Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Алгебра формальных векторных полей на прямой и гипотеза Бухштабера, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 4, 26–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2967>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:28:45

Алгебра формальных векторных полей на прямой и гипотеза Бухштабера*

© 2009. Д. В. Миллионщиков

Рассматривается алгебра Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуль вместе с первой производной в начале координат. В. М. Бухштабер и А. В. Шокуров показали, что универсальная обертывающая алгебра $U(L_1)$ изоморфна алгебре Ландвебера–Новикова S , тензорно умноженной на вещественные числа. Когомологии $H^*(L_1, \mathbb{R}) = H^*(U(L_1))$ были первоначально вычислены Л. В. Гончаровой. Из ее вычислений следует, что умножение в когомологиях $H^*(L_1, \mathbb{R})$ тривиально. Бухштабер высказал гипотезу, что когомологии $H^*(L_1)$ порождаются одномерными коциклами с помощью нетривиальных произведений Масси. Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс и В. С. Ретах нашли выражение аддитивных образующих $H^*(L_1)$ в требуемом виде, но указанные ими произведения Масси, как выяснилось позднее, содержат нулевой элемент. В настоящей статье мы доказываем, что $H^*(L_1)$ рекуррентно порождается с помощью нетривиальных произведений Масси двумя одномерными коциклами из $H^1(L_1)$.

Предисловие

В конце 70-х годов Бухштабер и Шокуров [7] открыли, что алгебра Ландвебера–Новикова S , возникающая в теории комплексных кобордизмов, тензорно умноженная на поле вещественных чисел, $S \otimes \mathbb{R}$, изоморфна универсальной обертывающей алгебре $U(L_1)$ алгебры Ли L_1 формальных векторных полей на вещественной прямой $\mathbb{R}$, обращающихся в нуль в начале координат вместе с первой производной. Еще раньше, в 1970 г., Бухштабер [6] построил триградуированную спектральную последовательность для вычисления члена E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова. Ключевую роль в его конструкции играли целочисленные когомологии алгебры S . В том же 1970 г. Гельфанд поставил проблему вычисления когомологий нильпотентных подалгебр L_k алгебры L_1 [8]. Отметим, что при $k = 1$ эта задача, успешно решенная Гончаровой [9] тремя годами позднее, в работе [7] формулируется как вычисление рациональных когомологий $H^*(S, \mathbb{Q})$ алгебры Ландвебера–Новикова. С другой стороны, результат [7] приводит к целочисленному аналогу данной задачи, как это было отмечено в [14]. Нетрудно видеть, что $H^1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Группа же $H^2(S, \mathbb{Z})$, вычисленная в [7], имеет большую конечную подгруппу. Вопрос о полном вычислении когомологий $H^*(S, \mathbb{Z})$ является по-прежнему открытым.

Из теоремы Гончаровой [9] вытекает, что в алгебре когомологий $H^*(L_1)$ умножение тривиально. Бухштабер высказал гипотезу, что когомологии $H^*(L_1)$ порождаются одномерными когомологиями $H^1(L_1)$ с помощью нетривиальных произведений Масси. Фейгин, Фукс и Ретах [13] представили базисные коциклы из $H^*(L_1)$ в виде произведений Масси. Но все произведения, рассмотренные

*Частично поддержано грантами РФФИ 08-01-00541, 08-01-91855 и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ №2185.2008.1.

ими, являются тривиальными, т. е. содержат 0. Позднее Артельных [1] нашел выражения с помощью нетривиальных произведений Масси для части базисных коциклов из $H^*(L_1)$, но его короткая заметка не содержит полных доказательств.

В настоящей работе мы доказываем гипотезу Бухштабера в ее первоначальной формулировке. Основным результатом является теорема 3.1, утверждающая, что алгебра когомологий $H^*(L_1)$ порождается при помощи *нетривиальных* произведений Масси двумя базисными коциклами из $H^1(L_1)$. В ее доказательстве существенную роль играет техника, развитая Фейгиным, Фуксом и Ретахом в [13], а также формула Бенуа–Сент-Обана [5] для особых векторов модулей Верма над алгеброй Вирасоро.

Автор искренне благодарен Л. А. Алания, И. К. Бабенко и В. М. Бухштаберу за внимание к работе и многочисленные ценные замечания.

§1. Когомологии положительной части алгебры Витта

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — ее линейное представление (V является $\mathfrak{g}$ -модулем). В дальнейшем обозначим через $C^q(\mathfrak{g}, V)$ пространство q -линейных (непрерывных) кососимметрических отображений из $\mathfrak{g}$ в V . Можно определить алгебраический комплекс $(C^*(\mathfrak{g}, V), d)$:

$$V \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{q-1}} C^q(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{d_q} \dots,$$

где дифференциал d_q определен следующим образом:

$$\begin{aligned} (d_q f)(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i)(f(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{q+1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Когомологии этого комплекса называются когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в представлении $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. В частности, когомологии комплекса $(C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{K}), d)$ с коэффициентами в тривиальном представлении $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K})$ называются когомологиями с тривиальными коэффициентами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и обозначаются через $H^*(\mathfrak{g})$.

Алгебра Витта W есть линейная оболочка следующей системы дифференциальных операторов (векторных полей) на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ с фиксированной координатой x :

$$e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad [e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Алгебру Ли формальных рядов $\sum_{i \geq 1}^{\infty} a_i e_i$ с коммутатором $[\cdot, \cdot]$, определенным на базисных векторах e_i по формуле (2), следуя [9], [14], будем обозначать через L_1 и называть алгеброй формальных векторных полей на прямой $\mathbb{R}^1$, обращающихся в нуль в начале координат вместе с первой производной.

Возьмем двойственный базис $e^1, \dots, e^n, \dots$ в L_1^* . Рассмотрим вторую градуировку комплекса $C^*(L_1, \mathbb{K})$:

$$C^*(L_1, \mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda=1}^{\infty} C_{\lambda}^*(L_1, \mathbb{K}),$$

где подпространство $C_\lambda^q(L_1, \mathbb{K})$ порождено q -формами $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}, i_1 + \dots + i_q = \lambda\}$. Элементы подпространства $C_\lambda^q(L_1, \mathbb{K})$ будут называться элементами веса λ . Например, моном $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}$ имеет степень q и вес $\lambda = i_1 + \dots + i_q$.

Эта градуировка совместима с внешним умножением форм. Последнее индуцирует структуру биградуированной алгебры в когомологиях $H^*(L_1, \mathbb{R})$:

$$H_k^q(L_1, \mathbb{R}) \otimes H_l^p(L_1, \mathbb{R}) \rightarrow H_{k+l}^{q+p}(L_1, \mathbb{R}).$$

Теорема 1.1 [9]. *Пространство q -мерных когомологий $H^q(L_1, \mathbb{R})$ двумерно для любого $q \geq 1$, более того, оно является прямой суммой двух своих одномерных однородных подпространств:*

$$H^q(L_1, \mathbb{R}) = H_{(3q-q)/2}^q(L_1, \mathbb{R}) \oplus H_{(3q+q)/2}^q(L_1, \mathbb{R}).$$

В дальнейшем мы будем обозначать через $g_\pm^q$ образующие подпространств $H_{(3q \pm q)/2}^q(L_1, \mathbb{R})$ соответственно. Числа $e_\pm(q) = \frac{1}{2}(3q^2 \pm q)$ называются пентагональными числами Эйлера. Легко проверить, что сумма двух чисел Эйлера $e_\pm(q) + e_\pm(l)$ не равняется $e_\pm(q+l)$ ни для каких q и l . Следовательно, в алгебре когомологий $H^*(L_1, \mathbb{R})$ умножение тривиально.

Пример 1.2. $H^1(L_1, \mathbb{R})$ линейно порождается элементами $g_-^1 = [e^1]$ и $g_+^1 = [e^2]$, а базис пространства $H^2(L_1, \mathbb{R})$ состоит из двух классов $g_-^2 = [e^1 \wedge e^4]$ и $g_+^2 = [e^2 \wedge e^5 - 3e^3 \wedge e^4]$ весов 5 и 7 соответственно. Это сразу видно из формулы для дифференциала $d: C^1(L_1, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(L_1, \mathbb{R})$, который является двойственным отображением к скобке Ли $[\ , \]$ алгебры L_1 :

$$de^1 = de^2 = 0, \quad de^n = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n-2i)e^i \wedge e^{n-i}, \quad n \geq 3.$$

Здесь и далее $[a]$ будет обозначать класс когомологий коцикла a (не путать с целой частью $[x]$ вещественного числа x); там, где это не будет вызывать путаницы, для упрощения записи произведений Масси мы будем опускать квадратные скобки у одномерных классов когомологий, например, e^1 будет иногда обозначать и коцикл, и соответствующий класс когомологии.

Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированный L_1 -модуль с одномерными или тривиальными однородными компонентами V_i , заданный при помощи базиса $f_i: V_i = \langle f_i \rangle$. Комплекс $(C^*(L_1, V), d)$ имеет вторую градуировку p , которую мы также будем называть весом. Вес монома $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} \otimes f_k \in C^q(L_1, V)$ определен по правилу

$$p(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} \otimes f_k) = k - i_1 - \dots - i_q.$$

Эта градуировка совместима с дифференциалом d , и когомологии $H^*(L_1, \mathbb{R}) = \bigoplus_s H_s^*(L_1, \mathbb{R})$ также биградуированы.

Алгебра Вирасоро Vir является бесконечномерной алгеброй Ли, заданной своим базисом $\{z, e_i, i \in \mathbb{Z}\}$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i, z] = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j} + \frac{j^3-j}{12} \delta_{-i,j} z.$$

Vir является одномерным центральным расширением алгебры Витта W (одномерный центр порождается элементом z).

Замечание. В работах [10], [12], [13] символом L_1 обозначается «положительная» часть W_+ алгебры Витта W (алгебры Вирасоро Vir), т. е. алгебра *полиномиальных* векторных полей на прямой $\mathbb{R}$, обращающихся в нуль в начале координат вместе с первой своей производной. В дальнейшем мы будем использовать символ L_1 для обозначения обеих этих алгебр. Это не вызовет путаницы, так как когомологии $H^*(L_1)$ и $H^*(W_+)$ изоморфны ([9], [14]).

§2. Произведения Масси и теорема Ретаха–Фейгина–Фукса

В этом параграфе мы следуем работе Бабенко и Тайманова [2], в которой был предложен подход с использованием так называемых формальных связностей для определения высших произведений Масси [18]. Пусть $\mathcal{A} = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{A}^l$ — дифференциальная градуированная алгебра над полем $\mathbb{K}$. Это означает, что заданы следующие операции: ассоциативное произведение с единицей 1

$$\wedge: \mathcal{A}^l \otimes \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}^{l+m}, \quad l, m \geq 0, \quad l, n \in \mathbb{Z},$$

такое, что $a \wedge b = (-1)^{lm} b \wedge a$ для $a \in \mathcal{A}^l$, $b \in \mathcal{A}^m$, и дифференциал

$$d: \mathcal{A}^l \rightarrow \mathcal{A}^{l+1}, \quad l \geq 0,$$

удовлетворяющий правилу Лейбница $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^l a \wedge db$ ($a \in \mathcal{A}^l$) и условию $d^2 = 0$.

Пример 2.1. $\mathcal{A} = C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ — коцепной комплекс произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для данной дифференциальной градуированной алгебры $(\mathcal{A}, d)$ мы обозначим через $LT_n(\mathcal{A})$ пространство всех нижнетреугольных $(n+1) \times (n+1)$ -матриц с матричными элементами из $\mathcal{A}$ и нулевой главной диагональю. Оно обладает структурой дифференциальной алгебры относительно обычного матричного умножения (матричные элементы перемножаются как элементы алгебры $\mathcal{A}$). Дифференциал d в $LT_n(\mathcal{A})$ определен формулой

$$dA = (da_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}. \quad (3)$$

Инволюция $a \rightarrow \bar{a} = (-1)^{k+1}a$, $a \in \mathcal{A}^k$, в алгебре $\mathcal{A}$ может быть продолжена до инволюции алгебры матриц $LT_n(\mathcal{A})$ следующим образом: $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$. Она обладает такими свойствами:

$$\overline{\bar{A}} = A, \quad \overline{AB} = -\bar{A}\bar{B}, \quad \overline{dA} = -d\bar{A}.$$

Для дифференциала (3) также справедливо обобщенное правило Лейбница

$$d(AB) = (dA)B - \bar{A}(dB).$$

В центре алгебры $LT_n(\mathcal{A})$ рассмотрим подпространство $I_n(\mathcal{A})$, состоящее из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathcal{A}.$$

Определение 2.2 [2]. Матрица $A \in LT_n(\mathcal{A})$ называется *матрицей формальной связности*, если она удовлетворяет обобщенному уравнению Маурера–Картана

$$\mu(A) = dA - \bar{A} \cdot A \in I_n(\mathcal{A}). \quad (4)$$

Предложение 2.3 [2]. Пусть A — матрица формальной связности. Тогда элемент τ матрицы $\mu(A) \in I_n(\mathcal{A})$ является замкнутым: $d\tau = 0$.

Определение 2.4. Коцикл $c(A) = -\tau + da_{n+1,1}$ называется ассоциированным коциклом матрицы формальной связности A .

Определение 2.5. n -местное произведение $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ определено, если существует по крайней мере одна матрица формальной связности A с элементами $a_n, \dots, a_1$ на второй диагонали. Если произведение определено, то $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ состоит из всех когомологических классов $\alpha \in H^*(\mathcal{A})$, для которых существует матрица формальной связности A , такая, что $c(A)$ представляет α .

Теорема 2.6 ([17], [2]). Значение произведения $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ зависит только от классов когомологий элементов $a_1, \dots, a_n$.

Определение 2.7 [17]. n -местное произведение Масси $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ классов когомологий $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ определено, если определено произведение $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ их представителей. В этом случае $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle := \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ как подмножества в $H^*(\mathcal{A})$.

Пример 2.8 (тройные произведения Масси). Пусть α, β и γ — классы когомологий замкнутых элементов $a \in \mathcal{A}^p$, $b \in \mathcal{A}^q$ и $c \in \mathcal{A}^r$. Уравнение Маурера–Картана для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ g & b & 0 & 0 \\ h & f & a & 0 \end{pmatrix}$$

эквивалентно двум следующим уравнениям:

$$df = (-1)^{p+1}a \wedge b, \quad dg = (-1)^{q+1}b \wedge c. \quad (5)$$

Следовательно, тройное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ определено тогда и только тогда, когда

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \gamma = 0$$

в когомологиях $H^*(\mathcal{A})$. Если эти условия выполнены, то произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ определено как подмножество в $H^{p+q+r-1}(\mathcal{A})$ следующего вида:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = \{[(-1)^{p+1}a \wedge g + (-1)^{p+q}f \wedge c]\}.$$

Матричные элементы f и g определяются формулами (5) с точностью до замкнутых элементов из $\mathcal{A}^{p+q-1}$ и $\mathcal{A}^{q+r-1}$ соответственно. Значит, значение тройного произведения Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ представляет собой аффинное подпространство в $H^{p+q+r-1}(\mathcal{A})$, параллельное подпространству $\alpha \cdot H^{q+r-1}(\mathcal{A}) + H^{p+q-1}(\mathcal{A}) \cdot \gamma$.

Определение 2.9. Пусть n -местное произведение Масси $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ определено. Оно называется *тривиальным*, если содержит нулевой класс когомологий: $0 \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Предложение 2.10 ([2], [17]). Пусть произведение Масси $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ определено. Тогда все произведения $\langle \alpha_l, \dots, \alpha_q \rangle$, $1 \leq l < q \leq n$, $q - l < n - 1$, определены и являются тривиальными.

Обозначим через $GLT_n(\mathbb{K})$ группу невырожденных нижнетреугольных $(n+1) \times (n+1)$ -матриц.

Предложение 2.11. Пусть $A \in LT_n(\mathcal{A})$ — матрица формальной связности и C — произвольная матрица из $GLT_n(\mathbb{K})$. Тогда матрица $C^{-1}AC \in LT_n(\mathcal{A})$ удовлетворяет уравнению Маурера–Картана, т.е. она так же, как и A , является матрицей формальной связности.

Доказательство. $d(C^{-1}AC) - \bar{C}^{-1}\bar{A}\bar{C} \wedge C^{-1}AC = C^{-1}(dA - \bar{A} \wedge A)C \in I_n(\mathcal{A})$. $\square$

Определение 2.12. Две матрицы A и A' формальных связностей из $LT_n(\mathcal{A})$ эквивалентны, если существует матрица $C \in GL(n+1, \mathbb{K})$, такая, что $A' = C^{-1}AC$.

