Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, О сферических функциях на группе $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 1, 59–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:00:25

О сферических функциях на группе $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$

© 2010. Ю. А. НЕРЕТИН*

Рассматривается группа $G := SU(2) \times \cdots \times SU(2)$ (l раз), где $SU(2)$ — группа унитарных матриц порядка 2 с определителем, равным 1. Пусть $K \simeq SU(2)$ — диагональная подгруппа в G . Получена производящая функция для всех K -сферических функций на G .

§1. Введение

1.1. Группа $SU(2)$. Обозначим через $SU(2)$ группу унитарных 2×2 -матриц с определителем 1; напомним, что любая такая матрица имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Обозначим через V_n пространство однородных многочленов степени n от комплексных переменных z_1, z_2 . Введем в V_n скалярное произведение, считая, что одночлены $z_1^i z_2^j$ попарно ортогональны и

$$\|z_1^i z_2^j\|^2 = i! j!. \quad (1.1)$$

Группа $SU(2)$ действует в V_n заменами переменных,

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f(z_1, z_2) = f(z_1 a - z_2 \bar{b}, z_1 b + z_2 \bar{a}), \quad (1.2)$$

Эти преобразования удобно также записывать как

$$T(g)f(z) = f(zg), \quad (1.3)$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ понимается как матрица-строка, а zg — произведение матрицы-строки и квадратной матрицы. Легко проверить, что операторы $T(\cdot)$ унитарны и задают представление группы¹⁾ $SU(2)$.

Построенные таким образом представления группы $SU(2)$ неприводимы и исчерпывают все ее неприводимые представления.

1.2. Инварианты в тензорных произведениях. Рассмотрим тензорное произведение $V_n \otimes V_m \otimes V_k$ трех представлений группы $SU(2)$. Оно содержит $SU(2)$ -инвариантный вектор, если и только если

- число $n + m + k$ четно;

*Исследование поддержано грантом FWF, проект P19064, Российским федеральным агентством по атомной энергии, грантами NWO.047.017.015 и JSPS-RFBR-07.01.91209.

¹⁾О представлениях группы $SU(2)$ см., например, [1], [2]; много формул с тройными тензорными произведениями есть в [3].

- числа n, m, k удовлетворяют неравенству треугольника,

$$n \leq m + k, \quad m \leq n + k, \quad k \leq n + m.$$

Напомним, как этот вектор строить. Пространство $V_n \otimes V_m \otimes V_k$ можно рассматривать как пространство многочленов от 6 переменных $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, имеющих степень однородности n по x_1, x_2 , степень однородности m по y_1, y_2 и степень однородности k по z_1, z_2 . Далее выбираем числа α, β, γ из условия

$$\alpha + \beta = n, \quad \alpha + \gamma = m, \quad \beta + \gamma = k.$$

Они автоматически являются целыми и неотрицательными. Тогда $SU(2)$ -инвариантный вектор в $V_n \otimes V_m \otimes V_k$ задается формулой

$$\Xi = \Xi[\alpha, \beta, \gamma | x, y, z] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^\alpha (y_1 z_2 - y_2 z_1)^\gamma (z_1 x_2 - z_2 x_1)^\beta.$$

1.3. Постановка задачи. Положим

$$G := SU(2) \times SU(2) \times SU(2).$$

Через $K := SU(2)$ мы обозначим диагональную подгруппу группы G , т.е. группу всех троек $(A, A, A) \in G$, где A пробегает $SU(2)$. Группа G действует в $V_n \otimes V_m \otimes V_k$. Пусть Ξ — вектор, инвариантный относительно K .

Мы хотим выписать явно (насколько получится) *сферические функции*, т.е. скалярные произведения

$$\Phi_{\alpha, \beta, \gamma}(A, B, C) := \langle T(A) \otimes T(B) \otimes T(C) \Xi, \Xi \rangle_{V_n \otimes V_m \otimes V_k}, \quad (A, B, C) \in G.$$

Легко видеть, что функция Φ является K -биинвариантной, т.е. она постоянна на двойных классах смежности из $K \backslash G / K$.

В силу обычных соотношений ортогональности функции Φ попарно ортогональны на группе G по отношению к мере Хаара¹⁾.

