \sum b_j \partial_j u \cdot \bar{v} + cu \cdot \bar{v} \right] dx. \quad (2.1.2)$$

Ее главную часть (с нулевыми b_j и c) обозначим через $\Phi_0(u, v)$. Для гладких функций интегрированием по частям выводится формула Грина

$$(f, v)_{\mathbb{T}} = \Phi_{\mathbb{T}}(u, v). \quad (2.1.3)$$

Для $f \in H^{-1}(\mathbb{T})$ эта формула принимается за определение вариационного решения $u \in H^1(\mathbb{T})$; здесь v — произвольная пробная функция из $H^1(\mathbb{T})$. Левая часть рассматривается как продолжение стандартного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{T})$ на прямое произведение соответствующих пространств.

Сильная эллиптичность, как известно (см., например, [29]), в рассматриваемой ситуации эквивалентна коэрцитивности форм Φ_0 и $\Phi_{\mathbb{T}}$ на пространстве $H^1(\mathbb{T})$, т. е. справедливости неравенства Гординга

$$\operatorname{Re} \Phi_0(u, u) + C_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \geq C_2 \|u\|_{H^1(\mathbb{T})}^2 \quad (2.1.4)$$

на функциях $u \in H^1(\mathbb{T})$. Здесь $C_2 > 0$ и C_1 — постоянные. Если C_0 в (2.1.1) достаточно велико, то

$$\operatorname{Re} \Phi_{\mathbb{T}}(u, u) \geq C_3 \|u\|_{H^1(\mathbb{T})}^2. \quad (2.1.5)$$

Из (2.1.5) вытекает однозначная разрешимость системы (1.1.1) в $H^1(\mathbb{T})$ при любой правой части из $H^{-1}(\mathbb{T})$: существование получается по лемме Вишика [36] — Лакса — Мильграма [21], а единственность непосредственно следует из (2.1.3) и (2.1.5).

Обширная литература посвящена более общим теоремам об однозначной разрешимости и регулярности решений. Для нас удобны предложения 2.1 и 2.2 в [25] (см. также приведенные там ссылки), они и позволяют распространить результат на p и σ , указанные в формулировке предложения.

При $p \in (1, \infty)$ и $\sigma \in (0, 1)$ равенство (2.1.3) можно считать определением слабого решения (с $v \in H_{p'}^{1-\sigma}(\mathbb{T})$, $p + p' = pp'$).

Предложение 2.1.1 можно усилить. Запишем формулу

$$(Lu, v)_{\mathbb{T}} = (u, \tilde{L}v)_{\mathbb{T}}. \quad (2.1.6)$$

Она получается из (2.1.3) и аналогичной формулы для формально сопряженного оператора $\tilde{L}$. Из нее видно, что L и $\tilde{L}$ можно рассматривать как сопряженные ограниченные операторы в парах банаховых пространств. При $\sigma \in (0, 1)$ оператор $\tilde{L}$ из $H_{p'}^{1+\sigma}(\mathbb{T})$ в $H_p^{-1+\sigma}(\mathbb{T})$ ограничен и имеет ограниченный обратный в соответствии с предложением 2.1.1. Поэтому L — ограниченный обратимый оператор из $H_p^{1-\sigma}(\mathbb{T})$ в $H^{-1-\sigma}(\mathbb{T})$. Возникает продолжение определенного в предложении 2.1.1 оператора L^{-1} , которое мы запишем в виде

$$L^{-1} = (\tilde{L}^{-1})^*. \quad (2.1.7)$$

Заменяя σ на $-\sigma$, получаем, что справедливо

Предложение 2.1.2. *При условиях предложения 2.1.1 оператор L^{-1} продолжается с использованием формулы (2.1.7) до оператора, изоморфно и непрерывно отображающего пространство $H_p^{1+\sigma}(\mathbb{T})$ ($|\sigma| < 1$) на пространства $H_p^{-1+\sigma}(\mathbb{T})$.*

2.2. Задачи Дирихле и Неймана. Здесь и в следующем пункте мы приводим некоторые напоминания, следуя в основном [6].

Начнем с задач Дирихле с однородными граничными условиями:

$$Lu = f \quad \text{в } \Omega^{\pm}, \quad \gamma^{\pm}u = u^{\pm} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2.2.1)$$

Эти задачи мы рассматриваем в следующих пространствах:

$$u \in \tilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^{\pm}), \quad f \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega^{\pm}), \quad v \in \tilde{H}_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega^{\pm}). \quad (2.2.2)$$

Здесь и дальше v — пробная функция и

$$|s| < 1/2, \quad 1 < p < \infty, \quad p + p' = pp'. \quad (2.2.3)$$

Удобно положить, как в [5]–[7], $t = 1/p$. Точки (s, t) , для которых выполнены неравенства (2.2.3), образуют квадрат, который мы обозначаем через Q ; его часть — прямоугольник с $|s| < 1/2$, $|t - 1/2| < \delta$ ($0 < \delta \leq 1/2$) — обозначаем через Q_{δ} .

В отличие от упомянутых в §1 работ [19], [26], [27], [25] и многих других, в которых используется аналогичный подход, мы не рассматриваем пространства, отвечающие точкам границы квадрата Q с $s = \pm 1/2$, где, вообще говоря, меняется смысл перехода от функции в $\Omega^{\pm}$ к ее граничным значениям на Γ .

Для вариационной постановки задач Дирихле введем формы

$$\Phi_{\pm}(u, v) = \int_{\Omega^{\pm}} \left[\sum a_{j,k} \partial_k u \cdot \partial_j \bar{v} + \sum b_j \partial_j u \cdot \bar{v} + cu \cdot \bar{v} \right] dx; \quad (2.2.4)$$

через $\Phi_{0,\pm}(u, v)$ обозначим их главные части, с нулевыми b_j и c . Запишем формулы Грина

$$(f, v)_{\Omega^{\pm}} = \Phi_{\pm}(u, v), \quad (2.2.5)$$

где слева — продолжение скалярного произведения в $L_2(\Omega^{\pm})$ на прямое произведение пространств для f и v . Относительно ограниченности формы $\Phi_{\pm}$ см. (1.2.4) в [7]. Формулы (2.2.5) верны на гладких функциях u, v и распространяются на нужные нам функции предельным переходом. При заданной u они определяют f . При заданной f принимаем (2.2.5) за определение решения u в $\Omega^{\pm}$.

Пусть

$$\operatorname{Re}(cu, u)_{\Omega^{\pm}} \geq C_4 \|u\|_{L_2(\Omega^{\pm})}^2. \quad (2.2.6)$$

Считая постоянную C_4 достаточно большой, выводим однозначную разрешимость задач в центре квадрата Q из соответствующего неравенства Гординга, оно в случае задачи Дирихле эквивалентно условию сильной эллиптичности. При условии I результат распространяется сначала на $(s, 1/2)$, $|s| < 1/2$, — см., например, [22], стр. 206. Затем он распространяется на $(s, t) \in Q_{\delta}$ при некотором $\delta \in (0, 1/2]$ с использованием оценок Шнейберга.

Если выполнено только условие II, то из наших рассуждений получается более скромный результат — однозначная разрешимость задач Дирихле в прямоугольной окрестности $Q_{\delta, \varepsilon}$ центра квадрата, определяемой неравенствами $|t - 1/2| < \delta$, $|s| < \varepsilon$. Это делается при помощи результата Шнейберга: однозначная разрешимость экстраполируется сначала по s при $t = 1/2$, затем по t при фиксированном s равномерно по s . (В [5] обозначение $Q_{\varepsilon, \delta}$ имело другой смысл.)

Ср. [23], п. 8.2, где подобное соображение было ранее использовано для близких, но весовых пространств в случае задачи Дирихле для общих эллиптических систем высших порядков в общих липшицевых областях. У нас в [6] (там тоже рассматриваются системы высших порядков), [7] (оценки резольвенты) и здесь ситуация проще, так как возможность интерполяции в стандартных пространствах известна.

На случай неоднородного граничного условия $u^{\pm} = g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ (именно он нужен дальше при рассмотрении потенциалов для системы $Lu = 0$) утверждение об однозначной разрешимости распространяется вычитанием из решения $u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^{\pm})$ функции u_0 из того же пространства с заданным граничным значением. При этом из f вычитается соответствующая функция f_0 , определяемая при помощи формулы Грина. При $Lu = 0$ нормы $\|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^{\pm})}$ и $\|g\|_{B_p^{1/2+s}(\Gamma)}$ эквивалентны: первая оценивается через вторую и наоборот.

