Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, О возмущении спектра дифференциального оператора, порожденном ограниченным изменением потенциала, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 3, 54–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:11:11

О возмущении спектра дифференциального оператора, порожденном ограниченным изменением потенциала*

© 2009. Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко

Памяти Соломона Григорьевича Михлина

Рассматривается возмущение потенциала дифференциального оператора ограниченным измеримым добавочным слагаемым. Доказывается, что если некоторое среднее этого слагаемого имеет предел, то последовательность чезаровских средних возмущения спектра имеет тот же предел.

§1. Введение

Рассматривается симметрический оператор A в $L_2(\mathbb{R}^n)$, заданный выражением $P(i\partial/\partial x) + q(x)$, где P — однородный многочлен степени $2m$, $P(x) > 0$ при $x \neq 0$, функция q гладкая положительная и $q(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. При этих условиях оператор A самосопряжен и имеет дискретный спектр $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Возьмем, далее, вещественную измеримую ограниченную функцию $b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и оператор $\tilde{A}$, полученный из A заменой функции q на $q + b$. Рассмотрим его спектр $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ и величины $\Delta_k = \tilde{\lambda}_k - \lambda_k$ (возмущение спектра). Так как мы не накладываем никаких условий гладкости на функцию b , то нельзя ожидать регулярного поведения последовательности $\{\Delta_k\}$. Если, однако, некоторое усреднение функции b имеет предел при $|x| \rightarrow \infty$, то можно надеяться, что и некоторое усреднение последовательности Δ_k имеет предел при $n \rightarrow \infty$ и, вероятно, тот же. Было бы интересно проследить связь между этими двумя средними (одно — в пространстве ограниченных измеримых функций, другое — в пространстве числовых последовательностей, стремящихся к бесконечности).

В данной работе (теоремы 2, 3 ниже) используются два способа усреднить возмущение потенциала — оба они являются вариантами усреднения по Риссу; доказывается, что в обоих случаях соответствующее возмущение спектра описывается при помощи чезаровских средних в пространстве ограниченных последовательностей (предела последовательности средних арифметических). В теореме 4 рассматривается возмущение потенциала, для которого риссовское среднее может стремиться к нулю; в этом случае дается более детальное описание возмущения спектра. Эти результаты выводятся из «абстрактной» теоремы о возмущениях (теорема 1).

Для доказательства теорем 2–4 нам понадобится функция Грина параболического уравнения (ядро интегрального оператора $\exp(-tA)$), обозначаемая через $G(x, y, t)$, и ее асимптотика при $t \rightarrow +0$, равномерная по $x, y \in \mathbb{R}^n$. Эта асимптотика была выведена вторым автором в лекциях [1] сравнительно слож-

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00595 и грантом НШ 2372.2008.1.

ным способом. Мы приведем другой (достаточно короткий) вывод (теорема 5); полученная асимптотическая формула имеет несколько иную форму, чем в [1].

Мы ограничиваемся случаем однородного многочлена P , задающего дифференциальный оператор; однако результаты переносятся на более общий случай.

§2. Формулировки теорем

Начнем с «абстрактной» теоремы о возмущении спектра. Пусть H — гильбертово пространство и A — самосопряженный оператор с дискретным спектром $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Пусть, далее, B — ограниченный самосопряженный оператор и $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ — спектр оператора $A + B$. Рассмотрим величины $\Delta_k = \tilde{\lambda}_k - \lambda_k$. Положим $w(t) = \text{Tr}(\exp(-tA))$ (эта функция предполагается конечной).

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \exp(-t\lambda_k) = \text{Tr}(B \exp(-tA)) + O(tw(t/3)) \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (1)$$

Сумма, записанная в левой части равенства (1), возникала неоднократно — при выводе формул «регуляризованных следов». обстоятельный обзор этой тематики содержится в [2], где можно найти все необходимые ссылки. Мы отметим лишь работу Подольского [3], ибо теорема 1 уточняет один из результатов этой работы. Уточнение заключается в форме остаточного слагаемого в правой части равенства (1).

Сейчас нам понадобится «считающая функция» $N(\lambda) = \max\{k : \lambda_k \leq \lambda\}$; подчиним ее условию

$$N(\lambda)/N(\lambda') \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda/\lambda' \rightarrow 1, \lambda \rightarrow \infty; \quad (2)$$

в интересующих нас случаях это условие можно будет легко проверить при помощи асимптотической формулы для этой функции.