Предложение 2.13. Пусть произведение Масси $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ определено и $x_1, \dots, x_n$ — набор из n ненулевых констант. Тогда определено произведение Масси $\langle x_1\alpha_1, \dots, x_n\alpha_n \rangle$; более того, справедливо следующее соотношение:

$$\langle x_1\alpha_1, \dots, x_n\alpha_n \rangle = x_1 \cdots x_n \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим диагональную матрицу C , где по главной диагонали стоят сверху вниз последовательные произведения $x_1 \cdots x_n, \dots, x_1x_2, x_1, 1$. Взаимно однозначное отображение $A \rightarrow C^{-1}AC$ переводит произвольную матрицу формальной связности для произведения $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ в некоторую матрицу связности, соответствующую уже произведению $\langle x_1\alpha_1, \dots, x_n\alpha_n \rangle$. Очевидно, что $\tau(C^{-1}AC) = x_1 \cdots x_n \cdot \tau(A)$. $\square$

Пусть $LT_n(\mathbb{K})$ — алгебра Ли строго нижнетреугольных $(n+1) \times (n+1)$ -матриц над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, а $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли.

Предложение 2.14. Матрица A с элементами из $\mathfrak{g}^*$ определяет представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow LT_n(\mathbb{K})$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет сильному уравнению Маурера–Картана $dA - \bar{A} \wedge A = 0$.

Доказательство. Имеем $(dA - \bar{A} \wedge A)(x, y) = A([x, y]) - [A(x), A(y)]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$. $\square$

Рассмотрим произведение Масси вида

$$\langle \omega_1, \dots, \omega_n, \Omega \rangle, \quad \omega_i \in H^1(\mathfrak{g}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \Omega \in H^p(\mathfrak{g}).$$

Если оно определено, то n -местное произведение $\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle$ тривиально. Это означает, что коцикл $\tau(A)$ для некоторой матрицы формальной связности A является кограницей, и, значит, мы можем изменить элемент $a_{n+1, n}$ этой матрицы формальной связности так, что она будет удовлетворять сильному уравнению Маурера–Картана. Таким образом, существует гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow LT_n(\mathbb{K})$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что имеется $(n+1)$ -мерный $\mathfrak{g}$ -модуль V с базисом $f_1, \dots, f_{n+1}$, таким, что

$$\mathfrak{g}f_j \in \langle f_{j+1}, \dots, f_{n+1} \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \quad \mathfrak{g}f_{n+1} = 0. \quad (6)$$

Можно определить убывающую фильтрацию $\mathcal{F}$ комплекса $(C^*(\mathfrak{g}, V), d)$:

$$\mathcal{F}^0 C^*(\mathfrak{g}, V) \supset \dots \supset \mathcal{F}^q C^*(\mathfrak{g}, V) \supset \mathcal{F}^{q+1} C^*(\mathfrak{g}, V) \supset \dots, \quad (7)$$

где подпространство $\mathcal{F}^q C^{p+q}(\mathfrak{g}, V)$ определено как линейное подпространство $(p+q)$ -форм c в $C^{p+q}(\mathfrak{g}, V)$, таких, что $\text{Im } c \subset \langle f_q, \dots, f_{n+1} \rangle$. Фильтрация $\mathcal{F}$ совместима с d . Рассмотрим соответствующую спектральную последовательность $E_r^{p,q}$ (сходящуюся к когомологиям $H^*(\mathfrak{g}, V)$), для которой стандартным образом (см., например, [14]) доказывается следующее

Предложение 2.15. $E_1^{p,q} = \langle f_q \rangle \otimes H^{p+q}(\mathfrak{g})$.

В дальнейшем мы будем называть эту спектральную последовательность $E_r^{p,q}$ спектральной последовательностью (*).

Лемма 2.16. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и определено $(n+1)$ -местное произведение Масси

$$\langle \omega_1, \dots, \omega_n, \Omega \rangle, \quad \omega_i \in H^1(\mathfrak{g}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \Omega \in H^p(\mathfrak{g}).$$

Тогда существует $(n+1)$ -мерный $\mathfrak{g}$ -модуль V с выделенным базисом $f_1, \dots, f_{n+1}$, удовлетворяющим условию (6), и спектральная последовательность (*), отвечающая фильтрации (7) и сходящаяся к когомологиям $H^*(\mathfrak{g}, V)$, такая, что выполняются следующие условия:

$$f_1 \otimes \Omega \in E_1^{p-1,1}, \quad d_1(f_1 \otimes \Omega) = \dots = d_{n-1}(f_1 \otimes \Omega) = 0, \quad d_n(f_1 \otimes \Omega) = f_{n+1} \otimes [c(A)], \quad (8)$$

где $d_i: E_i^{p,q} \rightarrow E_i^{p-i+1,q+i}$ есть i -й дифференциал спектральной последовательности $E_r^{p,q}$ и $c(A)$ является ассоциированным коциклом матрицы формальной связности произведения $\langle \omega_1, \dots, \omega_n, \Omega \rangle$.

Доказательство. Обозначим элементы матрицы A следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_1 & \omega_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_2 & a(n-1, n) & \omega_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{n-1} & a(2, n) & a(2, n-1) & \dots & \omega_2 & 0 & 0 \\ \Omega_n & a(1, n) & a(1, n-1) & \dots & a(1, 2) & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для удобства вычислений нумерация элементов матрицы формальной связности A , которой пользовались перед этим, изменена. Уравнение Маурера–Картана дает нам следующую систему соотношений на элементы Ω_i , стоящие в первом столбце матрицы A :

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= \omega_n \wedge \Omega, \quad d\Omega_2 = \omega_{n-1} \wedge \Omega_1 + a(n-1, n) \wedge \Omega, \quad \dots, \\ d\Omega_{n-1} &= \omega_2 \wedge \Omega_{n-1} + \dots + a(2, n-2) \wedge \Omega_2 + a(2, n-1) \wedge \Omega_1 + a(2, n) \wedge \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Мы напоминаем, что Ω_n может быть произвольной формой. При этом

$$c(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a(1, n-i) \wedge \Omega_i, \quad \Omega_0 = \Omega, \quad a(1, 1) = \omega_1.$$

С другой стороны, в коцепном комплексе $(C^*(\mathfrak{g}, V), \mathbf{d})$ подпространство $C^0(\mathfrak{g}, V)$ совпадает с самим модулем V и значение $\mathbf{d}f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) = C^1(\mathfrak{g}, V)$ для произвольного $f \in V$ определяется формулой $\mathbf{d}f(X) = [X, f]$, $X \in \mathfrak{g}$. Формула (1) для $v \in V$ и $\Omega \in \Lambda^*(\mathfrak{g})$ может быть переписана следующим образом:

$$\mathbf{d}(v \otimes \Omega) = \mathbf{d}v \wedge \Omega - v \otimes d\Omega, \quad (10)$$

где d обозначает дифференциал комплекса $C^*(\mathfrak{g})$ с тривиальными коэффициентами. Следовательно, $\mathbf{d}f_{n+1} = 0$ и

$$\mathbf{d}f_i = f_{i+1} \otimes \omega_{n-i+1} + f_{i+2} \otimes a(n-i, n-i+1) + \dots + f_{n+1} \otimes a(1, n-i+1), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда вытекает, что $\mathbf{d}(f_1 \otimes \Omega) = f_2 \otimes \omega_n \wedge \Omega + \dots$, где многоточие стоит вместо членов более высокой фильтрации. Окончательно получаем искомую формулу:

$$\mathbf{d}\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes \Omega_{i-1}\right) = f_{n+1} \otimes \left(\sum_{i=0}^{n-1} a(1, n-i) \wedge \Omega_i\right) = f_{n+1} \otimes c(A). \quad \square \quad (11)$$

Верно и утверждение, обратное к предыдущей лемме.

Лемма 2.17. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и существует $(n+1)$ -мерный $\mathfrak{g}$ -модуль V с выделенным базисом $f_1, \dots, f_{n+1}$, удовлетворяющим условию (6). Предположим при этом, что дифференциалы $d_1, \dots, d_{n-1}$ спектральной последовательности $(*)$ обращаются в нуль на элементе $f_1 \otimes \Omega$. Тогда существуют такие классы $\omega_1, \dots, \omega_n$ одномерных когомологий из $H^1(\mathfrak{g})$, что определено $(n+1)$ -местное произведение Масси $\langle \omega_1, \dots, \omega_n, \Omega \rangle$, причем $f_{n+1} \otimes [c(A)] = d_n(f_1 \otimes \Omega)$.