Перейдем к задачам Неймана сначала с однородными граничными условиями. Слабая постановка снова определяется формулой (2.2.5), но теперь

$$u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^{\pm}), \quad f \in \tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega^{\pm}), \quad v \in H_p^{1/2-s+1/p'}(\Omega^{\pm}). \quad (2.2.7)$$

Однозначная разрешимость в центре квадрата Q в случае скалярного оператора с вещественными $a_{j,k} = a_{k,j}$ получается при условии сильной эллиптичности, а

в общем случае требуется традиционное условие коэрцитивности формы $\Phi_{0,\pm}$ на пространстве $H^1(\Omega^\pm)$:

$$\operatorname{Re} \Phi_{0,\pm}(u, u) + C_5 \|u\|_{L_2(\Omega^\pm)}^2 \geq C_6 \|u\|_{H^1(\Omega^\pm)}^2. \quad (2.2.8)$$

Достаточные условия упоминаются в п. 5.1. Снова предполагается выполненным условие (2.2.6) с достаточно большим C_4 .

Далее, при условии I методом Саваре получается однозначная разрешимость в точках $(s, 1/2)$ с $|s| < 1/2$. Но при этом, за исключением случая скалярного уравнения с вещественными $a_{j,k} = a_{k,j}$, на главный символ накладывается добавочное

Условие неотрицательности. В форме $\Phi_0(u, u)$ подинтегральное выражение неотрицательно на каждой дифференцируемой функции $u(x)$ в каждой точке тора.

Оно комментируется в п. 5.1. Затем при помощи оценок Шнейберга результат распространяется на $(s, t) \in Q_\delta$ с некоторым $\delta \in (0, 1/2]$. При условии II оценки Шнейберга дают однозначную разрешимость в некоторой окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}$ центра квадрата Q .

Аналог условия (1.1.5) имеет вид

$$\operatorname{Re}[e^{i\psi} \Phi(u, u)] \geq C' \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (|\psi| \leq \theta), \quad (2.2.9)$$

где $0 < \theta < \pi/2$, с постоянной C' . См. также сноску в п. 5.1.

Теперь рассмотрим задачи Неймана с неоднородными граничными условиями:

$$Lu = f \text{ в } \Omega^\pm, \quad T^\pm u = h_\pm \text{ на } \Gamma, \quad (2.2.10)$$

где $T^\pm u$ — кономальная производная. На функциях, скажем, из $H^2(\Omega^\pm)$ она определяется формулой

$$T^\pm u = \sum \nu_j \gamma^\pm a_{j,k}(x) \partial_k u. \quad (2.2.11)$$

Здесь $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ — единичный вектор нормали к Γ в точке $x \in \Gamma$ (на липшицевой поверхности она существует почти всюду), направленный в Ω^- .

При $u \in H^2(\Omega^\pm)$, $v \in H^1(\Omega^\pm)$ выводится (первая) формула Грина, обобщающая (2.2.5):

$$(f, v)_{\Omega^\pm} = \Phi_\pm(u, v) \mp (T^\pm u, v^\pm)_\Gamma. \quad (2.2.12)$$

См. [22], стр. 114. В общем случае, когда v и заданные функции u и f принадлежат указанным в (2.2.7) пространствам, эти формулы принимаются за определения двух кономальных производных $h_\pm = T^\pm u = Tu^\pm$, они принадлежат пространству $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. При этом $T^\pm$ — ограниченные операторы. Ср. [22], стр. 115, при $p = 2$, $s = 0$.

Напомним, что f и $T^\pm u$ не независимы. Если задана функция u , то $f = Lu$ однозначно определяется только внутри $\Omega^\pm$. И Lu , и $T^\pm u$ — антилинейные непрерывные функционалы над пространством функций v . Если задать u и $h_\pm = T^\pm u$, то f полностью определяется формулой (2.2.12). При заданных f и $h_\pm = T^\pm u$ принимаем формулу (2.2.12) за определение решений задач Неймана.

Общий случай сводится к случаю $T^\pm u = 0$ изменением f , поэтому мы снова получаем однозначную разрешимость для (s, t) из Q_δ или $Q_{\delta,\varepsilon}$. Если $f = 0$, то нормы $\|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)}$ и $\|h\|_{B^{-1/2+s}(\Gamma)}$ эквивалентны.

Разумеется, предположения в Ω^- не нужны, если рассматриваются только задачи в Ω^+ .

Аналогичные результаты получаются для формально сопряженных задач. В дальнейшем все δ и все ε считаем совпадающими.

Формула Грина для формально сопряженного уравнения $\tilde{L}v = \tilde{f}$ пишется аналогично (2.2.12) с той же формой $\Phi_{\pm}(u, v)$:

$$(u, \tilde{f})_{\Omega^{\pm}} = \Phi_{\pm}(u, v) \mp (u^{\pm}, \tilde{T}^{\pm}v)_{\Omega^{\pm}}, \quad (2.2.13)$$

где $\tilde{T}$ — отвечающая оператору $\tilde{L}$ кономальная производная. (При $b_j \neq 0$ она, вообще говоря, содержит свободный член, см. [22], стр. 115.) Предположения о пространствах, к которым принадлежат функции в (2.2.13), ясны из сказанного выше. Из этих двух формул вытекает вторая формула Грина для $(f, v)_{\Omega^{\pm}} - (u, \tilde{f})_{\Omega^{\pm}}$. Все формулы Грина пишутся при $(s, t) \in Q$.

Пространства потенциалов в $\Omega^{\pm}$ можно заменить пространствами Бесова с теми же индексами. В утверждениях этого и следующего пунктов старшие коэффициенты в L достаточно считать липшицевыми.

2.3. Спектральные задачи Пуанкаре–Стеклова. Это задачи

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega^{\pm}, \quad \pm T^{\pm}u = \lambda u^{\pm} \text{ на } \Gamma. \quad (2.3.1)$$

В предположении, что в данной точке $(s, t) \in Q$ задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы, определены операторы

$$N_{\pm}: \pm T^{\pm}u \mapsto u^{\pm}, \quad (2.3.2)$$

изоморфно и непрерывно отображающие пространство $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ на пространство $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Задачи (2.3.1) эквивалентны уравнениям $(\psi = T^{\pm}u)$

$$\psi = \lambda N_{\pm}\psi \quad (2.3.3)$$

для собственных функций операторов $N_{\pm}$ (но не исключено и наличие присоединенных функций). Обратный к $N_{\pm}$ оператор обозначим через $D_{\pm}$. Эквивалентность норм $\|u^{\pm}\|_{B_p^{1/2+s}(\Gamma)}$ и $\|T^{\pm}u\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}$ — это в нашем контексте аналог следствий из тождеств Реллиха, если они есть.

2.4. Задачи сопряжения. *Общей задачей сопряжения* будем называть задачу для уравнения (1.1.1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ с условиями сопряжения

$$[u]_{\Gamma} := u^- - u^+ = g, \quad [Tu]_{\Gamma} := Tu^- - Tu^+ = h. \quad (2.4.1)$$

Здесь $g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, $(s, t) \in Q$. Можно выделить частные случаи этой задачи: 1) с $g = 0$ и 2) с $h = 0$. Заметим, что, скажем, при $f = 0$, если u_1 и u_2 — решения этих двух задач, то $u_1 + u_2$ — решение общей задачи сопряжения.

Мы рассмотрим также две *спектральные задачи сопряжения*:

1. Ищется решение уравнения $Lu = 0$ в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ с условиями сопряжения

$$[u]_{\Gamma} = 0, \quad [Tu]_{\Gamma} = -\lambda u^{\pm}. \quad (2.4.2)$$

2. Ищется решение уравнения $Lu = 0$ в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ с условиями сопряжения

$$[Tu]_{\Gamma} = 0, \quad T^{\pm}u = -\lambda[u]_{\Gamma}. \quad (2.4.3)$$

В известной мере это аналоги спектральных задач Пуанкаре–Стеклова. Эти задачи в случае уравнения Гельмгольца в областях пространства $\mathbb{R}^n$ предложили рассматривать физики, см. [37] и [10]. Ср. также [11] и [9]. Мы вернемся к этим задачам в п. 4.2.