Следствие 1. *Пусть $\text{Tr}(B \exp(-tA)) = (l + o(1)) \text{Tr}(\exp(-tA))$ при $t \rightarrow +0$. Пусть, далее, $tw(t/3) = o(w(t))$, $t \rightarrow +0$. Тогда*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta_k \rightarrow l \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Это следствие будет выведено (в §3) из теоремы 1 при помощи тауберовой теоремы Караматы.

Обратимся к дифференциальному оператору $A = P(i\partial/\partial x) + q(x)$. Положим $\alpha = 2m/(2m-1)$, $\beta = 1/(2m-1)$, $\theta = n/(2m)$. Наложим на функцию q следующие ограничения.

Существуют такие положительные числа L , $\delta < 1 + 1/(2m)$ и μ , что

- (i) $|q(x) - q(y)| \leq L|x - y|q^\delta(x)$ при $|x - y| \leq 1$;
- (ii) $q(x)/q(y) \leq L$ при $|x - y| \leq 1$;
- (iii) $q(y) \leq Lq^\mu(x) \exp(L|x - y|^\alpha)$ для всех x, y ;
- (iv) функция $v(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-tq(x)) dx$, $t > 0$, конечна, и $v(at)t^\epsilon = o(v(t))$ при $t \rightarrow +0$ для некоторого (а потому и для любого) $a \in (0, 1)$, где $\epsilon = 1 + 1/(2m) - \delta$.
- (v) $\int_{\mathbb{R}^n} q^{-r}(x) dx < \infty$ для некоторого $r > 0$.

Условимся считать (это, разумеется, допустимо), что $\delta \in [1/(2m), 1 + 1/(2m))$ и $\mu \geq 1$; таким образом, $0 < \epsilon \leq 1$.

При доказательстве теорем 2–4 мы опираемся на теорему 5, доказываемую в §5. В следующей теореме 2 мы усредняем возмущения потенциала по областям вида $\{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \leq R\}$. Введем функцию $M(v), v \geq 0$, и ее среднее порядка k равенствами

$$M(v) = \int_{q(x) < v} b(x) dx, \quad M_k(v) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^v M(u)(v-u)^{k-1} du.$$

Аналогичные функции, построенные заменой функции b на 1, обозначим через M° и M_k° .

Теорема 2. Пусть

$$M_k(v)/M_k^\circ(v) \rightarrow l \quad \text{при } v \rightarrow \infty \quad (3)$$

для некоторого $k \in \{0, 1, \dots\}$. Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i \rightarrow l \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Для формулировки теоремы 3 понадобится иной вариант усреднения функции b . Предположим, что она гладкая (класса C^1). Рассмотрим векторное поле ν на $\mathbb{R}^n$, заданное вне некоторого компакта K . Предположим, что для любой точки $x \notin K$ имеется интегральная кривая, которая начинается в точке из K , проходит через x и уходит затем в бесконечность. Пусть дана 1-форма ω^1 , определенная вне K и удовлетворяющая условиям $\langle \omega^1, \nu \rangle = 1$, $\nu q \geq 0$ (здесь взята производная функции q вдоль векторного поля ν). (Таким образом, функция q возрастает, если двигаться по интегральной кривой в бесконечность.) Часть этой интегральной кривой от точки, лежащей в K , до x обозначим через s_x . Определим усреднение функции b равенством

$$b^\circ(x) = \int_{s_x} b \omega^1 / \int_{s_x} \omega^1. \quad (5)$$

Теорема 3. Пусть

$$b^\circ(x) \rightarrow l \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда выполняется соотношение (4).

Вернемся к теореме 1, считая, что $l = 0$. В этом случае хотелось бы получить более детальную характеристику возмущения спектра $\{\Delta_k\}$. В следующей теореме мы сделаем это, ограничившись случаем, когда функции $N(\lambda)$ и $M(v)$ имеют степенную асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $v \rightarrow +\infty$ соответственно. В теореме используется величина γ , указанная после формулировки теоремы 5.

Теорема 4. Пусть $N(\lambda) \simeq N_0 \lambda^a$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $M(v) \simeq M_0 v^h$ при $v \rightarrow +\infty$, причем числа M_0, N_0, a, h положительны и $a > \theta$, $a - \theta - 1 < h < a - \theta$. Пусть, далее, функция $b(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда

$$\sum_{k=0}^n \Delta_k \simeq M_1 n^\tau, \quad n \rightarrow +\infty,$$

где $\tau = (\theta + h)/a$, $M_1 = \gamma M_0 N_0^{-\tau} \Gamma(h+1)/\Gamma(\theta+h+1)$.