Доказательство полностью повторяет, только в обратном направлении, доказательство леммы 2.16. $\square$

Теорема 2.18 [13]. Пусть $g_{\pm}^k$ — нетривиальный коцикл в $H_{(3k^2 \pm k)/2}^k(L_1)$. Для любого $k \geq 2$ имеют место следующие включения:

$$g_-^k \in \underbrace{\langle e^1, \dots, e^1 \rangle}_{2k-1}, g_+^{k-1}, \quad g_+^k \in \underbrace{\langle e^1, \dots, e^1 \rangle}_{3k-1}, g_+^{k-1}.$$

Замечание. Используя результаты самой работы [13], несложно установить, что все произведения Масси из теоремы 2.18 являются тривиальными.

Следующая попытка приблизиться к доказательству гипотезы Бухштабера была предпринята в 2000 г.: И. В. Артельных анонсировал следующую теорему.

Теорема 2.19 [1]. Имеются нетривиальные произведения Масси

$$g_-^k \in \underbrace{\langle e^2, \dots, e^2 \rangle}_{k-1}, g_+^{k-1}, e^1, \quad k \geq 2, \quad g_+^{2l+1} \in \underbrace{\langle e^2, \dots, e^2 \rangle}_{3l+1}, g_+^{2l}, \quad l \geq 1.$$

Видно, что Артельных не удалось найти нетривиальные произведения Масси для четномерных классов $g_{\pm}^{2l}$. Кроме того, его работа [1] — краткая заметка, не содержащая полных доказательств, которые, к сожалению, не были опубликованы в дальнейшем.

§3. Основная теорема

Теорема 3.1. Когомологии $H^*(L_1)$ рекуррентно порождаются двумя базисными элементами e^1, e^2 одномерных когомологий $H^1(L_1)$ с помощью двух серий нетривиальных произведений Масси. Более точно:

1) Тройное произведение Масси $\langle e^1, e^2, e^2 \rangle$ однозначно определено и определяет нетривиальный класс когомологий $g_-^2 = \langle e^1, e^2, e^2 \rangle \in H_5^2(L_1)$.

2) Пятиместное произведение $\langle e^1, e^2, e^1, e^1, e^2 \rangle$ является нетривиальным и представляет собой аффинную прямую $\{g_+^2 + tg_-^2, t \in \mathbb{K}\}$ на двумерной плоскости $H^2(L_1)$, где g_+^2 обозначает некоторый нетривиальный элемент из $H_7^2(L_1)$. Возьмем произвольный элемент $\tilde{g}_+^2 \in \langle e^1, e^2, e^1, e^1, e^2 \rangle$ в качестве второго базисного вектора в $H^2(L_1)$.

3) Предположим, что уже построен некоторый базис $g_-^k, \tilde{g}_+^k$ пространства $H^k(L_1)$, $k \geq 2$, такой, что класс когомологий g_-^k порождает одномерное подпространство $H_{(3k^2-k)/2}^k(L_1)$. Тогда $(2k+1)$ -местное произведение Масси

$$\langle \underbrace{e^1, \dots, e^1}_m, e^2, \underbrace{e^1, \dots, e^1}_n, \tilde{g}_+^k \rangle,$$

где m, n — произвольные натуральные числа, такие, что $m+n=2k-1$, однозначно определено и дает образующую g_-^{k+1} одномерного подпространства $H_{(3(k+1)^2-(k+1))/2}^{k+1}(L_1)$.

$(3k+2)$ -местное произведение Масси

$$\langle \underbrace{e^1, \dots, e^1}_k, e^2, \underbrace{e^1, \dots, e^1}_{2k}, \tilde{g}_+^k \rangle$$

является нетривиальным и представляет собой аффинную прямую на двумерной плоскости $H^{k+1}(L_1)$, параллельную одномерному подпространству $H_{(3(k+1)^2-(k+1))/2}^{k+1}(L_1)$. Возьмем в $\langle \underbrace{e^1, \dots, e^1}_k, e^2, \underbrace{e^1, \dots, e^1}_{2k}, \tilde{g}_+^k \rangle$ произвольный элемент $\tilde{g}_+^{k+1}$; тогда g_-^{k+1} и $\tilde{g}_+^{k+1}$ образуют базис в $H^{k+1}(L_1)$.

Доказательство. 1) Для любой матрицы формальной связности A' , соответствующей тройному произведению Масси $\langle e^1, e^2, e^2 \rangle$, которое определено, см. пример 2.8, ассоциированный коцикл $c(A')$ будет равен $-e^2 \wedge e^3 + \alpha de^3$, где α — некоторая константа, зависящая от матрицы A' . Таким образом, $\langle e^1, e^2, e^2 \rangle = -[e^2 \wedge e^3] \neq 0$ в $H_5^2(L_1)$ и, значит, $\langle e^1, e^2, e^2 \rangle$ однозначно определено.

2) Рассмотрим следующую матрицу формальной связности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2e^3 & -2e^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e^4 - te^2 & -e^2 & -e^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^3 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^5 & e^4 & e^3 & e^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она отвечает произведению $\langle e^1, e^2, -e^1, -2e^1, -e^2 \rangle = -2\langle e^1, e^2, e^1, e^1, e^2 \rangle$, а ее ассоциированный коцикл $c(A)$ равен

$$c(A) = (e^2 \wedge e^5 - 3e^3 \wedge e^4) + te^2 \wedge e^3 \in g_+^2 + tg_-^2, \quad (12)$$

где значение параметра t может быть произвольным. С другой стороны, для произвольной матрицы формальной связности A' , отвечающей тому же самому произведению Масси, ассоциированный коцикл $c(A')$ будет всегда иметь вид $c(A') = (e^2 \wedge e^5 - 3e^3 \wedge e^4) + \dots$, где вместо слагаемых с весом меньше семи мы поставили многоточие. Эти слагаемые как раз и отвечают за неоднозначность произведения $\langle e^1, e^2, e^1, e^1, e^2 \rangle$, которая может быть лишь вида tg_-^2 и уже включена в формулу (12).

Индуктивный переход. Предположим, что мы уже построили некоторый базис $g_-^k, \tilde{g}_+^k$ пространства $H^k(L_1)$, $k \geq 2$, такой, что класс когомологий g_-^k порождает

дает одномерное подпространство $H_{(3k^2-k)/2}^k(L_1)$. Покажем сначала, что произведение Масси $\underbrace{\langle e^1, \dots, e^1 \rangle}_m, \underbrace{\langle e^2, e^1, \dots, e^1 \rangle}_n$ определено и тривиально. Построение

для него матрицы формальной связности A равносильно нахождению L_1 -модуля $V^{m,n}$ с выделенным базисом $f_{-m-1}, \dots, f_{-1}, f_1, \dots, f_n$ (f_0 отсутствует), в котором матрицы всех операторов e_i имеют строго нижнетреугольный вид, причем для $-m-1 \leq j \leq n-1$, $j \neq -1, 0$, и $-m-1 \leq i \leq n-2$, $i \neq 0$,

$$e_1 f_j = f_{j+1} + \alpha_j^{j+2} f_{j+2} + \dots + \alpha_j^n f_n, \quad e_2 f_i = b_i f_{i+2} + \beta_i^{i+3} f_{i+3} + \dots + \beta_i^n f_n, \quad (13)$$

а также $b_{-1} = 1$ и $e_1 f_{-1} = \alpha_{-1}^2 f_2 + \dots + \alpha_{-1}^n f_n$. Удобно рассмотреть прямую сумму $\tilde{V}^{m,n} = V^{m,n} \oplus \langle f_0 \rangle$ модуля $V^{m,n}$ и одномерного тривиального модуля $\langle f_0 \rangle$. Теперь флаг подпространств $\tilde{V}_i^{m,n} = \langle f_i, \dots, f_n \rangle$, $i = -m-1, \dots, n$, определяет убывающую фильтрацию модуля $\tilde{V}^{m,n}$: $e_i \tilde{V}_j^{m,n} \subset \tilde{V}_{i+j}^{m,n}$, и относительно нее можно рассмотреть ассоциированный градуированный модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}$ (для базиса которого сохраним старые обозначения), причем градуированный L_1 -модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}$ по-прежнему будет содержать $\langle f_0 \rangle$ в качестве прямого слагаемого (как L_1 -модуля):

$$\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n} = V_{\text{gr}}^{m,n} \oplus \langle f_0 \rangle, \quad \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n} = \bigoplus_{i=-m-1}^n (\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})_i, \quad (\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})_i = \tilde{V}_i^{m,n} / \tilde{V}_{i+1}^{m,n} = \langle f_i \rangle.$$

Модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}$ также задается формулами (13), в которых надо положить $\alpha_j^l = \beta_i^s = b_0 = 0$. Оказывается, что градуированный модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}$ определен однозначно с точностью до изоморфизма. Предъявим его сразу. Для этого определим сначала бесконечномерный градуированный L_1 -модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}$ при помощи базиса $\{f_j, j \in \mathbb{Z}\}$ и соотношений

$$e_i f_j = \begin{cases} j f_{i+j}, & j \geq 0, \\ (i+j) f_{i+j}, & i+j \leq 0, j < 0, \\ f_{i+j}, & i+j > 0, j < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Хотя сам модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}$ бесконечномерный, его конечномерный подфактор

$$\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n} = \left(\bigoplus_{i \geq -m-1} \langle f_i \rangle \right) / \left(\bigoplus_{i \geq n} \langle f_i \rangle \right)$$

как раз и обладает нужными нам свойствами. Докажем теперь его единственность.