§3. Поверхностные потенциалы и интегральные формулы

В пп. 3.1–3.4 мы в основном следуем [14] и [22], обобщая определения и результаты. Предположения о существовании оператора L^{-1} достаточно для определения потенциалов и вывода формулы (3.1.8) представления решений. Но дальше нам дополнительно нужна и *предполагается* однозначная разрешимость задач Дирихле или Дирихле и Неймана.

3.1. Потенциалы простого и двойного слоя и интегральные формулы.

3.1a. Обозначим через γ оператор перехода от функции v на торе к ее следу на Γ . Он действует ограниченным образом из $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\mathbb{T})$ в $B_p^{1/2-s}(\Gamma)$. Введем сопряженный оператор γ^* :

$$(\gamma^*\psi, v)_{\mathbb{T}} = (\psi, \gamma v)_{\Gamma}. \quad (3.1.1)$$

Он действует ограниченным образом из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\mathbb{T})$. *Потенциал простого слоя* определим на функциях $\psi \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ равенством

$$\mathcal{A}\psi = L^{-1}\gamma^*\psi, \quad (3.1.2)$$

$(s, t) \in Q$. Перечислим легко проверяемые свойства этого оператора.

Замечания 3.1.1. 1. Он действует ограниченным образом из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{1/2+s+1/p}(\mathbb{T})$.

2. Функция $u = \mathcal{A}\psi$ при $\psi \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ имеет одинаковые с двух сторон граничные значения

$$A\psi := \gamma\mathcal{A}\psi \text{ на } \Gamma. \quad (3.1.3)$$

Это ограниченный оператор из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$.

3. Так как $\text{supp } \gamma^*\psi \subset \Gamma$, то $L(\mathcal{A}\psi) = 0$ в $\Omega^{\pm}$.

4. Операторы $T^{\pm}\mathcal{A}$ действуют в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ и ограничены.

3.1b. Введем сопряженный к $\tilde{T}$ оператор $\tilde{T}^*$:

$$(\tilde{T}^*\varphi, v)_{\mathbb{T}} = (\varphi, \tilde{T}v)_{\Gamma}. \quad (3.1.4)$$

Здесь приходится считать, что $v \in H_p^{\sigma}(\mathbb{T})$ с $1 + 1/p' < \sigma < 2$: тогда $\tilde{T}^{\pm}v$ совпадают, более точно, содержатся и совпадают в $L_{p'}(\Gamma)$, поскольку в общем случае ν_j только ограничены и измеримы. Но $\|\tilde{T}^{\pm}v\|_{L_{p'}(\Gamma)}$ оценивается через $\|v\|_{H_p^{\sigma}(\mathbb{T})}$. Поэтому, если $\varphi \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, пока мы имеем (только) $\tilde{T}^*\varphi \in H_p^{-\sigma}(\mathbb{T})$. *Потенциал двойного слоя* определим при $(s, t) \in Q$ для $\varphi \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ равенством

$$\mathcal{B}\varphi = L^{-1}\tilde{T}^*\varphi. \quad (3.1.5)$$

3.1с. Теорема 3.1.2. Пусть $u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ и $Lu = f_\pm$ принадлежит $\tilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega^\pm)$, так что $f = f_+ + f_- \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\mathbb{T})$. Тогда при $(s, t) \in Q$

$$(Lu, v)_\mathbb{T} = (f, v)_\mathbb{T} + ([u]_\Gamma, \tilde{T}v)_\Gamma - ([Tu]_\Gamma, \gamma v)_\Gamma \quad (3.1.6)$$

для $v \in H_{p'}^\sigma(\mathbb{T})$, $1 + 1/p' < \sigma < 2$, так что на торе

$$Lu = f + \tilde{T}^*[u]_\Gamma - \gamma^*[Tu]_\Gamma \quad (3.1.7)$$

u

$$u = L^{-1}f + \mathcal{B}[u]_\Gamma - \mathcal{A}[Tu]_\Gamma. \quad (3.1.8)$$

Поясним прежде всего, что при наших предположениях $u \in H_p^\tau(\mathbb{T})$, где $\tau = 2 - \sigma \in (0, 1/p)$. Поэтому левая часть в (3.1.6) имеет смысл.

Формула (3.1.7) похожа на формулу дифференцирования кусочно-гладкой функции в смысле обобщенных функций (см., например, [18], гл. 1, § 2). Формула (3.1.8) (в центре квадрата Q) названа в [22] третьей формулой Грина. Из нее видно, что $u - \mathcal{B}[u]_\Gamma \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$.

Доказательство теоремы 3.1.2. В отношении v у нас предположена повышенная гладкость. Используя формулы Грина (2.2.12) и (2.2.13), имеем

$$\begin{aligned} (Lu, v)_\mathbb{T} &= (u, \tilde{L}v)_\mathbb{T} = (u, \tilde{L}v)_{\Omega^+} + (u, \tilde{L}v)_{\Omega^-} \\ &= \Phi_+(u, v) - (u^+, \tilde{T}^+v)_\Gamma + \Phi_-(u, v) + (u^-, \tilde{T}^-v)_\Gamma \\ &= (Lu, v)_{\Omega^+} + (T^+u, v^+)_\Gamma - (u^+, \tilde{T}^+v)_\Gamma \\ &\quad + (Lu, v)_{\Omega^-} - (T^-u, v^-)_\Gamma + (u^-, \tilde{T}^-v)_\Gamma. \end{aligned}$$

Получается формула (3.1.6). Формула (3.1.7) следует из нее и приводит к формуле (3.1.8). $\square$

Следствие 3.1.3. При $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$

$$u = -\mathcal{B}u^+ + \mathcal{A}T^+u \quad \text{в } \Omega^+, \quad (3.1.9)$$

$$u = \mathcal{B}u^- - \mathcal{A}T^-u \quad \text{в } \Omega^-. \quad (3.1.10)$$

Первые части в (3.1.9) и (3.1.10) равны нулю в Ω^- и Ω^+ соответственно.

Теперь легко проверяются следующие свойства оператора $\mathcal{B}$.

Замечания 3.1.4. 1. Он действует ограниченным образом из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$.

Это следует соответственно из (3.1.9) и (3.1.10), если мы можем произвольно задавать $u^\pm$, т.е. имеем разрешимость задач Дирихле в $\Omega^\pm$. В дальнейшем она уже всюду предполагается, поскольку для нас существенно это свойство оператора $\mathcal{B}$. (При этом единственность иногда дополнительно получается из тривиальных соображений вложения для пространств решений.)

2. Так как $\text{supp } \tilde{T}^*\varphi \subset \Gamma$, то $L(\mathcal{B}\varphi) = 0$ в $\Omega^\pm$.

3. $\gamma^\pm \mathcal{B}$ — ограниченные операторы в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, а $T^\pm \mathcal{B}$ — ограниченные операторы из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

3.2. Скачки поверхностных потенциалов, их граничные значения и кономальные производные.

Предложение 3.2.1. Для $\varphi \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $\psi \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ справедливы соотношения

$$[\mathcal{A}\psi]_\Gamma = 0, \quad [T\mathcal{A}\psi]_\Gamma = -\psi, \quad [\mathcal{B}\varphi]_\Gamma = \varphi, \quad [T\mathcal{B}\varphi]_\Gamma = 0. \quad (3.2.1)$$

Доказательство. Первое соотношение уже отмечено в (3.1.3). Далее, по определению оператора $\mathcal{A}$ для функции $u = \mathcal{A}\psi$ мы имеем $Lu = \gamma^*\psi$, а по формуле (3.1.7) $Lu = -\gamma^*[T\mathcal{A}\psi]_\Gamma$ в силу только что отмеченного первого соотношения в (3.2.1). Ядро оператора γ^* очевидным образом тривиально, и мы получаем второе соотношение в (3.2.1).

Теперь пусть u — решение в Ω^+ задачи Дирихле для однородного уравнения с $u^+ = \varphi$ и нуль в Ω^- . Из (3.1.8) переходом на границу получаем третье соотношение в (3.2.1) снова с учетом первого из них.