Как уже сказано во введении, доказательство теорем 2–4 использует асимптотику функции Грина при $t \rightarrow +0$. Эта асимптотика описывается в следующей теореме 5. Введем функцию

$$G_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-tP(s) - i(x, s)) ds, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0;$$

функция Грина оператора $P(i\partial/\partial x)$ (точнее, соответствующего параболического уравнения) выражается через нее как $G_0(x - y, t)$. Мы используем величины $\alpha, \beta, \theta, \epsilon$, введенные ранее в этом параграфе.

Теорема 5. Пусть выполнены указанные выше ограничения (i)–(v). Тогда для любого N справедливо соотношение

$$G(x, y, t) = \exp(-tq(x))G_0(x - y, t) + O(1)t^{-\theta+\epsilon} \exp\left(-c\left(tq(x) + \frac{|x-y|^\alpha}{t^\beta}\right)\right) + O(1)t^N q^{-N}(x), \quad (7)$$

где число $c > 0$ зависит от N , а $O(1)$ означает функцию, ограниченную при $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$.

Добавим, что справедливо соотношение $G_0(x, x, t) = \gamma t^{-\theta}$, где число γ определяется многочленом $P(x)$.

§3. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Ясно, что $\exp(-t\tilde{\lambda}_k) = \exp(-t\lambda_k)(1 - t\Delta_k + \varepsilon_k(t))$, где $\varepsilon_k(t) = O(t^2)$ равномерно по $k \in \{1, 2, \dots\}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \exp(-t\lambda_k) = t^{-1} \text{Tr}(\exp(-tA) - \exp(-t\tilde{A})) + O(t)w(t), \quad t \rightarrow +0. \quad (8)$$

Исследуем написанный здесь операторный след. Имеем равенство

$$\exp(-tA) - \exp(-t\tilde{A}) = \int_0^t \exp(-(t-s)A)B \exp(-s\tilde{A}) ds$$

(оно проверяется дифференцированием по t и многократно использовалось в литературе). Из него получаем (двукратным применением вписанного здесь интегрального преобразования), что

$$\begin{aligned} \exp(-tA) - \exp(-t\tilde{A}) &= \int_0^t \exp(-(t-s)A)B \exp(-sA) ds \\ &\quad - \int_D \exp(-(t-s)A)B \exp(-(s-s_1)A)B \exp(-s_1\tilde{A}) ds ds_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где последнее слагаемое есть интеграл по треугольнику $D = \{(s_1, s) : 0 \leq s_1 \leq s \leq t\}$. Оценим ядерную норму этого слагаемого. Для этого используем известное неравенство для ядерной нормы: $\|T_1 T_2 T_3\|_1 \leq \|T_1\| \|T_2\|_1 \|T_3\|$ (см. [5, с. 122]). Величины $t-s$, $s-s_1$ и s_1 , участвующие в нашем интеграле, неотрицательны, и их сумма равна t . Следовательно, хотя бы одна из них не меньше величины $t/3$; пусть, например, $s-s_1 \geq t/3$. Тогда $\|\exp(-(s-s_1)A)\|_1 \leq w(t/3)$, и из указанного неравенства следует, что ядерная норма подынтегральной функции не превосходит величины $\|B\|^2 w(t/3)$, а потому ядерная норма последнего

слагаемого в (9) не превосходит величины $\|B\|^2 w(t/3)t^2$. Аналогично оценивается и ядерная норма первого интеграла в (9); его след вычисляется очевидным образом и равен $t \operatorname{Tr}(\exp(-tA)B)$. Получаем, что

$$\operatorname{Tr}(\exp(-t\tilde{A}) - \exp(-tA)) = t \operatorname{Tr}(\exp(-tA)B) + w(t/3)O(t^2).$$

Отсюда и из (8) получаем теорему 1.

Докажем следствие 1. Для этого применим тауберову теорему Караматы [6]; напомним ее. Пусть $A(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, — неубывающая неограниченная функция, удовлетворяющая условиям $A(0) \geq 0$, $A(\lambda)/A(\lambda') \rightarrow 1$ при $\lambda/\lambda' \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow \infty$, а функция $s(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, непрерывна и ограничена снизу. Пусть

$$\int_0^\infty \exp(-t\lambda)s(\lambda) dA(\lambda) = (l + o(1)) \int_0^\infty \exp(-t\lambda) dA(\lambda) \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Тогда

$$\frac{1}{A(x)} \int_0^x s(\lambda) dA(\lambda) \rightarrow l \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Чтобы применить теорему Караматы к следствию 1, возьмем в качестве $A(\lambda)$ считающую функцию $N(\lambda)$, а в качестве $s(\lambda)$ — кусочно-линейную функцию, удовлетворяющую условию $s(\lambda_k) = \Delta_k$. Напомним, что выполнено также условие (2), которое требуется в теореме Караматы. Отсюда вытекает следствие 1.