Лемма 3.2. Пусть $\tilde{V}^{m,n} = \bigoplus_{i=-m-1}^n V_i^{m,n}$ — градуированный конечномерный L_1 -модуль с одномерными однородными компонентами $\tilde{V}_i^{m,n}$ с $m \geq 2$ и $n \geq 5$, такой, что

$$\begin{aligned} e_1 \tilde{V}_i^{m,n} &= \tilde{V}_{i+1}^{m,n}, \quad i \neq -1, 0, n, & e_1 \tilde{V}_{-1}^{m,n} &= e_1 \tilde{V}_0^{m,n} = e_1 \tilde{V}_n^{m,n} = 0, \\ \tilde{e}_2 V_j^{m,n} &\subset V_{j+2}^{m,n}, \quad j \neq -2, -1, n, n-1, \\ e_2 \tilde{V}_{-1}^{m,n} &= \tilde{V}_1^{m,n}, & e_2 \tilde{V}_{-2}^{m,n} &= e_2 \tilde{V}_{n-1}^{m,n} = e_2 \tilde{V}_n^{m,n} = 0. \end{aligned}$$

Тогда градуированный модуль $\tilde{V}^{m,n}$ изоморфен подфактору $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}$.

Доказательство. Рассмотрим новый базис $\tilde{e}_i$ алгебры L_1 :

$$\tilde{e}_1 = e_1, \quad \tilde{e}_2 = 6e_2, \quad \tilde{e}_i = 6(i-2)!e_i, \quad i \geq 3.$$

Векторы нового базиса связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями:

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_i] = \tilde{e}_{i+1}, \quad i \geq 2. \quad (15)$$

Аналогичным образом выбираем специальный базис $f_{-m-1}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n$ в модуле $V^{m,n}$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 f_i &= f_{i+1}, \quad i \neq -1, 0, n, & \tilde{e}_1 f_{-1} &= \tilde{e}_1 f_0 = \tilde{e}_1 f_n = 0, \\ \tilde{e}_2 f_i &= b_i f_{i+2}, \quad i \neq n, n-1, & b_{-2} &= 0, \quad b_{-1} = b_0 = 1. \end{aligned}$$

Мы смогли нормировать константы $b_{-1} = b_0 = 1$, так как векторы f_1 и f_0 могут быть выбраны произвольно.

Известно, что алгебра L_1 порождается двумя элементами $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ со следующими определяющими соотношениями (тут трудно выделить самую первую ссылку на это почти очевидное утверждение, см., например, [4]):

$$[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_5, \quad [\tilde{e}_2, \tilde{e}_5] = \frac{9}{10} \tilde{e}_7, \quad (16)$$

где элементы $\tilde{e}_3, \tilde{e}_5, \tilde{e}_7$ определены при помощи соотношений (15).

Таким образом, всякий градуированный L_1 -модуль $V^{m,n}$ определяется набором констант $b_{-m-1}, \dots, b_{n-2}$ и следующей системой уравнений (см. также работу [4]):

$$\begin{aligned} R_i^5: & \quad ([\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] - \tilde{e}_5) f_i = 0, & i &= -m-1, \dots, n-5, \\ R_j^7: & \quad ([\tilde{e}_2, \tilde{e}_5] - \frac{9}{10} \tilde{e}_7) f_j = 0, & j &= -m-1, \dots, n-7. \end{aligned}$$

Напомним, что по условию $m \geq 2$ и $n \geq 5$. Легко видеть, что четыре уравнения $R_{-2}^5, R_{-1}^5, R_0^5, R_{-2}^7$ запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} -b_{-1}b_1 - b_{-2}b_0 + 3b_{-1} &= 0, & 2b_{-1}b_2 - b_{-1}b_1 - b_{-1} &= 0, \\ 2b_0b_3 - b_0b_2 - b_0 &= 0, & -3b_{-1}b_3 - b_{-2}b_0 + \frac{9}{2}b_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) имеет единственное решение $b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 3/2$. Относительно b_{-3} уравнение $R_{-3}^5: b_{-2}b_0 - b_{-3}b_{-1} - 3b_{-1} = 0$ имеет единственное решение $b_{-3} = -3$. У уравнения R_{-4}^5 также лишь одно решение $b_{-4} = -2$.

Наконец определим b_{-5} . Уравнение $R_{-5}^5: 2b_{-5}b_{-2} - b_{-4}b_{-2} + b_{-2} = 0$ вырождается, а второе уравнение, $R_{-5}^7: -b_0b_{-2} - 3b_{-5}b_{-1} - \frac{9}{2}b_{-1} = 0$, имеет единственное решение $b_{-5} = -3/2$.

Продолжая этот процесс рекуррентно, мы находим все коэффициенты $b_{-m-1}, \dots, b_{n-2}$, отвечающие подфактору $\tilde{V}^{m,n}$. Представим их в виде таблицы:

b_{-m-1}	$\dots$	b_{-4}	b_{-3}	b_{-2}	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}
$-6/m$	$\dots$	-2	-3	0	1	1	3	2	$\dots$	$6/(n-1)$

При $i < -5$ или $i > 0$ уравнение R_i^5 будет иметь единый вид:

$$R_i^5: \quad b_{i+3}(b_i - b_{i+1}) - b_i(b_{i+2} - b_{i+3}) = b_i - 3b_{i+1} + 3b_{i+2} - b_{i+3}.$$

Коэффициент при b_i равен $1 + b_{i+2} - 2b_{i+3} = \frac{i(i+1)}{(i+3)(i+4)}$, если предположить по индукции, что $b_{i+2} = \frac{6}{i+3}$, $b_{i+3} = \frac{6}{i+4}$. Следовательно, значения b_i при $i < 5$ будут определяться однозначно с помощью R_i^5 и будут равны $b_i = \frac{6}{i+1}$. Аналогичным образом разбирается случай $i > 0$ (уравнение R_i^5 относительно неизвестной b_{i+3}). $\square$

Следствие 3.3. *Существует такая выделенная матрица формальной связности A^{gr} , отвечающая тривиальному произведению Масси $\underbrace{\langle e^1, \dots, e^1, e^2, e^1, \dots, e^1 \rangle}_m$, $m \geq 2$, $n \geq 5$, что для произвольного элемента $a'_{i,j}$, $i > j$, любой другой матрицы формальной связности A' , соответствующей тому же самому произведению Масси, выполняется равенство*

$$a'_{i,j} = a_{i,j}^{\text{gr}} + \delta(i, j),$$

где $\delta(i, j)$ обозначает линейную комбинацию базисных функционалов e^r , индексы r которых строго меньше веса элемента $a_{i,j}^{\text{gr}}$ матрицы формальной связности A^{gr} .