Наконец, для $u = \mathcal{B}\varphi$ мы имеем из (3.1.8)

$$[Tu]_\Gamma = [T\mathcal{B}[\mathcal{B}\varphi]_\Gamma]_\Gamma - [T\mathcal{A}[Tu]_\Gamma]_\Gamma = [T\mathcal{B}\varphi]_\Gamma + [Tu]_\Gamma$$

в силу третьего и второго соотношений в (3.2.1), откуда получаем последнее соотношение в (3.2.1). $\square$

Как в [22], введем операторы

$$B = \frac{1}{2}(\gamma^+\mathcal{B} + \gamma^-\mathcal{B}), \quad \widehat{B} = \frac{1}{2}(T^+\mathcal{A} + T^-\mathcal{A}). \quad (3.2.2)$$

Это ограниченные операторы соответственно в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Назовем B прямым значением потенциала двойного слоя на Γ .

Оператор $-T^\pm\mathcal{B}$ обозначим через H , это так называемый *гиперсингулярный оператор*. Он действует ограниченным образом из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Операторы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{H}$, связанные с оператором $\tilde{L}$ вместо L , имеют аналогичные названия.

Из (3.2.1) и (3.2.2) следует, что

$$T^\pm\mathcal{A}\psi = \pm\frac{1}{2}\psi + \widehat{B}\psi, \quad \gamma^\pm\mathcal{B}\varphi = \mp\frac{1}{2}\varphi + B\varphi. \quad (3.2.3)$$

Эти формулы согласуются с формулами в гладком случае (см. п. 3.5) и хорошо известны для классических уравнений.

Замечание 3.2.2. Коэффициенты $a_{j,k}(x)$ и $b_j(x)$ можно аппроксимировать соответственно в $C^1(\mathbb{T})$ и $C^{0,1}(\mathbb{T})$ бесконечно гладкими функциями на торе, и то же верно в отношении коэффициента $c(x)$ в $L_\infty(\mathbb{T})$. При этом соответствующие операторы (1.1.1) сходятся к данному оператору L в пространстве ограниченных операторов из $H_p^{1/2+s+1/p}(\mathbb{T})$ в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\mathbb{T})$ при фиксированных $(s, t) \in Q$. Следовательно, мы имеем сходимост обратных операторов. Отсюда при (s, t) из Q_δ или $Q_{\delta,\varepsilon}$ следует сходимость соответствующих операторов A , B , H к тем же операторам, отвечающим заданному L , в пространствах соответствующих ограниченных операторов, и то же верно в отношении операторов, отвечающих $\tilde{L}$.

3.3. Соотношения дуальности.

Предложение 3.3.1. Справедливы соотношения

$$A^* = \tilde{A}, \quad H^* = \tilde{H}, \quad (T^\pm\mathcal{A})^* = \gamma^\mp\tilde{\mathcal{B}}. \quad (3.3.1)$$

Смысл этих соотношений состоит в том, что

$$(A\psi_1, \psi_2)_\Gamma = (\psi_1, \tilde{A}\psi_2)_\Gamma \quad (\psi_1 \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma), \psi_2 \in B_{p'}^{-1/2-s}(\Gamma)), \quad (3.3.2)$$

$$(H\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma = (\varphi_1, \tilde{H}\varphi_2)_\Gamma \quad (\varphi_1 \in B_p^{1/2+s}(\Gamma), \varphi_2 \in B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)), \quad (3.3.3)$$

$$(T^\pm \mathcal{A}\psi, \varphi)_\Gamma = (\psi, \gamma^\mp \tilde{\mathcal{B}}\varphi)_\Gamma \quad (\psi \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma), \varphi \in B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)). \quad (3.3.4)$$

Доказательство предложения 3.3.1. Формула (3.3.2) вытекает из определения оператора A :

$$(\gamma L^{-1} \gamma^* \psi_1, \psi_2)_\Gamma = (L^{-1} \gamma^* \psi_1, \gamma^* \psi_2)_\Gamma = (\gamma^* \psi_1, \tilde{L}^{-1} \gamma^* \psi_2)_\Gamma = (\psi_1, \gamma \tilde{L}^{-1} \gamma^* \psi_2)_\Gamma.$$

Проверим формулу (3.3.3). В силу формул Грина и равенств $L\mathcal{B}\varphi_1 = 0$ и $\tilde{L}\tilde{\mathcal{B}}\varphi_2 = 0$ вне Γ

$$\Phi_\pm(\mathcal{B}\varphi_1, \tilde{\mathcal{B}}\varphi_2) = \pm(T^\pm \mathcal{B}\varphi_1, \gamma^\pm \tilde{\mathcal{B}}\varphi_2)_\Gamma = \mp(H\varphi_1, \gamma^\pm \tilde{\mathcal{B}}\varphi_2)_\Gamma.$$

Отсюда получается с учетом третьей из формул (3.2.1), что левая часть в (3.3.3) равна сумме выражений $\Phi_\pm(\mathcal{B}\varphi_1, \tilde{\mathcal{B}}\varphi_2)$. Аналогично (или в силу симметрии) получается, что этой сумме равна и правая часть в (3.3.3).

Формулу (3.3.4) непосредственно проверять мы не умеем. Но в [22], стр. 213, она проверена в случае бесконечно гладких коэффициентов в центре квадрата Q . Аналогичная проверка проходит в других точках (s, t) . На случай негладких коэффициентов она переносится в силу замечания 3.2.2 предельным переходом. $\square$

С учетом (3.2.2) получаем

Следствие 3.3.2. $\hat{B} = (\tilde{B})^*$.

3.4. Проекторы Кальдерона и уравнения на границе. В этом пункте считаем, что $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$.

3.4а. (Ср. [14], [16], [22]; см. также указанную там литературу.) Переходя в формулах (3.1.9)–(3.1.10) на границу из $\Omega^\pm$ и вычисляя конормальные производные от u с двух сторон, получаем с учетом (3.2.3) следующие соотношения:

$$u^\pm = \mp Bu^\pm + \frac{1}{2}u^\pm \pm AT^\pm u, \quad (3.4.1)$$

$$T^\pm u = \pm Hu^\pm \pm \hat{B}T^\pm u + \frac{1}{2}T^\pm u. \quad (3.4.2)$$

Положим

$$P^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - B & A \\ H & \frac{1}{2}I + \hat{B} \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + B & -A \\ -H & \frac{1}{2}I - \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

Эти операторы действуют ограниченным образом в прямом произведении пространств $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Их сумма — единичный оператор. Это взаимно дополнительные *проекторы Кальдерона* — проекторы на подпространства данных Коши решений однородной системы в $\Omega^\pm$. (В частности, если $u^+ = u^-$ и $T^+u = T^-u$, то из (3.4.1)–(3.4.2) следует, что $u^\pm = 0$, $T^\pm u = 0$.) Напомним, что наши пространства не являются гильбертовыми при $p \neq 2$.

Каждое из соотношений $(P^\pm)^2 = P^\pm$ и $P^+P^- = 0 = P^-P^+$ эквивалентно соотношениям

$$BA = A\hat{B}, \quad HB = \hat{B}H, \quad \frac{1}{4}I - B^2 = AH, \quad \frac{1}{4}I - (\hat{B})^2 = HA. \quad (3.4.4)$$

3.4b. Соотношения (3.4.1)–(3.4.2) с верхними знаками можно переписать в виде

$$(\tfrac{1}{2}I + B)u^+ = AT^+u, \quad (3.4.5)$$

$$Hu^+ = (\tfrac{1}{2}I - \widehat{B})T^+u. \quad (3.4.6)$$

Это известные уравнения на Γ : если задана одна из функций u^+ , Tu^+ , то можно искать другую (а затем вычислять u по формуле (3.1.9)). Аналогично

$$(\tfrac{1}{2}I - B)u^- = -AT^-u, \quad (3.4.7)$$

$$-Hu^- = (\tfrac{1}{2}I + \widehat{B})T^-u. \quad (3.4.8)$$

Обратимость операторов в этих формулах мы проверим в п. 4.1. Она фактически эквивалентна однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана.