§4. Доказательство теорем 2, 3, 4

Обратимся к дифференциальному оператору $A = P(i\partial/\partial x) + q(x)$ и докажем теоремы 2 и 3, используя следствие 1 и теорему 5 (последняя доказывается в §5). Возьмем в качестве B оператор умножения на функцию $b(x)$. Мы пользуемся обозначением $w(t) = \operatorname{Tr}(\exp(-tA))$, введенным в §2. Из формулы (7), записанной при $x = y$, получается асимптотика для функции $G(x, x, t)$, равномерная при $x \in \mathbb{R}^n$. Из нее следует (здесь мы используем условие (v) из §2), что

$$\operatorname{Tr}(B \exp(-tA)) = \gamma t^{-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} b(x) \exp(-tq(x)) dx + o(w(t)), \quad t \rightarrow +0.$$

В частности, взяв функцию $b(x) = 1$, получаем асимптотическую формулу для $w(t)$ при $t \rightarrow +0$. Применим к операторам A и B следствие 1; согласно условию (iv) и неравенству $0 < \epsilon \leq 1$, предпосылки этого следствия выполнены. Оно сводит доказательство теорем 2 и 3 к проверке соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x) \exp(-tq(x)) dx = (l + o(1)) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-tq(x)) dx. \quad (10)$$

Начнем с теоремы 2. Для любой суммируемой функции $\phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x) \phi(q(x)) dx = \int_0^\infty \phi(u) dM(u).$$

(Вот простейший способ доказать это равенство. Достаточно рассмотреть случай, когда функция b положительна и интеграл от нее по $\mathbb{R}^n$ равен единице; таким образом, возникает вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда доказываемое равенство есть выражение математического ожидания случайной величины через ее функцию распределения.) Запишем это равенство для функции

$\phi(u) = \exp(-tu)$. Интегрирование по частям приводит правую часть к виду $t^{k+1} \int_0^\infty M_k(u) \exp(-tu) du$. Аналогично

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-tq(x)) dx = t^{k+1} \int_0^\infty M_k^\circ(u) \exp(-tu) du.$$

По условию теоремы 1 $M_k(v) = (l + o(1))M_k^\circ(v)$ при $v \rightarrow +\infty$, откуда следует (10). Этим доказана теорема 2.

Докажем теорему 3. Положим $k(x) = \int_{s_x} \omega^1$. Тогда $b = \nu(b^\circ r)$, откуда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} b(x) \exp(-tq(x)) dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nu(\exp(-tq(x)) b^\circ(x) r(x)) dx \\ &= t \int_{\mathbb{R}^n} b^\circ(x) r(x) \nu q(x) \exp(-tq(x)) dx. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями теоремы 3, заменим в последнем интеграле b° на $l + o(1)$ и проведем данную выкладку в обратном порядке (при этом используется условие $\nu q \geq 0$). В итоге приходим к соотношению (10); отсюда следует теорема 3.

Докажем теорему 4. Легкий подсчет (с использованием теоремы 5 и условий теоремы 4) приводит к соотношению

$$\text{Tr}(B \exp(-tA)) \simeq M_0 \gamma \Gamma(h+1) t^{-\theta-h}, \quad t \rightarrow +0.$$

С другой стороны, при $c \in (0, 1)$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{-c} \exp(-t\lambda_k) \simeq N_0^{1-c} a \Gamma(a - ac) t^{ac-a}, \quad t \rightarrow +0.$$

Применим его, взяв $c = 1 - (\theta + h)a^{-1}$; при этом выполняется равенство $\theta + h = a - ac$. В итоге получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \exp(-t\lambda_k) \simeq R \sum_{k=0}^{\infty} k^{-c} \exp(-t\lambda_k), \quad t \rightarrow +0,$$

где $R = M_0 N_0^{-\tau} \gamma \Gamma(h+1) (\Gamma(h+\theta))^{-1} a^{-1}$. Применим уже приведенную тауберову теорему, взяв в качестве функции $A(\lambda)$ функцию со скачками k^{-c} в точках λ_k . Будем считать (для определенности), что функция b неотрицательна; таким образом, $\Delta_k \geq 0$, чем обеспечено условие тауберовой теоремы. Это дает теорему 4.

§5. Доказательство теоремы 5

Разобьем доказательство на шаги.