Замечание. Нам нужен собственно модуль $V_{\text{gr}}^{m,n}$ для построения произведений Масси, но при этом удобнее вычислять когомологии $H^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})$. А связь между $H^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})$ и $H^*(L_1, V_{\text{gr}}^{m,n})$ очевидна:

$$H^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n}) = H^*(L_1, V_{\text{gr}}^{m,n}) \oplus (\langle f_0 \rangle \otimes H^*(L_1)).$$

3) Рассмотрим теперь модуль $\tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n} = \langle f_{-m-1}, \dots, f_n \rangle$ при $m + n = 2k - 1$. В компоненте веса $-m - 1 - \frac{3k^2 + k}{2}$ в спектральной последовательности $(*)$, отвечающей фильтрации (7) и сходящейся к когомологиям $H^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})$, среди дифференциалов $d_r^{k+m+1, -m-1} : E_r^{k+m+1, -m-1} \rightarrow E_r^{-k+m-r+2, -m-1+r}$, $r = 1, 2, \dots$, есть только один, $d_{2k+1}^{k+m+1, -m-1}$, который может оказаться нетривиальным:

$$\langle g_+^k \otimes f_{-m-1} \rangle \xrightarrow{d_{2k+1}^{k+m+1, -m-1}} \langle g_-^{k+1} \otimes f_n \rangle.$$

Действительно, в $E_1^{*,*}$ подпространство элементов веса $-m - 1 - \frac{3k^2 + k}{2}$ двумерно и совпадает с линейной оболочкой $\langle g_+^k \otimes f_{-m-1}, g_-^{k+1} \otimes f_n \rangle$. При этом, согласно лемме 2.17, $d_{2k+1}(g_+^k \otimes f_{-m-1}) = c(A^{\text{gr}}) \otimes f_n$.

Лемма 3.4. *Дифференциал d_{2k+1} , а значит, и коцикл $c(A^{\text{gr}})$, является нетривиальным. Следовательно, в силу однородности $c(A^{\text{gr}}) = g_-^{k+1}$.*

Мы отнесем доказательство этой леммы в последний параграф.

Предложение 3.5. *Произведение Масси $\underbrace{\langle e^1, \dots, e^1, e^2, e^1, \dots, e^1 \rangle}_m, g_+^k + tg_-^k$, $m + n = 2k - 1$, однозначно определено и равняется нетривиальному однородному элементу g_-^{k+1} из $H_{(3(k+1)^2 - (k+1))/2}^{k+1}(L_1)$ при любых значениях числового параметра t .*

Доказательство. Матрица $\tilde{A}$ произвольной формальной связности произведения $\langle e^1, \dots, e^1, e^2, e^1, \dots, e^1, g_+^k + tg_-^k \rangle$ получается добавлением к некоторой матрице связности A произведения $\langle e^1, \dots, e^1, e^2, e^1, \dots, e^1 \rangle$ верхней нулевой строки и левого столбца Ω так, как мы это делали в доказательстве леммы 2.16:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_+^k + t\gamma_-^k & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \Omega_1 & \omega_n & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \Omega_{m+n+2} & a(1, m+n+2) & \dots & \omega_{-m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где $(\omega_{-m-1}, \dots, \omega_n) = (e_1, \dots, e_1, e_2, e_1, \dots, e_1)$, а коциклы γ_+^k и γ_-^k представляют классы когомологий g_+^k и g_-^k соответственно. k -формы Ω_i первого столбца находятся рекуррентно, начиная с уравнения $d\Omega_1 = e^1 \wedge (\gamma_+^k + t\gamma_-^k)$. Заметим, что k -форма Ω_1 определена с точностью до замкнутого элемента $\alpha\gamma_-^k + \beta\gamma_+^k + dc$, добавка точной формы dc не изменит класс когомологий $c(\tilde{A})$. С другой стороны, максимальный вес слагаемого в разложении Ω_1 никак не может быть меньше $\frac{3k^2+k}{2} + 1$. Продолжая последовательно эту процедуру и учитывая следствие 3.3, получаем, что максимальный вес слагаемого в разложении коцикла $c(\tilde{A})$ (по модулю точных форм) всегда равен $\frac{3k^2+k}{2} + 2k - 1 = \frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}$, а значит, $[c(A)] = [c(A^{\text{gr}})] = g_-^{k+1}$, потому что все однородные слагаемые в разложении коцикла $c(\tilde{A})$ с весами меньше $\frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}$ являются точными $(k+1)$ -формами. $\square$

4) Рассмотрим конечномерный градуированный L_1 -модуль $\tilde{V}^{2k, k+1}$. В члене $E_1^{*,*}$ подпространство элементов веса $-\frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}$ двумерно и порождено $g_+^k \otimes f_{-2k-1}$ и $g_+^{k+1} \otimes f_{k+1}$. Таким образом, в этой градуировке у спектральной последовательности $(*)$ среди дифференциалов

$$d_r^{3k+1, -2k-1} : E_r^{3k+1, -2k-1} \rightarrow E_r^{3k-r+2, -2k-1+r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

есть только один потенциально ненулевой дифференциал

$$d_{3k+2}^{3k+1, -2k-1} : E_{3k+2}^{3k+1, -2k-1} \rightarrow E_{3k+2}^{0, k+1}$$

(заметим, что дифференциал d_{2k+1} тоже тривиален в этом случае):

$$\langle g_+^k \otimes f_{-2k-1} \rangle \xrightarrow{d_{3k+2}} \langle g_+^{k+1} \otimes f_{k+1} \rangle, \quad d_{3k+2}(g_+^k \otimes f_{-2k-1}) = c(A^{\text{gr}}) \otimes f_{k+1}.$$

Лемма 3.6. Дифференциал d_{3k+2} (u , следовательно, коцикл $[c(A^{\text{gr}})]$) является нетривиальным.

Эта лемма также будет доказана отдельно в последнем параграфе.

Предложение 3.7. Произведение Масси $\underbrace{\langle e^1, \dots, e^1 \rangle}_k \underbrace{\langle e^2, e^1, \dots, e^1 \rangle}_{2k} g_+^k + tg_-^k$ нетривиально и представляет собой аффинную прямую $\{g_+^{k+1} + ug_-^{k+1}, u \in \mathbb{K}\}$ на двумерной плоскости $H^{k+1}(L_1)$ при любом значении параметра t .

Доказательство. Сохраним обозначения из леммы 3.5. Мы без препятствий находим однородные формы Ω_i , $i = 1, \dots, 2k - 2$, причем мы специально поставили в произведении Масси элемент e^2 перед $2k$ экземпляров e^1 , чтобы искать однородную форму Ω_{2k-1} уже с весом $-\frac{1}{2}(3(k+1)^2 - (k+1)) - 1$, а все замкнутые формы с таким весом являются точными. Те же аргументы, что и в лемме 3.5, показывают, что наше произведение Масси представляет собой некоторое подмножество аффинной прямой $\{g_+^{k+1} + ug_-^{k+1}, u \in \mathbb{K}\}$, причем можно показать, что реализуются все точки прямой. $\square$

§ 4. Особые векторы модулей Верма и резольвента Фейгина–Фукса–Роча–Карриди–Уоллаха

Модулем Верма над алгеброй Вирасоро называется Vir-модуль $V(h, c)$, свободный над универсальной обертывающей U_{L_1} подалгебры $L_1 \subset \text{Vir}$ и порожденный некоторым вектором v , таким, что

$$zv = cv, \quad e_0v = hv, \quad e_i v = 0, \quad i < 0,$$

где $c, h \in \mathbb{C}$. Как векторное пространство $V(h, c)$ может быть задан своим бесконечным базисом

$$v, e_{i_1} \cdots e_{i_s} v, \quad i_1 \geq \cdots \geq i_s, s \geq 1.$$

Модуль Верма $V(h, c)$ является $\mathbb{Z}_+$ -градуированным модулем:

$$V(h, c) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} V_n(h, c), \quad V_n(h, c) = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_s} v, i_1 + \cdots + i_s = n \rangle.$$

$V_n(h, c)$ образует собственное подпространство оператора e_0 , отвечающее собственному значению $(h + n)$,

$$e_0(e_{i_1} \cdots e_{i_s} v) = (h + i_1 + \cdots + i_s)e_{i_1} \cdots e_{i_s} v.$$

Кроме этого, $zw = cw$ для любого $w \in V(h, c)$.

Определение 4.1. Ненулевой вектор $w \in V(h, c)$ называется *особым*, если $e_i w = 0$ для всех $i < 0$.

Однородный особый вектор $w \in V_n(h, c)$ порождает в $V(h, c)$ подмодуль, изоморфный $V(h + n, c)$.