1.4. Спектральная кривая. Каждой тройке матриц $A, B, C \in SU(2)$ мы поставим в соответствие *спектральную кривую* на проективной плоскости $\lambda : \mu : \nu$, заданную уравнением

$$\det(\lambda A + \mu B + \nu C) = 0.$$

Очевидно, что эта кривая зависит не от самой тройки $(A, B, C) \in G$, а от соответствующего двойного класса смежности из $K \backslash G / K$. Тривиальная проверка показывает, что двойной класс смежности однозначно восстанавливается по спектральной кривой.

Поэтому сферические функции Φ можно рассматривать как функции на пространстве спектральных кривых.

Ввиду того, что $\det A = \det B = \det C = 1$, мы получаем что спектральная кривая имеет вид

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2p\lambda\mu + 2q\lambda\nu + 2r\mu\nu = 0. \quad (1.4)$$

1.5. Мера на пространстве спектральных кривых.

Предложение 1.1. *Кривая (1.4) является спектральной, если и только если (p, q, r) содержится в следующем теле $\Delta \subset \mathbb{R}^3$:*

¹⁾Наше G/K — частный случай сферических многообразий, введенных Кремером [4], эта его статья породила обширную литературу, см., например, [5].

$$-1 \leq p \leq 1, \quad -1 \leq q \leq 1, \quad -1 \leq r \leq 1, \quad (1.5)$$

$$1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr \geq 0. \quad (1.6)$$

Рис. 1. а) Тело Δ вписано в единичный куб. Оно касается поверхности куба по 6 отрезкам, являющимися ребрами тетраэдра. Четыре вершины куба $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$ являются коническими особенностями поверхности $1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr = 0$.

б) Горизонтальные сечения тела Δ являются эллипсами с осями, лежащими на прямых $p = \pm q$.

Отметим, что

$$\det \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ p & 1 & r \\ q & r & 1 \end{pmatrix} = 1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr.$$

Далее, у нас есть отображение $G \rightarrow \Delta$.

Предложение 1.2. *Прямой образ меры Хаара при отображении $G \rightarrow \Delta$ — это мера Лебега (с точностью до множителя).*

По построению сферические функции $\Phi_{\alpha,\beta,\gamma}$ образуют ортогональный базис в пространстве $L^2(\Delta)$. Фактически это система ортогональных многочленов.

1.6. Производящая функция для сферических функций.

Теорема 1.3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0} \frac{u^\alpha v^\beta w^\gamma}{(\alpha! \beta! \gamma!)^2} \Phi_{\alpha,\beta,\gamma}(p, q, r) \\ = ([1 + 2p(vw - u) + 2q(uw - v) + 2r(uv - w) \\ + u^2 + v^2 + w^2]^2 - uvw(1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr))^{-1/2} \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0} \frac{u^\alpha v^\beta w^\gamma}{(\alpha! \beta! \gamma!)^2} \Phi_{\alpha,\beta,\gamma}(1, 1, 1) &= (1 - u - v - w)^{-2} \\ &= \sum \frac{u^\alpha v^\beta w^\gamma (\alpha + \beta + \gamma + 1)!}{\alpha! \beta! \gamma!}, \end{aligned}$$

или

$$\|\Xi[\alpha, \beta, \gamma; \cdot]\|_{V_\alpha \otimes V_\beta \otimes V_\gamma}^2 = \Phi_{\alpha,\beta,\gamma}(1, 1, 1) = (\alpha + \beta + \gamma + 1)! \alpha! \beta! \gamma!$$

1.7. Структура статьи. В §2 содержатся предварительные сведения, в §3 мы доказываем сформулированные выше высказывания, а в §4 получаем аналог последней теоремы для произвольного произведения групп¹⁾ $SU(2) \times \cdots \times SU(2)$.

§2. Предварительные сведения. Пространство Фока

2.1. Пространство Фока. Пространство Фока²⁾ $\mathbf{F}_n$ состоит из аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz d\bar{z} < \infty.$$

В нем вводится скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} dz d\bar{z}.$$

2.2. Стандартный базис. Одночлены $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ образуют ортогональный базис в $\mathbf{F}_n$, причем

$$\|z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}\|^2 = k_1! \cdots k_n!.$$

2.3. Гауссовы векторы. Пусть A — симметричная комплексная матрица порядка n , причем $\|A\| < 1$ (под нормой матрицы мы понимаем норму линейного преобразования в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$). Тогда функция

$$\mathbf{b}[A](z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} z A z^t \right\}$$