5а. Интегральное уравнение для $G(x, y, t)$. Функция $G(x, y, t)$ есть решение задачи Коши

$$G'_t = (-P(i\partial/\partial x) - q(x))G, \quad G(x, 0) = \delta(x - y).$$

Применим к ней обычный метод (использование параметрикса). Возьмем точку x_0 , перепишем уравнение в виде

$$G'_t = (-P(i\partial/\partial x) - q(x_0))G + (q(x_0) - q(x))G$$

и, считая (временно) последнее слагаемое известным, решим это уравнение; решение выражается через функцию Грина $\exp(-tq(x_0))G_0(x-y, t)$ для оператора $-P(i\partial/\partial x) - q(x_0)$. Получаем интегральное уравнение для функции G . Заменим в нем x_0 на x . В итоге получаем следующее интегральное уравнение:

$$G = K_0 G + f_0. \quad (11)$$

Здесь K_0 — интегральный оператор, действующий по формуле

$$(K_0 f)(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^n \times [0, t]} K(x, \xi; t, s) f(\xi, y, s) d\xi ds,$$

где

$$K(x, \xi; t, s) = \exp(-(t-s)q(x))G_0(x-\xi, t-s)(q(x) - q(\xi)),$$

а $f_0(x, y, t) = \exp(-tq(x))G_0(x-y, t)$. В качестве области определения оператора K_0 возьмем множество всех непрерывных функций f , для которых написанный интеграл, выражающий $K_0 f$, сходится абсолютно (то, что эта область может быть не инвариантной относительно оператора, несущественно). Решение уравнения выражается (пока формально) в виде ряда $f_0 + K_0 f_0 + \dots$. Наша цель — показать, что ряд сходится к искомой функции.

5b. Оценка ядра K и функции f_0 . Будем пользоваться величинами α , β , θ , ϵ , введенными в §2. Используются всевозможные постоянные a_i , b_i и пр., нередко без пояснений; будем свободно увеличивать либо уменьшать эти постоянные, а также использовать одну букву в разных оценках.

Известно, что

$$|G_0(x, t)| \leq a_0 t^{-\theta} \exp(-a|x|^\alpha t^{-\beta}) \quad (12)$$

(a , a_0 выражаются через P ; если необходимо, мы будем заменять число a_0 большим, а a — меньшим числом.) Это неравенство выводится стандартным методом оценки преобразований Фурье (см. [4, с. 35]). Отсюда получаются следующие оценки ядра K и функции f_0 (в этих оценках указанное только что число a заменено на $\min\{1, a\}$):

$$|K(x, \xi; t, s)| \leq a_0 (t-s)^{-\theta} \exp\left(-a\left((t-s)q(x) + \frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-s)^\beta}\right)\right) |q(x) - q(\xi)|, \quad (13)$$

$$|f_0(x, y, t)| \leq a_0 t^{-\theta} \exp\left(-a\left(tq(x) + \frac{|x-y|^\alpha}{t^\beta}\right)\right). \quad (14)$$

5с. Пространства F_σ и основные леммы. Начнем с простой технической леммы; в ней использовано обозначение $r^- = \min\{r, 0\}$.

Лемма 1. Для любых $a > 0$, $\beta > 0$, $\sigma \neq -1$ справедливо неравенство

$$\int_0^t \exp(-a/s^\beta) s^\sigma ds \leq H \exp(-a/t^\beta) a^{(\sigma+1)^-/\beta} (a+t^\beta)^{-1-(\sigma+1)^-/\beta} t^{\sigma+\beta+1}, \quad (15)$$

где число H зависит от σ , β (и не зависит от a и t).

Для доказательства следует сделать замену $a/s^\beta = v$ и затем применить очевидные асимптотические соотношения для интеграла $\int_h^\infty \exp(-v) v^l dv$ при $h \rightarrow +\infty$ и при $h \rightarrow +0$.

Перейдем к основным леммам.

Для каждого числа σ обозначим через F_σ пространство всех непрерывных функций $f(x, y, t)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < 1$, со свойством

$$|f(x, y, t)| \leq b_0 t^\sigma \exp \left(-b \left(tq(x) + \frac{|x-y|^\alpha}{t^\beta} \right) \right)$$

(для некоторых b, b_0). Из (14) следует, что $f_0 \in F_{-\theta}$.

Лемма 2. Если $f \in F_\sigma$, $\sigma \geq -\theta$, то $K_0 f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in F_{\sigma+\epsilon}$ и $|f_2(x, y, t)| \leq R t^M q^{-M}(x)$; здесь M произвольно, а R зависит от M .