Теорема 4.2 ([16], [11], [12]). *В модуле Верма $V(h, c)$ тогда и только тогда существует особый вектор $w \in V_n(h, c)$ с градуировкой не выше n , когда найдутся два натуральных числа p и q , а также комплексное число t , такие, что*

$$\begin{aligned} pq &\leq n, & c &= c(t) = 13 + 6t + 6t^{-1}, \\ h &= h_{p,q}(t) = \frac{1-p^2}{4}t + \frac{1-pq}{2} + \frac{1-q^2}{4}t^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Верно, в частности, и такое утверждение [15]: при фиксированных натуральных числах p и q и произвольном комплексном t модуль Верма $V(h_{p,q}(t), c(t))$ содержит особый вектор $w_{p,q}(t)$ градуировки pq , причем этот вектор определен однозначно с точностью до умножения на скалярный множитель:

$$w_{p,q}(t) = S_{p,q}(t)v = \sum_{|I|=pq} a_I^{p,q}(t)e_I v = \sum_{i_1 + \cdots + i_s = pq} a_{i_1, \dots, i_s}^{p,q}(t)e_{i_1} \cdots e_{i_s} v,$$

где $S_{p,q}(t)$ обозначает некоторый элемент универсальной обертывающей алгебры $U(L_1)$. Коэффициенты $a_I^{p,q}(t)$ зависят полиномиально от t и t^{-1} . Мы предполагаем, что коэффициент $a_{1,\dots,1}^{p,q}(t)$ равен единице. Очевидно, что $S_{p,q}(t) = S_{q,p}(t^{-1})$.

Предложение 4.3 ([16], [11], [12]). *В однородном подпространстве $V_n(0,0)$ модуля Верма $V(0,0)$ тогда и только тогда существует особый вектор w_n , когда n является пентагональным числом $n = e_{\pm}(k) = \frac{3k^2 \pm k}{2}$.*

Согласно теореме 4.2, чтобы у модуля Верма $V(h,0)$ с $c = 0$ был особый вектор $w_{p,q}(t)$, должно выполняться равенство $t = -3/2$ (или $t = -2/3$). Мы фиксируем значение $t = -3/2$ и для удобства обозначений вместо $S_{p,q}(-3/2)$ будем писать $S_{p,q}$. Обозначим через $V(\frac{3k^2 \pm k}{2})$ подмодуль в модуле Верма $V(0,0)$, порожденный особым вектором градуировки $\frac{3k^2 \pm k}{2}$. Подмодуль $V(\frac{3k^2 \pm k}{2})$ изоморфен модулю Верма $V(\frac{3k^2 \pm k}{2}, 0)$.

Предложение 4.4 ([19], [11]). *У системы подмодулей $V(\frac{3k^2 \pm k}{2})$ имеются следующие важные свойства:*

- 1) сумма $V(1) + V(2)$ является подпространством коразмерности один в $V(0,0)$;
- 2) $V(\frac{3k^2 - k}{2}) \cap V(\frac{3k^2 + k}{2}) = V(\frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}) + V(\frac{3(k+1)^2 + (k+1)}{2})$, $k \geq 1$.

Можно непосредственно убедиться, что векторы $e_1 v$ и $(e_1^2 - \frac{2}{3}e_2)v$ являются особыми в модуле $V(0,0)$ с градуировками 1 и 2 соответственно.

Включения подмодулей $V(\frac{3k^2 \pm k}{2})$ дают нам точную последовательность ([19], [11], [12])

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow V(\frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}, 0) \oplus V(\frac{3(k+1)^2 + (k+1)}{2}, 0) &\xrightarrow{\delta_{k+1}} V(\frac{3k^2 - k}{2}, 0) \oplus V(\frac{3k^2 + k}{2}, 0) \longrightarrow \\ \dots &\xrightarrow{\delta_3} V(5, 0) \oplus V(7, 0) \xrightarrow{\delta_2} V(1, 0) \oplus V(2, 0) \xrightarrow{\delta_1} V(0, 0) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где δ_k определены с помощью операторов $S_{p,q} \in U(L_1)$:

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{1,3k+1} & S_{2k+1,2} \\ -S_{2k+1,1} & -S_{1,3k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad k \geq 1, \\ \delta_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (S_{1,1}, S_{1,2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

а ε — проекция на одномерный $\mathbb{C}$ -подмодуль, порожденный вектором v .

Теорема 4.5 ([19], [11]). *Точная последовательность (19), рассматриваемая как последовательность L_1 -модулей, является свободной резольвентой одномерного тривиального L_1 -модуля $\mathbb{C}$.*

Следствие 4.6 [11]. *Пусть V есть L_1 -модуль. Тогда когомологии $H^*(L_1, V)$ изоморфны когомологиям комплекса*

$$\dots \xleftarrow{d_{k+1}} V \oplus V \xleftarrow{d_k} V \oplus V \xleftarrow{d_{k-1}} \dots \xleftarrow{d_1} V \oplus V \xleftarrow{d_0} V \quad (21)$$

с дифференциалами, задаваемыми формулой

$$\begin{aligned} d_k \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{1,3k+1} & -S_{2k+1,1} \\ S_{2k+1,2} & -S_{1,3k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1, \\ d_0(m) &= \begin{pmatrix} S_{1,1}m \\ S_{1,2}m \end{pmatrix}, \quad m, m_1, m_2 \in V. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее мы будем рассматривать градуированные модули $V = \bigoplus_i V_i$ только с одномерными однородными компонентами V_i . Задавать их будем при помощи специального базиса f_i , $V_i = \langle f_i \rangle$ ($j \in \mathbb{Z}$ в бесконечномерном случае и $j \in \mathbb{Z}$, $m \leq j \leq n$ в конечномерном). Для заданного градуированного L_1 -модуля $V = \bigoplus_i V_i$ введем числа $\sigma_{p,q}(j) \in \mathbb{K}$, такие, что

$$S_{p,q}f_j = \sigma_{p,q}(j)f_{j+pq}.$$

Пример 4.7. Хорошо известный L_1 -модуль $F_{\lambda,\mu}$ тензорных плотностей [14]:

$$e_i f_j = (j + \mu - \lambda(i+1))f_{i+j} \quad \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z},$$

где λ, μ — два комплексных параметра.

Вспомнив конструкцию L_1 -модуля $\tilde{V}_{\text{gr}}$ из теоремы 3.1, можно неформально сказать, что он «склеен» из двух модулей $F_{-1,1}$ и $F_{0,0}$.

Следствие 4.8 [11]. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ — градуированный L_1 -модуль над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда однородные когомологии $H_s^*(L_1, V)$ изоморфны когомологиям следующего комплекса:

$$\dots \xleftarrow{D_{k+1}} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \xleftarrow{D_k} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \xleftarrow{D_{k-1}} \dots \xleftarrow{D_1} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \xleftarrow{D_0} \mathbb{K}, \quad (23)$$

где дифференциалы D_k задаются числовыми матрицами

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_{1,3k+1}(s + \frac{3k^2-k}{2}) & -\sigma_{2k+1,1}(s + \frac{3k^2-k}{2}) \\ \sigma_{2k+1,2}(s + \frac{3k^2+k}{2}) & -\sigma_{1,3k+2}(s + \frac{3k^2+k}{2}) \end{pmatrix}, \quad k \geq 1, \quad D_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(s) \\ \sigma_{1,2}(s) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

§5. Формулы Бенуа–Сент-Обана и дифференциалы спектральной последовательности

В этом параграфе мы будем считать когомологии $H^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})$ при помощи резольвенты Фейгина–Фукса–Роча–Карриди–Уоллаха, построение которой мы напомнили в §4. Для конкретных вычислений необходимы явные формулы для дифференциалов (22) или (24). В свое время Фейгин и Фукс вычислили ([11], [13]) матричные элементы $\sigma_{p,q}(j)$ дифференциалов (24) для двух важных примеров градуированных L_1 -модулей, но общей формулы для операторов $S_{p,q}(t)$ так и не нашли. В конце 80-х годов Бенуа и Сент-Обан нашли красивое выражение для $S_{p,1}(t)$.