содержится в $\mathbf{F}_n$. Кроме того,

$$\langle \mathbf{b}[A], \mathbf{b}[B] \rangle = \det[(1 - A\bar{B})^{-1/2}]. \quad (2.1)$$

2.4. Действие $SU(2)$ в $\mathbf{F}_2$. Группа $SU(2)$ действует в $\mathbf{F}_2$ вращениями,

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} f(z_1, z_2) = f(z_1 a - z_2 \bar{b}, z_1 b + z_2 \bar{a}),$$

или, короче,

$$T(g)f(z) = f(zg).$$

Сравнивая эти формулы с (1.2), (1.1), мы получаем

$$\mathbf{F}_2 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} V_j.$$

¹⁾Кратные тензорные произведения представлений группы $SU(2)$ рассматривались многими авторами, вот случайный набор ссылок: [6], [7], [8], [9].

²⁾Подробнее см. [10].

§3. Вычисление

3.1. Вычисление радиальной части меры Хаара. Пусть $(A, B, C) \in G$. Домножая эту тройку слева на A^{-1} , мы приводим ее к виду

$$(1, A^{-1}B, A^{-1}C).$$

Далее, сопряжением второго слагаемого мы приводим тройку к виду

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \right). \quad (3.1)$$

Обозначим через $\tilde{\Delta}$ множество таких троек. Легко видеть, что образ меры Хаара при отображении $G \rightarrow \tilde{\Delta}$ равен

$$\sin^2 \varphi d\varphi \times \{\text{мера Хаара на } SU(2)\}.$$

Далее, положим $b = \rho e^{i\theta}$. В этих координатах мера Хаара на $SU(2)$ имеет вид

$$da d\bar{a} d\theta, \quad |a| \leq 1, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (3.2)$$

Спектральная кривая записывается уравнением

$$(\lambda + \mu e^{i\psi} + \nu a)(\lambda + \mu e^{-i\psi} + \nu \bar{a}) + b\bar{b}\nu^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p = \cos \varphi, \quad q = \operatorname{Re} a, \quad r = \operatorname{Re}(ae^{-i\varphi}).$$

Мы видим, что координата θ в формулах не участвует. Якобиан перехода от координат $(\varphi, a, \bar{a})$ к (p, q, r) равен

$$\sin^{-2} \varphi = (1 - p^2)^{-1}.$$

Поэтому образ меры Хаара равен $dp dq dr$.

С другой стороны, $1 - |a|^2 \geq 0$. Преобразуя это выражение к новым координатам, мы получаем

$$1 - |a|^2 = \frac{1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr}{1 - p^2}.$$

Учитывая, что $-1 \leq p \leq 1$, мы приходим к неравенству $1 - p^2 - q^2 - r^2 + 2pqr \geq 0$.

Это доказывает предложения 1.1 и 1.2.

3.2. Вычисление производящей функции. Рассмотрим пространство Фока $\mathbf{F}_6$, состоящее из голоморфных функций от переменных $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$,

$$\mathbf{F}_6 = \bigoplus_{n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0} V_n \otimes V_m \otimes V_k.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\begin{aligned} S(t, s, \sigma | x, y, z) &:= \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0} \frac{t^\alpha s^\beta \sigma^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma!} \Xi[\alpha, \beta, \gamma | x, y, z] \\ &= \exp\{t(x_1 y_2 - x_2 y_1) + s(z_1 x_2 - z_2 x_1) + \sigma(y_1 z_2 - y_2 z_1)\} \\ &= \mathbf{b}[Q(t, s, \sigma)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В правой части стоит гауссов вектор из $\mathbf{F}_6$, матрица Q имеет вид

$$Q(s, t, \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t & 0 & -s \\ 0 & 0 & -t & 0 & s & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ t & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & s & 0 & -\sigma & 0 & 0 \\ -s & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее подействуем на выражение $S(t, s, \sigma|x, y, z) \in \mathbf{F}_6$ оператором

$$T(A) \otimes T(B) \otimes T(C) f(x, y, z) = f(xA, yB, zC),$$

и вычислим двумя способами следующее скалярное произведение в $\mathbf{F}_6$:

$$\langle T(A) \otimes T(B) \otimes T(C) S(t, s, \sigma|x, y, z), S(t', s', \sigma'|x, y, z) \rangle_{\mathbf{F}_6}$$