3.5. Свойства фундаментального решения и выражения поверхностных потенциалов через него. Как видно из [25], гл. 2, даже при наших минимизированных предположениях о регулярности коэффициентов в L фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, y)$ для L обладает некоторыми привычными свойствами. В частности, оно принадлежит $C^{1+\varepsilon}$ при $x \neq y$ при некотором $\varepsilon > 0$, а при x , близких к y , его главная часть — фундаментальное решение $\mathcal{E}_0(x - y, y)$ системы без младших членов с коэффициентами, замороженными в точке y . Дальнейшие подробности см. там же. Из сказанного в п. 3.1 видно, что на функциях, скажем, из $L_2(\Gamma)$

$$\mathcal{A}\psi(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x, y)\psi(y) dS_y \quad (x \in \mathbb{T}) \quad \text{и} \quad A\psi(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x, y)\psi(y) dS_y \quad (x \in \Gamma). \quad (3.5.1)$$

Заметим, что $\mathcal{E}\varphi = (\mathcal{E}' \cdot \varphi)'$, где штрих обозначает транспонирование. Поэтому из (3.1.4) и (3.1.5) видно, что для потенциала двойного слоя получается формула

$$\mathcal{B}\varphi(x) = \int_{\Gamma} [\widetilde{T}_y \mathcal{E}^*(x, y)]^* \varphi(y) dS_y \quad (x \notin \Gamma). \quad (3.5.2)$$

Ср. [22], стр. 202. В случае скалярного уравнения с вещественными коэффициентами и $b_j = 0$ тильда и звездочки опускаются.

Операторы B и $\widehat{B}$ на липшицевой поверхности Γ — это в общем случае сингулярные интегральные операторы. Как в [14] и [22], *их ограниченность получалась без применения теоремы об ограниченности, упомянутой в § 1.*

Информация о фундаментальном решении и свойствах поверхностных потенциалов углубляется при дополнительных предположениях о гладкости коэффициентов. См. [25].

§ 4. Обратимость и спектральные свойства операторов на границе

4.1. Операторы A , $\frac{1}{2}I \pm B$, $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ и H . Здесь мы выведем обратимость этих операторов из однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана (или только Дирихле) в фиксированной точке $(s, t) \in Q$. Напоминаем, что в отношении задач Дирихле разрешимость уже предполагается. Всюду рассматриваем однородные уравнения $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$.

4.1a. Теорема 4.1.1. *Операторы A , H , $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ обратимы.*

Доказательство. Допустим, что $\text{Ker } A$ содержит $\psi \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Тогда $u = \mathcal{A}\psi$ — решение однородных задач Дирихле в $\Omega^\pm$ и, значит, тождественный нуль. Его данные Неймана равны нулю. Из (3.2.1) (второе равенство) получаем, что $\psi = 0$.

Пусть g — произвольная функция из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Примем ее за данные Дирихле $u^\pm$. Тогда в силу (3.1.8) и (3.1.3) $g = u^\pm = -A[Tu]_\Gamma$. Отсюда видно, что область значений оператора A — все пространство $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$.

Таким образом, из однозначной разрешимости задач Дирихле в $\Omega^\pm$ следует обратимость оператора A . Легко проверяется и обратное утверждение.

Допустим, что $\text{Ker } H$ содержит функцию $\varphi \in H_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Тогда $u = \mathcal{B}\varphi$ — решение однородных задач Неймана в $\Omega^\pm$ и, значит, тождественный нуль. Его данные Дирихле равны нулю. Из (3.2.1) (третье равенство) получаем $\varphi = 0$.

Пусть $h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Примем h за данные Неймана в $\Omega^\pm$. Тогда в силу (3.4.2) $h = T^\pm u = -H[u]_\Gamma$. Отсюда видно, что область значений оператора H — все $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Таким образом, если задачи Дирихле разрешимы, то из однозначной разрешимости задач Неймана в $\Omega^\pm$ следует обратимость оператора H . Легко проверяется и обратное утверждение.

Допустим, что $\text{Ker}(\frac{1}{2}I + B)$ содержит функцию $\varphi \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Примем ее за u^+ . Тогда в силу (3.4.5) $AT^+u = 0$. В силу обратимости оператора A , $T^+u = 0$. В силу единственности для задачи Неймана в Ω^+ , $u = 0$ и $u^+ = \varphi = 0$. Из (3.4.5) видно также, что область значений оператора $\frac{1}{2}I + B$ — все пространство $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. Таким образом, из однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ следует обратимость оператора $\frac{1}{2}I + B$.

Аналогично из однозначной разрешимости этих задач выводится обратимость операторов $\frac{1}{2}I - B$ и $\frac{1}{2}I \pm \hat{B}$. $\square$

4.1b. Неравенства типа Гординга для A , H и $N_\pm$. Идея сильной эллиптичности на границе операторов типа потенциала для сильно эллиптических систем обсуждается в работах [16] и [14], см. также [22] и приведенные там ссылки. К обычно упоминаемым операторам A и H мы добавляем $N_\pm$.

Предложение 4.1.2. Из неравенств

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\pm)} \leq C_1 \text{Re } \Phi_\pm(u, u) \quad (4.1.1)$$

для $u \in H^1(\Omega^\pm)$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 &\leq C_2 \text{Re}(A\psi, \psi)_\Gamma, \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_3 \text{Re}(H\varphi, \varphi)_\Gamma, \\ \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 &\leq C_4 \text{Re}(N_\pm\psi, \psi)_\Gamma \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

для $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Проверим третьи неравенства в (4.1.2). Пусть u — решение задач Неймана для уравнения $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$ с $\pm T^\pm u = \psi$. Тогда

$$\Phi_\pm(u, u) = \pm(T^\pm u, u^\pm)_\Gamma = (\psi, N_\pm\psi)_\Gamma$$

и

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_5 \|u\|_{H^1(\Omega^\pm)}^2 \leq C_6 \text{Re } \Phi_\pm(u, u).$$

Отсюда и получается нужный результат.

Два первых неравенства в (4.1.2) получаются из аналогичных соображений. Но можно также заметить следующее. Все эти неравенства можно переписать с обратными операторами:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &\leq C_7 \operatorname{Re}(A^{-1}\varphi, \varphi)_\Gamma, \quad \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_8 \operatorname{Re}(H^{-1}\psi, \psi)_\Gamma, \\ \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &\leq C_9 \operatorname{Re}(D_\pm \varphi, \varphi)_\Gamma. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Из приведенного ниже предложения 4.1.3 видно, что первые два неравенства в (4.1.2) и в (4.1.3) вытекают из третьих. $\square$

Из предложения 4.1.2 и из (1.1.5) или (2.2.9) видно, что при условии II собственные значения операторов A^{-1} , H и $D_\pm$ лежат в угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ раствора меньше π (и окрестности начала). При условии I раствор угла можно взять сколь угодно малым.

4.1с. Связь операторов A , B , $\widehat{B}$ и H с операторами $N_\pm$ и $D_\pm$.

Предложение 4.1.3. *Справедливы соотношения*

$$A^{-1} = D_+ + D_-, \quad H^{-1} = N_+ + N_-, \quad N_\pm = (\tfrac{1}{2}I \pm B)^{-1}A, \quad D_\pm = (\tfrac{1}{2}I \mp \widehat{B})^{-1}H. \quad (4.1.4)$$

Доказательство. Мы имеем при совпадающих $u^\pm$ в силу (3.1.8)

$$u^\pm = -A[Tu]_\Gamma = A(D_+ + D_-)u^\pm.$$

Таким образом, $D_+ + D_-$ — правый обратный к A . Но последний оператор обратим, значит, это и левый обратный.

Аналогично при совпадающих $T^\pm u$ в силу (3.4.2)

$$T^\pm u = -H[u]_\Gamma = H(N_+ + N_-)T^\pm u.$$

Значит, $N_+ + N_-$ — правый обратный к H . Но H — обратимый оператор, значит, это и левый обратный.

Наконец, два последних соотношения в (4.1.4) следуют из (3.4.5)–(3.4.8). $\square$

Отсюда также видно, что операторы $N_+ + N_-$ и $D_+ + D_-$ обратимы.

4.2. Сведение задач сопряжения к уравнениям на границе.