Теорема 5.1 ([5], см. полное доказательство в [3]).

$$S_{p,1}(t) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s \\ i_1 + \dots + i_s = p}} c_p(i_1, \dots, i_s) t^{p-s} e_{i_1} \dots e_{i_s}, \quad (25)$$

где суммирование происходит по всем неупорядоченным разбиениям натурального числа p . Коэффициенты $c_r(i_1, \dots, i_s)$ определены формулами

$$c_r(i_1, \dots, i_s) = \prod_{\substack{1 \leq k < r \\ k \neq i_1 + \dots + i_l, \, l=1, \dots, s-1}} k(r-k). \quad (26)$$

Пример 5.2.

$$S_{1,1}(t) = e_1, \quad S_{2,1}(t) = e_1^2 + te_2, \quad S_{3,1}(t) = e_1^3 + t(2e_1e_2 + 2e_2e_1) + 4t^2e_3.$$

Формулы (25) будет вполне достаточно для наших целей. Вычислим элементы $\sigma_{pq}(j)$ дифференциалов (24) для модуля $\hat{V}_{\text{gr}}^{m,n}$ с базисом f_j . Простое вычисление показывает, что

$$S_{3,1}(t)f_{-2} = (-2t + 4t^2)f_1 = 4t\left(t - \frac{1}{2}\right)f_1 = (2!)^2 \prod_{i=1}^2 \left(t + \frac{i-2}{i(3-i)}\right)f_1.$$

Лемма 5.3. Пусть $j < 0$ и $p + j > 0$. Тогда

$$S_{p,1}(t)f_j = (p-1)!^2 \prod_{i=1}^{p-1} \left(t + \frac{i+j}{i(p-i)}\right)f_{j+p}.$$

Доказательство. Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 5.4. Пусть $j < 0$ и $i_1 + \dots + i_s + j > 0$ при положительных $i_1, \dots, i_s$. Тогда

$$e_{i_1} \cdots e_{i_{s-1}} e_{i_s} f_j = \prod_{l=2}^s (i_l + \dots + i_s + j) f_{i_1 + \dots + i_s + j}$$

Формулу (26) для коэффициента $c_p(i_1, \dots, i_s)$ можно записать в виде

$$c_p(i_1, \dots, i_s) = \frac{(p-1)!^2}{i_1(i_1+i_2) \cdots (i_1 + \dots + i_{s-1})(p-i_1)(p-i_1-i_2) \cdots (p-i_1 - \dots - i_{s-1})}.$$

Воспользуемся формулой Бенуа–Сент-Обана (25) для вычисления значения $S_{p,1}(t)f_j$, переходя к новым индексам суммирования $k_1 = i_1$, $k_2 = i_1 + i_2, \dots$, $k_{s-1} = i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1}$:

$$\begin{aligned} S_{p,1}(t)f_j &= \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s \\ i_1 + \dots + i_s = p}} \frac{t^{p-s} (p-1)!^2 (i_s + j) \cdots (i_s + \dots + i_2 + j)}{i_1 \cdots (i_1 + \dots + i_{s-1})(p-i_1) \cdots (p-i_1 - \dots - i_{s-1})} f_{j+p} \\ &= (p-1)!^2 \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{s-1} \leq p-1} t^{p-s} \frac{(k_1 + j)}{k_1(p-k_1)} \cdots \frac{(k_{s-1} + j)}{k_{s-1}(p-k_{s-1})} f_{j+p} \\ &= (p-1)!^2 \prod_{i=1}^{p-1} \left(t + \frac{i+j}{i(p-i)}\right) f_{j+p} = F_{j,p}(t) f_{j+p}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $F_{j,p}(t) = (p-1)!^2 \prod_{i=1}^{p-1} \left(t + \frac{i+j}{i(p-i)}\right)$. □

Предложение 5.5. Пусть $j < 0$ и $p \geq 2$. Тогда

$$F_{j,p}(-3/2) \neq 0, F_{j,p}(-2/3) = 0 \iff p + 3j = 1. \quad (28)$$

Доказательство очевидно, поскольку $-3/2$ не является корнем многочлена $F_{j,p}(t)$, а $-2/3$ — один из его корней тогда и только тогда, когда $p + 3j = 1$. $\square$

Завершим доказательство основной теоремы. Для этого рассмотрим комплекс (23), вычисляющий однородные когомологии $H_s^*(L_1, \tilde{V}_{\text{gr}}^{m,n})$, в следующих двух случаях

$$1) s = -m - 1 - \frac{3k^2 + k}{2} \text{ и } m + n = 2k - 1;$$

$$2) s = -\frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}, m = 2k, n = k + 1.$$

В первом случае в комплексе (23) имеется лишь один дифференциал, который может быть нетривиальным:

$$D_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{2k+1,1}(-m-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 5.3 и предложения 5.5 следует, что

$$\sigma_{2k+1,1}(-m-1) = F_{-m-1,2k+1}(-3/2) \neq 0.$$

Это эквивалентно нетривиальности дифференциала d_{2k+1} из леммы 3.4. Эту эквивалентность мы устанавливаем по следующему соображению: имеется два способа подсчета когомологий $H_{-m-1+(3k^2+k)/2}^k(L_1, V_{\text{gr}}^{m,n})$, при помощи спектральной последовательности $(*)$ и при помощи резольвенты. Если, например, $d_{2k+1} = 0$, а $D_k \neq 0$, то у нас получатся просто разные ответы, чего не может быть. Несомненно, будет полезно установить явную связь дифференциалов d_{2k+1} и D_k , исходя из общей гомологической алгебры.

Во втором случае в (23) нетривиальным может быть также только один дифференциал D_k :

$$D_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{2k+1,1}(-2k-1) \\ 0 & -\sigma_{1,3k+2}(-2k-1) \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$S_{2k+1,1}(-3/2)f_{-2k-1} = \sigma_{2k+1,1}(-2k-1)f_0 = F_{-2k-1,2k+1}(-2k-1)(-3/2)f_0,$$

что равно нулю, согласно предложению 5.5. При этом

$$\sigma_{1,3k+2}(-2k-1)f_{k+1} = S_{3k+2,1}(-2/3)f_{-2k-1} = F_{-2k-1,3k+2}(-2/3)f_{k+1} \neq 0.$$

Значит, дифференциал d_{3k+2} из леммы 3.6 является нетривиальным. Аргументы те же, что и в предыдущем случае. Доказательство теоремы 3.1 окончено.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. В. Артельных, *Произведения Масси и спектральная последовательность Бухштабера*, УМН, **55:3** (2000), 165–166.
- [2] И. К. Бабенко, И. А. Тайманов, *Произведения Масси в симплектических многообразиях*, Матем. сб., **191:8** (2000), 3–44.
- [3] M. Bauer, Ph. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Covariant differential equations and singular vectors in Virasoro representations*, Nuclear Phys. B, **362:3** (1991), 515–562.
- [4] Y. Benoist, *Une nilvariété non affine*, J. Differential Geom., **41:1** (1995), 21–52.

- [5] L. Benoit, Y. Saint-Aubin, *Degenerate conformal field theories and explicit expressions for some null vectors*, Phys. Lett. B, **215**:3 (1988), 517–522.
- [6] В. М. Бухштабер, *Характер Чженя–Дольда в кобордизмах*. I, Матем. сб., **83(125)**:4(12) (1970), 575–595.
- [7] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров, *Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой*, Функц. анализ и его прил., **12**:3 (1978), 1–11.
- [8] I. M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras: some questions of integral geometry*, in: Actes du Congres International des Mathématiciens (Nice, 1970), t. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 95–111.
- [9] Л. В. Гончарова, *Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой*, Функц. анализ и его прил., **7**:2 (1973), 6–14; **7**:3 (1973), 33–44.
- [10] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро*, Функц. анализ и его прил., **16**:2 (1982), 47–63.
- [11] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, *Verma modules over Virasoro algebra*, in: Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 230–245.
- [12] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, *Representations of the Virasoro algebra*, in: Representations of Lie Groups and Related Topics, Adv. Stud. Contemp. Math., vol. 7, Gordon & Breach, New York, 1990, 465–554.
- [13] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, V. S. Retakh, *Massey operations in the cohomology of the infinite dimensional Lie algebra L_1* , in: Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 13–31.
- [14] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [15] D. B. Fuchs, *Singular vectors over the Virasoro algebra and extended Verma modules*, в кн.: Adv. Soviet Math., т. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 65–74.
- [16] V. G. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras*, in: Lecture Notes in Phys. B, vol. 94, 1979, 441–445.
- [17] D. Kraines, *Massey higher products*, Trans. Amer. Math. Soc., **124** (1966), 431–449.
- [18] W. S. Massey, *Some higher order cohomology operations*, in: Simposium Internacional de Topologia Algebraica, La Universidad National Autónoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, 145–154.
- [19] A. Rocha-Carridi, N. R. Wallach, *Characters of irreducible representations of the Lie algebra of vector fields on the circle*, Invent. Math., **72**:1 (1983), 57–75.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
e-mail: million@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
10 марта 2009 г.