Прежде всего, записывая S как ряд, мы получаем

$$\langle \dots, \dots \rangle = \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0} \frac{(t\bar{t}')^\alpha (s\bar{s}')^\beta (\sigma\bar{\sigma}')^\gamma}{(\alpha! \beta! \gamma!)^2} \Phi_{\alpha, \beta, \gamma}(A, B, C).$$

Далее, обозначим через U следующую матрицу порядка $6 = 2 + 2 + 2$:

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} T(A) \otimes T(B) \otimes T(C) S(t, s, \sigma|x, y, z) &= T(A) \otimes T(B) \otimes T(C) \mathbf{b}[Q(s, t, \sigma)] \\ &= \mathbf{b}[UQ(s, t, \sigma)U^t]. \end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить наше скалярное произведение как скалярное произведение гауссовых векторов по формуле (2.1),

$$\langle \dots, \dots \rangle = \det(1 - UQ(s, t, \sigma)U^tQ(s', t', \sigma'))^{-1/2}.$$

Фактически вопрос сводится к явному выписыванию определителя размера 6×6 . Достаточно провести вычисление для троек вида (3.1). Записать это вычисление более элегантно я не умею, окончательный ответ приведен в теореме 1.3, при этом параметры переобозначены следующим образом:

$$u := s\bar{s}', \quad v := s\bar{s}', \quad w := t\bar{t}'.$$

§ 4. Кратные тензорные произведения

4.1. Обозначения. Теперь мы рассматриваем произведение l групп $\mathrm{SU}(2)$,

$$G_l = \mathrm{SU}(2) \times \dots \times \mathrm{SU}(2).$$

Элементы из G_l мы записываем как

$$(A_1, \dots, A_l), \quad A_j \in \mathrm{SU}(2).$$

Через K мы обозначим диагональную подгруппу, она состоит из наборов $(A, \dots, A)$.

Нас интересуют тензорные произведения

$$V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_l}. \quad (4.1)$$

Через $u_1, \dots, u_l$ мы будем обозначать двумерные комплексные векторы,

$$u_j = (u_j^{(1)}, u_j^{(2)}),$$

так что $(u_1, \dots, u_l)$ — это вектор из $\mathbb{C}^{2l}$. Мы реализуем тензорное произведение (4.1) как пространство многочленов, имеющих степень однородности n_j по переменной $u_j \in \mathbb{C}^2$. Группа G_l действует в этом пространстве обычным образом,

$$T(A_1) \otimes \cdots \otimes T(A_l) f(u_1, \dots, u_l) = f(u_1 A_1, \dots, u_l A_l).$$

4.2. Инварианты в тензорных произведениях. Пусть $i < j$. Обозначим через ξ_{ij} следующий квадратичный многочлен от переменных u :

$$\xi_{ij}(u) := u_i^{(1)} u_j^{(2)} - u_i^{(2)} u_j^{(1)}.$$

Далее рассмотрим симметричную $l \times l$ -матрицу

$$\alpha = \{\alpha_{ij}\},$$

составленную из неотрицательных целых чисел, причем $\alpha_{ii} = 0$. Через $\Xi[\alpha]$ обозначим следующий многочлен:

$$\Xi[\alpha](u) := \prod_{i>j} \xi_{ij}(u)^{\alpha_{ij}}.$$

Очевидно, что этот многочлен K -инвариантен, причем

$$\Xi[\alpha] \in V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_l}, \quad \text{где } n_i = \sum_j \alpha_{ij}.$$

Если две матрицы α, β удовлетворяют условию

$$\sum_j \alpha_{ij} = n_i, \quad \sum_j \beta_{ij} = n_i,$$

то мы можем выписать «сферическую функцию»

$$\Phi[\alpha, \beta](A_1, \dots, A_l) := \left\langle \left(\bigotimes T(A_j) \right) \Xi[\alpha], \Xi[\beta] \right\rangle$$

Так как в нашем случае K -инвариантный вектор в $V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_l}$, вообще говоря, не единствен, аналогом сферической функции теперь является матрица $\Phi[\alpha, \beta]$.

4.3. Пространство Фока. Заметим, что пространство Фока $\mathbf{F}_{2l}$ распадается в прямую сумму,

$$\mathbf{F}_{2l} = \bigoplus_{n_1 \geq 0, \dots, n_l \geq 0} V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_l}.$$

Теперь мы можем применить тот же прием, что и в разд. 3.2.