Предложение 4.2.1. *1-я и 2-я спектральные задачи сопряжения на собственные функции эквивалентны уравнениям*

$$\psi = \lambda A\psi \quad \text{и} \quad H\varphi = \lambda\varphi, \quad (4.2.1)$$

где соответственно

$$\psi = -[Tu]_\Gamma, \quad u = \mathcal{A}\psi \quad \text{и} \quad \varphi = [u]_\Gamma, \quad u = \mathcal{B}\varphi. \quad (4.2.2)$$

Доказательство: непосредственная проверка.

Отметим, что эти операторы и задачи могут иметь присоединенные функции.

Добавим, что общая задача сопряжения (2.4.1) однозначно разрешима (вместе с задачами Дирихле и Неймана). Решение выражается формулой

$$u = \mathcal{B}g - \mathcal{A}h. \quad (4.2.3)$$

Это видно из (3.1.8). Соотношения (2.4.1) для этой функции легко проверяются при помощи формул скачков (3.2.1).

4.3. Спектральные свойства операторов на Γ . Для определенности подробно рассмотрим оператор H ; спектральные свойства операторов A^{-1} и $D_{\pm}$ аналогичны его свойствам и получаются аналогично.

Пусть сначала система (1.1.1) формально самосопряженная. Тогда в силу предложения 3.3.1 $H^* = H$. Предполагая обратимость оператора H , мы можем принять за скалярное произведение в $H^{-1/2}(\Gamma)$ форму $(H^{-1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma}$. Тогда H^{-1} — самосопряженный положительный компактный оператор в этом пространстве, так что у него там есть базис, ортогональный относительно этого скалярного произведения, из собственных функций. Они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$ и там образуют базис, ортогональный относительно скалярного произведения $(H\varphi_1, \varphi_2)_{\Gamma}$ в этом пространстве. Более того, собственные функции принадлежат всем пространствам $H^{\sigma}(\Gamma)$, $-1 < \sigma < 1$, и в каждом из них можно ввести скалярное произведение $(H^{2\sigma} \cdot, \cdot)_{\Gamma}$. Они ортогональны относительно него. За нормировку примем нормировку в $L_2(\Gamma)$.

Теперь рассмотрим более общий случай и выведем оптимальные оценки для резольвент.

Предложение 4.3.1. *Пусть выполнены наши предположения, обеспечивающие однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана при $(s, t) \in Q_{\delta}$. Тогда существуют такие положительные числа μ_0 , C_1 и $\delta_1 \leq \delta$, что при $-\operatorname{Re} \lambda = \mu \geq \mu_0$ для решений уравнения*

$$(H - \lambda I)\varphi = \psi \quad (4.3.1)$$

при $(s, t) \in Q_{\delta_1}$ справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{B_p^{1/2+s}(\Gamma)} + \mu\|\varphi\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)} \leq C_1\|\psi\|_{B_p^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.3.2)$$

Доказательство. Пусть $(s, t) \in Q_{\delta}$, $\mu = -\operatorname{Re} \lambda$. Мы имеем

$$\operatorname{Re}(H\varphi, \varphi)_{\Gamma} + \mu(\varphi, \varphi)_{\Gamma} = \operatorname{Re}(\psi, \varphi)_{\Gamma}. \quad (4.3.3)$$

Приняв, что выполнено второе неравенство в (4.1.2), можно положить $\mu_0 = 0$. Из этого соотношения и из (4.3.3) получаем

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq C_2\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

так что $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_2\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$. Поэтому $\|H\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_3\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ и в силу (4.3.1) $\mu\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_4\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$. Таким образом, получается нужная оценка в центре квадрата Q :

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \mu\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_5\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (4.3.4)$$

Если $\psi \in L_2(\Gamma)$, то из (4.3.3)

$$\mu\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (4.3.5)$$

Интерполируя эту оценку и предыдущую для $\mu\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, получаем при $0 < s < 1/2$

$$\mu\|\varphi\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)} \leq C_6\|\psi\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)}. \quad (4.3.6)$$

Теперь из (4.3.1) получаем оценку для $\|H\varphi\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)}$ и как следствие для $\|\varphi\|_{H^{1/2+s}(\Gamma)}$. Это приводит к оценке (4.3.2) в точках $(s, 1/2)$ при $0 < s < 1/2$. На $s \in (-1/2, 0)$ она распространяется переходом к формально сопряженной задаче с учетом второго из равенств (3.3.1) и с использованием уравнения (4.3.1).

Далее используем оценки Шнейберга. $\square$

Оператор H в этом предложении — слабое возмущение самосопряженного оператора в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Поворотами λ -плоскости (см.(2.2.9)) результаты распространяются на дополнение к сколь угодно узкой угловой окрестности луча $\mathbb{R}_+$ с $|\lambda|$ вместо μ и окрестности начала.

Если мы имеем однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана только в $Q_{\delta,\varepsilon}$, то в $Q_{\delta_1,\varepsilon}$ получаются аналогичные результаты при помощи оценок Шнейберга. В этом случае спектр оператора H лежит в некотором угле раствора меньше π с биссектрисой R_+ и окрестности начала.

Теорема 4.3.2. Пусть выполнены наши предположения, обеспечивающие однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ при $(s, t) \in Q_\delta$.

Тогда собственные значения $\lambda_k(H)$ оператора H не зависят от $(s, t) \in Q_\delta$. Занумерованные в порядке неубывания модулей с учетом кратностей, они лежат с некоторого номера в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ и имеют оценку $O(k^{1/(n-1)})$. Корневые функции также не зависят от $(s, t) \in Q_\delta$ и принадлежат объединению соответствующих пространств Бесова $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$.

Пусть $(s, t) \in Q_{\delta_1}$. Тогда резольвента $(H - \lambda I)^{-1}$ представима в виде отношения целых аналитических функций, операторнозначной и числовой; функция в знаменателе — роста не выше чем порядка $n - 1$ и нормального типа; норма числителя имеет аналогичную оценку. Во всех $B_p^{\pm 1/2+s}(\Gamma)$ имеет место полнота корневых функций и суммируемость рядов Фурье по ним (они пишутся одинаково при всех (s, t)) методом Абеля–Лидского порядка q , если $q > n - 1$. В частности, все это верно при $0 < |t - 1/2| < \delta_1$, если L — формально самосопряженный оператор.

Пусть теперь выполнены только предположения, обеспечивающие однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ при $(s, t) \in Q_{\delta,\varepsilon}$. Тогда предыдущие утверждения справедливы со следующими поправками. Прежде всего Q_δ и Q_{δ_1} заменяются на $Q_{\delta,\varepsilon}$ и $Q_{\delta_1,\varepsilon}$. Далее, сколь угодно узкая окрестность луча $\mathbb{R}_+$ заменяется углом с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ раствора $2\theta + \eta$, где θ определено в (2.2.9), а η — произвольно малое положительное число. Полнота и суммируемость методом Абеля–Лидского порядка q имеют место при $2(n - 1)\theta < \pi$ и $q \in (n - 1, \pi/2\theta)$.

Аналогичные результаты справедливы, при соответствующих предположениях, для операторов A^{-1} и $D_\pm$.

Поясним, что здесь мы используем рассуждения из [7]. В случае оператора A^{-1} надо предполагать однозначную разрешимость задач Дирихле в $\Omega^\pm$ и условие (2.2.9) можно заменить на (1.1.5). В случае оператора D_+ предполагаем однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана в Ω^+ . Здесь уточняется сказанное об этом операторе и обратном к нему N_+ в [7].

§5. Комментарии и обобщения

5.1. Дополнительные условия в случае систем. Пусть $a_{j,k}(x) = a_{j,k}^{r,s}(x)$. Условие неотрицательности из п. 2.2 есть условие неотрицательности эрмитовой формы

$$\sum a_{j,k}^{r,s}(x) \zeta_k^s \bar{\zeta}_j^r \quad (5.1.1)$$

при $x \in \mathbb{T}$, или, что то же, эрмитовой матрицы $A(x)$ порядка mn , составленной из блоков $a_{j,k}(x)$. (Напомним, что это условие нужно нам в случае $a_{j,k}^* = a_{k,j}$.)

Условие неотрицательности следует, как мы сейчас увидим, из известных условий, достаточных для коэрцитивности формы $\operatorname{Re} \Phi_{0,\pm}(u, u)$ на $H^1(\Omega^\pm)$. Простейшее условие состоит в равномерной положительной определенности формы $\sum [a_{j,k}^{r,s} + \overline{a_{k,j}^{s,r}}] \zeta_k^s \overline{\zeta_j^r}$; но оно обременительно.