Доказательство. Введем область $D = \mathbb{R}^n \times [0, t]$ и ее подмножества $D_1 = \{(\xi, s) : |\xi - x| \leq 1, 0 \leq s \leq t\}$ и $D_2 = \{(\xi, s) : |\xi - x| \geq 1, 0 \leq s \leq t\}$. Нам надлежит оценить функцию

$$(K_0 f)(x, y, t) = \int_D K(x, \xi; t, s) f(\xi, y, s) d\xi ds.$$

Обозначим через f_1 и f_2 функции, полученные как аналогичные интегралы по областям D_1 и D_2 . Докажем, что эти функции удовлетворяют требованиям, указанным в теореме.

Согласно оценке (13), для этого достаточно оценить интегралы вида

$$I_k = \int_{D_k} (t-s)^{-\theta} |q(x) - q(\xi)| \exp \left(-c \left((t-s)q(x) + sq(\xi) + \frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-s)^\beta} + \frac{|y-\xi|^\alpha}{s^\beta} \right) \right) s^\sigma d\xi ds, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

(Здесь в качестве числа c можно взять $\min\{a, b\}$.)

Докажем, что

$$I_1 \leq c_0 t^{\sigma+\epsilon} \exp \left(-c_1 \left(tq(x) + \frac{|x-y|^\alpha}{t^\beta} \right) \right) \quad (17)$$

и

$$I_2 \leq c'_0 t^M q^{-M}(x) \quad (18)$$

с некоторыми постоянными c_0, c_1, c'_0 (число M произвольно, c'_0 зависит от M). Этим будет доказана лемма 2. Мы будем пользоваться свойствами (i)–(v) функции q , приведенными в §2.

Начнем с I_1 ; эта величина задана интегралом (16), где интегрирование производится по D_1 . Оценим выражения, входящие в экспоненты из (16). Из условия (ii) следует, что $(t-s)q(x) + sq(\xi) \geq c_1 tq(x)$. Далее, используя очевидное неравенство $u^\alpha + v^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(u+v)^\alpha$, $u \geq 0, v \geq 0$, заменим $|x-\xi|^\alpha/(t-s)^\beta + |y-\xi|^\alpha/s^\beta$ на $\frac{1}{2}(|x-\xi|^\alpha/(t-s)^\beta + |y-\xi|^\alpha/s^\beta) + 2^{-\alpha}|x-y|^\alpha/t^\beta$. Наконец, используем оценку (i) для $|q(x) - q(\xi)|$. В итоге приходим к неравенству

$$I_1 \leq b_1 \exp(-c_1(tq(x) + |x-y|^\alpha/t^\beta)) q^\delta(x) T,$$

где (здесь переходим к интегрированию по $D = \mathbb{R}^n \times [0, t]$)

$$T = \int_D (t-s)^{-\theta} |x-\xi| s^\sigma \exp \left(-c_2 \left(\frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-s)^\beta} + \frac{|y-\xi|^\alpha}{s^\beta} \right) \right) d\xi ds.$$

В последнем выражении выполним сначала интегрирование по s . Оценим сверху результат интегрирования, используя лемму 1. Для этого возьмем сначала

интеграл по $[0, t/2]$ (при этом можно заменить $t - s$ на $t/2$); это приводит к интегралу вида (15) (в котором t заменено на $t/2$). Затем возьмем интеграл по $[t/2, t]$ (и заменим s на $t/2$); замена переменной $t - s = u$ снова приводит к интегралу вида (15). В итоге получаем, что T не превосходит суммы следующих величин, возможно, умноженных на постоянную (здесь мы переходим к интегрированию по $\mathbb{R}^n$):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c(|x - \xi|^\alpha + |y - \xi|^\alpha)t^{-\beta})t^{\sigma+\beta+1-\theta} \times |x - \xi||y - \xi|^{\alpha\beta^{-1}(\sigma+1)^-}(|y - \xi|^\alpha + t^\beta)^{-1-(\sigma+1)^-\beta^{-1}}d\xi$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c(|x - \xi|^\alpha + |y - \xi|^\alpha)t^{-\beta})t^{\sigma+\beta+1-\theta} \times |x - \xi|^{1+\alpha\beta^{-1}(-\theta+1)^-}(|x - \xi|^\alpha + t^\beta)^{-1-(\theta+1)^-\beta^{-1}}d\xi.$$