4.4. Производящая функция. Обозначим через T_{ij} матрицу порядка 2, написанную по следующему правилу:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & t_{ij} \\ -t_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad i < j,$$

$T_{ii} = 0$, $T_{ji} := -T_{ij}$. Составим из этих матриц симметричную матрицу T размера $2l \times 2l$,

$$T := \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots \\ T_{21} & T_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_j \in \mathrm{SU}(2),$$

— блочная матрица.

Теорема 4.1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_l \geq 0} \sum_{\alpha: \sum_j \alpha_{ij} = n_i} \sum_{\beta: \sum_j \beta_{ij} = n_i} \left(\prod_{ij} \frac{t_{ij}^{\alpha_{ij}} \bar{t}_{ij}^{\beta_{ij}}}{\alpha_{ij}! \beta_{ij}!} \right) \Phi[\alpha, \beta] = \det(1 - UTU^t T')^{-1/2}.$$

Доказательство, по существу, содержится в разд. 3.2.

Разумеется, мы можем убрать одно из суммирований и записать левую часть равенства как

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\prod_{ij} \frac{t_{ij}^{\alpha_{ij}} \bar{t}_{ij}^{\beta_{ij}}}{\alpha_{ij}! \beta_{ij}!} \right) \Phi[\alpha, \beta].$$

Для «лишних слагаемых» $\Phi[\alpha, \beta]$ будут обращаться в нуль, а соответствующие степени $t_{ij}^{\alpha_{ij}} \bar{t}_{ij}^{\beta_{ij}}$ в разложении правой части отсутствуют.

4.5. Скалярные произведения инвариантных векторов. Теперь мы хотим написать производящую функцию для выражений

$$\langle \Xi[\alpha], \Xi[\beta] \rangle = \Phi[\alpha, \beta](1, \dots, 1)$$

Разумеется, она задается формулой $\det(1 - TT')^{-1/2}$. Забавно, что из многочлена $\det(1 - TT')$ извлекается корень четвертой степени.

Положим

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & \dots \\ -t_{12} & 0 & t_{23} & \dots \\ -t_{13} & t_{23} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.2. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_l \geq 0} \sum_{\alpha: \sum_j \alpha_{ij} = n_i} \sum_{\beta: \sum_j \beta_{ij} = n_i} \left(\prod_{ij} \frac{t_{ij}^{\alpha_{ij}} \bar{t}_{ij}^{\beta_{ij}}}{\alpha_{ij}! \beta_{ij}!} \right) \Phi[\alpha, \beta](1, \dots, 1) \\ = \det(1 + \mathbf{T}\mathbf{T}')^{-1} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{T}' \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Последняя матрица кососимметрична, поэтому из ее определителя извлекается квадратный корень (пфаффиан).

Доказательство. Рассмотрим блочно-диагональную матрицу Σ с блоками $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ по диагонали. Тогда

$$\det(1 - TT') = \det(1 - (T\Sigma)(\Sigma T')) = \det \begin{pmatrix} T\Sigma & 1 \\ -1 & -\Sigma S \end{pmatrix}.$$

Последний определитель расщепляется в произведение двух определителей, которые равны $\det \begin{pmatrix} \mathbf{T} & 1 \\ -1 & \mathbf{T}' \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970.
- [2] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [3] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions*, vol. 1, Kluwer, 1992.
- [4] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Composito Math., **38**:2 (1979), 129–153.
- [5] F. Knop, B. Van Steirteghem, *Classification of smooth affine spherical varieties*, Transform. Groups, **11**:3 (2006), 495–516.
- [6] R. Howe, *Transcending classical invariant theory*, J. Amer. Math. Soc., **2**:3 (1989), 535–552.
- [7] A. A. Klyachko, *Spatial polygons and stable configurations of points on a projective line*, in: Algebraic geometry and applications (Yaroslavl, 1992), Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84.
- [8] A. Varchenko, *Special functions, KZ type equations and representation theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [9] H. Rosengren, *An elementary approach to 6j-symbols (classical, quantum, rational trigonometric, and elliptic)*, Ramanujan J., **13**:1–3 (2007), 131–166.
- [10] *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, Эдиториал УРСС, М., 1998.

University of Vienna, Mathematical Department
Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва
e-mail: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию
1 марта 2008 г.