Другие достаточные условия обсуждаются, например, в [28] и [22]. См. теорему 4.9 в [22]. Не повторяя формулировку, отметим, что они относятся к случаю, когда

$$a_{j,k}(x) = \sum_{l=1}^K b_{j,l}(x) b_{l,k}^*(x) \quad (5.1.2)$$

при некотором K , где $b_{j,l}(x)$ — комплексные векторы-столбцы высоты m . Как легко понять, в этом случае $A(x)$ — сумма K матриц Грама системы из mn одномерных векторов, так что условие неотрицательности очевидным образом выполнено.

Мы можем указать другое условие, достаточное для коэрцитивности нашей формы на $H^1(\Omega^\pm)$, немного обобщающее условие, упомянутое в [2]. Пусть сначала $m = n$. Условие состоит в том, что

$$\sum [a_{j,k}^{r,s}(x) + \overline{a_{k,j}^{s,r}}(x)] \zeta_k^s \overline{\zeta_j^r} \geq C \sum |\zeta_j^r + \zeta_r^j|^2 \quad (5.1.3)$$

при всех x и всех комплексных числах ζ_j^r . Нужная коэрцитивность проверяется при помощи неравенства Корна. Это условие обобщается на случай $m \neq n$ так: «недостающие» числа ζ_j^r полагаем равными нулю. См. указания в [2] и [30].

Условие неотрицательности следует и из (5.1.3). Весьма общий класс систем, для которых условие (5.1.3) выполнено, — это обобщенные системы анизотропной упругости при любом n , см. [30]. Это сильно эллиптические системы с вещественными матрицами $a_{j,k}(x) = (a_{j,k}^{r,s}(x))$, выдерживающими перестановки (r, j) с (s, k) и r с j .

5.2. Фредгольмовы задачи. Если мы меняем младшие члены в операторе L , то задачи Дирихле и/или Неймана могут потерять однозначную разрешимость, но останутся фредгольмовыми с нулевым индексом. Пусть при этом оператор L на торе остается обратимым. Тогда операторы A и/или H тоже могут потерять обратимость, но останутся фредгольмовыми операторами с нулевым индексом. Добавим, что если λ — собственное значение, скажем, для H , то $H - \lambda I$ — фредгольмов оператор из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ с нулевым индексом. Выше мы рассматривали только обратимые операторы для экономии места. Отметим также, что фундаментальное решение часто заменяют ядром параметрикса (ср., например, [22]), это позволяет освободиться и от предположения об обратимости оператора L на торе. Подробно обсуждать все это здесь нет места.

5.3. Внешние задачи. Общеизвестна важность ситуации, когда вместо двух областей на торе мы имеем ограниченную область $\Omega = \Omega^+ \in \mathbb{R}^n$ и неограниченное дополнение $\Omega^- \in \overline{\Omega^+}$ в $\mathbb{R}^n$. Если заниматься только задачами во внутренней

¹⁾Кстати, в этом случае условие (2.2.9) можно заменить условием положительной определенности формы, аналогичной (5.1.1), с матрицами $e^{i\psi} a_{j,k}(x)$ вместо $a_{j,k}(x)$.

области и операторами на границе, то довольно далеко можно продвинуться, следуя [14] и [22]. Но внешние задачи Дирихле и Неймана интересны и сами по себе. Естественное предположение, при котором, на наш взгляд, их следует в первую очередь рассматривать, состоит в том, что коэффициенты системы постоянны в окрестности бесконечности и поведение решений однородной системы на бесконечности подчиняется условию, определяемому выбором фундаментального решения. См., например, [2], где $p = 2$. Общая точка зрения на такие условия изложена в [15]. По-видимому, естественными классами решений являются тогда пространства функций из $H_{p,\text{loc}}^\sigma(\Omega^-)$ или $B_{p,\text{loc}}^\sigma(\Omega^-)$, гладких в окрестности бесконечности и подчиненных выбранному условию. Для проработки этой темы в настоящей статье нет места.

5.4. Другие многообразия. Конечно, наши результаты переносятся на другие многообразия вместо тора. Это требует лишь дополнительных (громоздких) рассуждений более общих систем локальных координат.

Упомянем, что использование периодических локальных координат сейчас стало популярным в теории псевдодифференциальных операторов, оно позволило получить там новые результаты (см., в частности, [31]).

5.5. Граничные условия на незамкнутой поверхности. Пусть Γ_1 — компактная и для простоты односвязная липшицева $(n-1)$ -мерная поверхность, лежащая внутри тора $\mathbb{T}$ и имеющая липшицев край. Примем, что она лежит на замкнутой липшицевой поверхности Γ и $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_1}$ — вторая незамкнутая липшицева поверхность с тем же краем. Поставим на Γ_1 условия сопряжения или (двусторонние) условия Дирихле или Неймана. Вне Γ_1 решение подчиняется сильно эллиптической системе. В выборе Γ_2 остается произвол. Некоторый класс таких задач (для систем с постоянными коэффициентами) рассмотрен в [4]. Результаты обобщаются не только на системы, рассмотренные в настоящей работе, но и на пространства, отвечающие точкам (s, t) из $Q_{\delta, \varepsilon}$. Мы предполагаем вернуться к этим задачам в другом месте.

§6. Дополнения

6.1. Пространства бесселевых потенциалов и пространства Бесова в липшицевых областях на $\mathbb{T}$. На торе $\mathbb{T}$ удобно пользоваться рядами Фурье вместо преобразования Фурье. Каждой функции или обобщенной функции f сопоставляется набор $Ff = \{c_\alpha(f)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ее коэффициентов Фурье по системе $\{e^{i\alpha \cdot x}\}$. Положим

$$\Lambda^\tau f = F^{-1}\{c_\alpha(f)(1 + |\alpha|)^\tau\} \quad (\tau \in \mathbb{R}). \quad (6.1.1)$$

Пространство $H_p^\sigma(\mathbb{T})$ ($p > 1$) при целом $\sigma \geq 0$ совпадает с пространством Соболева $W_p^\sigma(\mathbb{T})$, а пространство $B_p^\sigma(\mathbb{T})$ при нецелом $\sigma > 0$ совпадает с пространством Слободецкого $W_p^\sigma(\mathbb{T})$. На остальные $\sigma \in \mathbb{R}$ определения пространств $H_p^\sigma(\mathbb{T})$ и $B_p^\sigma(\mathbb{T})$ обобщаются при помощи оператора (изоморфизма) (6.1.1), при $\tau > 0$ понижающего верхний индекс на τ . Функции из $C^\infty(\mathbb{T})$ плотны в этих пространствах.

Пространство $H_p^\sigma(\Omega^\pm)$ состоит из сужений на $\Omega^\pm$ функций или обобщенных функций из $H_p^\sigma(\mathbb{T})$ с обычной нормой $\inf$. Имеется универсальный ограниченный оператор продолжения $\mathcal{E}$ функций из первого пространства во второе. Для

$\mathbb{R}^n$ вместо тора он построен в [32]; в случае тора используется та же локальная конструкция возле границы.

Пространство $\tilde{H}_p^\sigma(\Omega^\pm)$ определяется как подпространство в $H_p^\sigma(\mathbb{T})$, состоящее из элементов с носителями в $\overline{\Omega^\pm}$.

Пространства $H_p^\sigma(\Omega^\pm)$ и $\tilde{H}_{p'}^{-\sigma}(\Omega^\pm)$ взаимно сопряжены относительно продолжения формы

$$(u, f)_{\Omega^\pm} := (\mathcal{E}u, f)_{\mathbb{T}} \quad (6.1.2)$$

на прямое произведение этих пространств.

Оператор умножения на функцию, удовлетворяющую условию Липшица, ограничен в $H_p^\sigma(\Omega)$ при $|\sigma| \leq 1$.

Все сказанное про пространства H_p^σ в четырех последних абзацах остается в силе для соответствующих пространств B_p^σ с тем же оператором продолжения $\mathcal{E}$. При $p = 2$ эти пространства совпадают; индекс 2 опускается.