Чтобы оценить первое слагаемое, заменим $|x - \xi| \exp(-c|x - \xi|^\alpha/t^\beta)$ большей величиной $d_1 t^{\beta/\alpha}$, затем в полученном интеграле произведем замену $y - \xi = t^{\beta/\alpha}v$. В итоге получаем $d_2 t^{\sigma+(n+1)\beta/\alpha+1-\theta}$, что совпадает с $d_2 t^{\sigma+1+1/(2m)}$. Чтобы оценить второе слагаемое, отбросим из подынтегрального выражения множитель $\exp(-c|y - \xi|^{\alpha l}/t^\beta)$ и полученный интеграл преобразуем по описанному образцу (замена $x - \xi = t^{\beta/\alpha}v$); это дает тот же итог $d_2 t^{\sigma+1+1/(2m)}$ (возможно, с другой постоянной d_2). Итак, мы доказали, что $T \leq d_3 t^{\sigma+1+1/(2m)}$. Теперь для I_1 получаем неравенство

$$I_1 \leq d_0 \exp(-d_1(tq(x) + |x - y|^\alpha/t^\beta))t^{\sigma+1+1/(2m)}q^\delta(x).$$

Применяя неравенство $q^\delta(x) \leq d_3 t^{-\delta} \exp(d_4 tq(x))$, $d_4 < d_1$, получаем утверждение (17).

Обратимся к интегралу I_2 . Здесь мы опишем нужные преобразования, не записывая их явно. Во-первых, заменим $|q(x) - q(\xi)|$ на $Lq^\mu(x) \exp(L|x - \xi|^\alpha)$ (используя условие (iii)). Далее, отбросим множитель $(t - s)^{-\theta} \exp(L|x - \xi|^\alpha)$, ибо он «подавляется» множителем $\exp(-|x - \xi|^\alpha(t - s)^{-\beta})$ (напомним, что $|x - \xi| \geq 1$). Опустим слагаемое $sq(\xi)$. Наконец, перейдем к интегрированию по всей области D . Получаем

$$I_2 \leq b_2 \int_D \exp(-c((t - s)q(x) + |x - \xi|^\alpha(t - s)^{-\beta} + |y - \xi|^\alpha s^{-\beta}))s^\sigma q^\mu(x) d\xi ds.$$

Далее, используя неравенство

$$ax + bx^{-\beta} > a^{\beta/(\beta+1)}(b\beta)^{(\beta+1)^{-1}}, \quad a > 0, b > 0, x > 0 \quad (19)$$

(оно получается вычислением минимума его левой части), заменим $(t - s)q(x) + |x - \xi|^\alpha/(t - s)^\beta$ на $c(q^{\beta/(\beta+1)}(x) + 1/t^\beta)$. В итоге приходим к интегралу по ξ , который вычисляется явно и равен $c't^{\sigma-\theta}$. Итак,

$$I_2 \leq b_3 q^\mu(x) \exp(-c(q^{\beta/(\beta+1)}(x) + 1/t^\beta))t^\sigma.$$

Отсюда следует неравенство (18).

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $|f(x, y, t)| \leq t^M q^{-N}(x)$ (для некоторых M, N). Тогда справедливо неравенство $|(K_0 f)(x, y, t)| \leq B t^{M+\epsilon} q^{-N}(x)$.

Здесь B не зависит от M (но может зависеть от N).

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 2 введем величины

$$J_k = \int_{D_k} \exp \left(-c \left((t-s)q(x) + \frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-s)^\beta} \right) \right) (t-s)^{-\theta} |q(x) - q(\xi)| \frac{s^M}{q^N(\xi)} d\xi ds,$$

$k = 1, 2$. Достаточно проверить, что

$$J_k \leq at^{M+\epsilon} q^{-N}(x), \quad (20)$$

где a не зависит от M . При оценке интеграла J_1 заменим $|q(x) - q(\xi)|$ на $|x-\xi|q^\delta(x)$ (пользуясь неравенством (i)), $q^N(\xi)$ на $L^{-N}q^N(x)$ (используя условие (ii)) и, наконец, заменяем интегрирование по области $|x-\xi| \leq 1$ на интегрирование по $\mathbb{R}^n$. После этих замен интеграл по ξ вычисляется явно (заменой $x-\xi = (t-s)^{\beta/\alpha}v$), откуда следует, что

$$J_1 \leq q^{\delta-N}(x) \int_0^t \exp(-c((t-s)q(x))) (t-s)^{1/(2m)} s^M ds.$$

Заменим $q^\delta(x) \exp(-(t-s)q(x))$ большей величиной $b_4(t-s)^{-\delta}$ и проинтегрируем по s . Это дает $J_1 \leq b_5 t^{M+\epsilon} q^{-N}(x)$, что и требовалось.

Оценим J_2 . Для этого заменим величину $|q(x) - q(\xi)|$ большей величиной $q^\mu(x) \exp(L|x-\xi|^\alpha)$ (использовали условие (iii)), отбросим множители $(t-s)^{-\theta}$, $\exp(L|x-\xi|^\alpha)$ (ибо они «подавляются» множителем $\exp(-c|x-\xi|^\alpha/(t-s)^\beta)$ в силу условия $|x-\xi| \geq 1$), а также отбросим $q^N(\xi)$. Наконец, используем неравенство (19). В итоге получаем, что $J_2 \leq \exp(-c(q^{\beta/(\beta+1)}(x) + 1/t^\beta)) t^M$. Теперь ясно, что условие (20) выполнено также для J_2 . Лемма 3 доказана.

Теперь докажем теорему 5. С этой целью рассмотрим члены ряда $f_0 + f_1 + \dots$, $f_k = K_0^k f_0$, дающего формальное решение интегрального уравнения (11). В дальнейшем C_k и пр. — это некоторые постоянные.

Согласно лемме 2, функцию f_k можно представить в виде $f_k = f_{k1} + f_{k2}$, где $f_{k1} \in F_{-\theta+k\epsilon}$, т.е. $|f_{k1}| \leq C_k t^{-\theta+k\epsilon} \exp(-a_k(tq(x) + |x-y|^\alpha t^{-\beta}))$ с некоторыми положительными C_k , a_k , и $|f_{k2}| \leq R t^M q^{-N}(x)$, где M произвольно, а R зависит от M . Зафиксируем число M_0 и возьмем такой номер k_0 , что $-\theta + k_0\epsilon > 2M_0$. Тогда $|f_{k_0 1}| \leq D t^{2M_0} \exp(-c(tq(x) + b|x-y|^\alpha t^{-\beta})) \leq D t^{2M_0} \exp(-ctq(x)) \leq D t^{M_0} q^{-M_0}(x)$. Применяя к $f_{k_0 1}$ лемму 3, получаем, что дальнейшие члены ряда удовлетворяют неравенствам $|f_{k_0+j}| \leq D_1 B^j t^{M_0+j\epsilon} q^{-M_0}(x)$. Таким образом, ряд $f_{k_0} + f_{k_0+1} + \dots$ мажорируется рядом, сходящимся при $t < B^{1/\epsilon}$, и его сумма не превосходит величины $D_1 t^{M_0} q^{-M_0}(x)$. С другой стороны, $|f_{01} + \dots + f_{k_0}| \leq D t^{-\theta+\epsilon} \exp(-a'(tq(x) + |x-y|^\alpha t^{-\beta}))$. Это приводит к утверждению теоремы 5.

§6. Заключительные замечания

1. Приведем пример к теореме 2 с целью показать, что для данной функции b величина предела, указанного в условии (3), зависит от выбора функции q . Пусть $n=2$, $k=0$ и b есть индикатор множества $x_2 \geq |x_1|$. Взяв число $h \in (0, 1)$, рассмотрим потенциал $q(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2/h\}$. Тогда предел в (3) равен $h/4$ и, таким образом, зависит от выбора потенциала.

2. Рассмотрим факторпространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)/L_\infty^0(\mathbb{R}^n)$ и l_∞/l_∞^0 , где через $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и l_∞^0 обозначены подпространства функций (соответственно последовательностей), сосредоточенных на компакте (соответственно на конечном подмножестве). Отображение $b \mapsto \{\Delta_k\}$, рассмотренное выше, приводит к отображению $L_\infty(\mathbb{R}^n)/L_\infty^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow l_\infty/l_\infty^0$. Линейно ли оно? (Мы отчасти изучили это отображение лишь на подпространстве элементов указанного факторпространства, имеющих риссовское среднее некоторого порядка.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Г. Костюченко, *Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов*, в кн.: Четвертая математическая школа, Киев, 1968, 42–117.
- [2] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, *Следы операторов*, УМН, **61**:5(371) (2006), 89–356.
- [3] В. Е. Подольский, *О следах возмущенной операторной полугруппы*, Матем. заметки, **75**:3 (2004), 462–466.
- [4] С. В. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, М., 1964.
- [5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамопряженных операторов*, Наука, М., 1965.
- [6] D. Borwein, *Tauberian theory, a century of developments*, by Jacob Korevaar, Bull. Amer. Math. Soc., **42**:3, 401–406.

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ismagil@ci.net.ru

Поступило в редакцию
17 мая 2009 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: akostyuch@mail.ru