Нормы в пространствах $B_p^\sigma(\Gamma)$ на липшицевой поверхности Γ определяются при $|\sigma| \leq 1$ при помощи разбиения единицы и норм в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пространства $B_p^\sigma(\Gamma)$ и $B_{p'}^{-\sigma}(\Gamma)$ взаимно сопряжены относительно продолжения естественно определяемого скалярного произведения $(u, v)_\Gamma$ в $L_2(\Gamma)$ на прямое произведение этих пространств.

При $1/p < \sigma < 1 + 1/p$ имеется ограниченный оператор $\gamma^\pm$ перехода от функции из $H_p^\sigma(\Omega^\pm)$ или $B_p^\sigma(\Omega^\pm)$ к ее следу в $B_p^{\sigma-1/p}(\Gamma)$, этот оператор сюръективен и имеет ограниченный правый обратный (одинаковый для пространств H и B в $\Omega^\pm$). Две функции из указанных пространств H или B в $\Omega^\pm$ составляют единую функцию из $H_p^\sigma(\mathbb{T})$ или $B_p^\sigma(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда эти следы совпадают. При $0 < \sigma < 1/p$ тоже получается единая функция из этих пространств.

См., например, [20], [35] и цитируемую там обширную литературу; кое-что можно найти в [8].

6.2. Замечания к рассмотрению спектральных вопросов. Пусть X и Y — банаховы пространства и Y компактно вложено в X . Если T — ограниченный оператор из X в Y , то мы можем рассматривать его как компактный оператор в X . Например, у нас A и $N_\pm$ — компактные операторы в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Если T — ограниченный оператор из Y в X , то мы можем рассматривать T как неограниченный оператор в X с областью определения Y , и если его резольвентное множество непусто, то T — оператор с компактной резольвентой. У нас H и $D_\pm$ — такие операторы в том же пространстве Бесова.

При $p = 2$ наши пространства Бесова являются гильбертовыми пространствами, и в таком пространстве самосопряженный компактный оператор имеет ортонормированный базис из собственных функций. То же верно в отношении самосопряженного оператора с компактной резольвентой. Для упомянутых выше операторов это случай формально самосопряженного оператора L . Наши операторы к тому же полуограничены снизу.

В общем случае, когда p не обязательно равно 2, так что пространства могут быть только банаховыми, или $p = 2$, но операторы не являются самосопряженными, имеются теоремы о полноте корневых функций и о суммируемости рядов Фурье по ним, в частности, методом Абеля–Лидского. В наших рассмотрениях

это случай, когда значения главной части квадратичной формы оператора содержатся в достаточно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ (ср. с (2.2.9) и (1.1.5)). См. [7] и приведенные там ссылки. В частности, если оператор L является слабым возмущением самосопряженного, то этот угол сколь угодно узок. Это случай эрмитова главного символа $a(x, \xi)$.

Любое утверждение о суммируемости сильнее, чем утверждение о полноте корневых функций.

6.3. Поправки к работам [6], [7]. 1. Основная поправка уже указана в тексте. Метод Саваре применим, если главный символ системы эрмитов. В этом случае результаты получаются этим методом или (для задачи Дирихле) из тождеств Реллиха в Q_δ . Этот случай мы считаем наиболее интересным. Если условие эрмитовости не выполнено, то они получаются в $Q_{\delta, \varepsilon}$. Это относится и к системам высших порядков [6], и к спектральным результатам [7]. Спектральные результаты сильнее в первом случае: собственные значения оператора (для определенности неограниченного) находятся в сколь угодно узкой окрестности луча $\mathbb{R}_+$ (и окрестности начала), и результат о суммируемости рядов Фурье по корневым функциям методом Абеля–Лидского верен безоговорочно. Но и во втором случае результаты, на наш взгляд, представляют некоторый интерес.

2. Укажем технические уточнения к выводу оценок резольвент в [7].

В п. 2.2 в [7] оценку (2.2.4) надо заменить следующей легко проверяемой оценкой:

$$(\mathcal{T}_h u, \mathcal{T}_h u)_\Omega - (u, u)_\Omega \leq C_4 |h| \|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})} \|u\|_{L_2(\Omega_{3\rho})}.$$

Из соотношения $\operatorname{Re} \Phi(u, u) + \mu(u, u)_\Omega = \operatorname{Re}(f, u)_\Omega$ при $f \in L_2(\Omega)$ следует, что

$$\mu \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C'_4 \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Это неравенство используется при выводе оценки (2.2.1) в [7].

В п. 4.2 в [7] оценку (4.2.12) надо доказывать по образцу доказательства предложения 4.1.1 в настоящей работе, полагая $u = \mathcal{B}\varphi$ в Ω^+ , $u = 0$ в Ω^- .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 63, ВИНТИ, М., 1990, 5–129.
- [2] М. С. Агранович, *Спектральные свойства операторов типа потенциала для некоторого класса сильно эллиптических систем на гладких и липшицевых поверхностях*, Труды ММО, **62** (2001), 5–55.
- [3] М. С. Агранович, *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей*, УМН, **57:5** (2002), 3–78.
- [4] М. S. Agranovich, *Strongly elliptic second order systems with spectral parameter in transmission conditions on a nonclosed surface*, in: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 164, Birkhäuser, Basel, 2006, 1–21.
- [5] М. С. Агранович, *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **40:4** (2006), 83–103.
- [6] М. С. Агранович, *К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **41:4** (2007), 1–21.
- [7] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ* , Функц. анализ и его прил., **42:4** (2008), 2–23.

- [8] M. S. Agranovich, *Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary*, Russian J. Math. Phys., **15**:2 (2008), 146–155.
- [9] M. S. Agranovich, B. A. Amosov, M. Levitin, *Spectral problems for the Lamé system with spectral parameter in boundary conditions on smooth or nonsmooth boundary*, Russian J. Math. Phys., **6**:3 (1999), 247–281.
- [10] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin etc., 1999. (Переработанное английское издание книги [37].)
- [11] М. С. Агранович, Р. Менникен, *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности*, Матем. сб., **190**:1 (1999), 29–68.
- [12] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74** (1977), 1324–1327.
- [13] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math., **116**:2 (1982), 361–388.
- [14] M. Costabel, *Boundary integral operators in Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal., **19**:3 (1988), 613–626.
- [15] M. Costabel, M. Dauge, *On representation formulas and radiation conditions*, Math. Methods Appl. Sci., **20**:2 (1997), 133–150.
- [16] M. Costabel, W. L. Wendland, *Strong ellipticity of boundary integral operators*, J. Reine Angew. Math., **372** (1986), 34–63.
- [17] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *Boundary value problems for the systems of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**:3 (1988), 795–818.
- [18] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959.
- [19] D. Jerison, C. E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 164–219.
- [20] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* , Math. Rep., Ser. 2, no. 1, Academic Publ., Harwood, 1984.
- [21] P. D. Lax, A. N. Milgram, *Parabolic equations*, in: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Annals of Math. Studies, vol. 33, 1954, 167–190.
- [22] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [23] V. Maz'ya, M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients*, <http://arxiv.org/abs/math/0701898>.
- [24] В. Мазья, М. Митреа, Т. Шапошникова, *Неоднородная задача Дирихле для системы Стокса в липшицевых областях с единичной нормалью, близкой к VMO*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 65–88.
- [25] D. Mitrea, M. Mitrea, M. Taylor, *Layer potentials, the Hodge Laplacian, and global boundary value problems in nonsmooth Riemannian in Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc., **150**:713 (2001).
- [26] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163**:2 (1999), 181–251.
- [27] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176**:1 (2000), 1–79.
- [28] J. Nečas, *Les methodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [29] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1965), 649–675.

- [30] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [31] M. Ruzhansky, V. Turunen, *On the Fourier analysis of operators on the torus*, in: Modern Trends in Pseudo-Differential Operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 172, Birkhäuser, Basel, 2007, 87–105.
- [32] V. S. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. (2), **60**:1 (1999), 237–257.
- [33] G. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **152**:1 (1998), 176–201.
- [34] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.
- [35] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Complut., **15**:2 (2002), 475–524.
- [36] М. И. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. сб., **29(71)**:3 (1951), 615–676.
- [37] Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции*, с добавлением М. С. Аграновича «Спектральные свойства задач дифракции», стр. 289–416, Наука, М., 1977.

Московский институт электроники и математики
e-mail: magran@orc.ru

Поступило в редакцию
19 января 2009 г.