Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, А. И. Шафаревич, Туннельное расщепление спектра операторов Лапласа–Бельтрами на двумерных поверхностях с квадратично интегрируемым геодезическим потоком, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 2, 67–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:19:59

1984. **3.** Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности I. Локальная и глобальная теория. Динамические системы VI. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр., т. 6, ВИНТИ, М., 1988. **4.** Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности II. Классификация и приложения. Динамические системы VIII. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр., т. 39, ВИНТИ, М., 1989. **5.** Bruce J. W. Bull. London Math. Soc., **17**, No. 5, 257–262 (1985). **6.** Damon J. N. Mem. Amer. Math. Soc., **50**, No. 306, 1–88 (1984). **7.** Горюнов В. В. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 1–8 (1981). **8.** Fröhlich-Krueger A. Preprint, Universität Kaiserslautern, 1998. **9.** Looijenga E. J. N. Invent. Math., **23**, 105–116 (1974). **10.** Закалюкин В. М. Функц. анализ и его прил., **10**, вып. 2, 69–70 (1976).

Department of Mathematical Sciences
Division of Pure Mathematics
The University of Liverpool
e-mail: goryunov@liv.ac.uk

Поступило в редакцию
8 сентября 1998 г.

УДК 517.98

Туннельное расщепление спектра операторов Лапласа–Бельтрами на двумерных поверхностях с квадратично интегрируемым геодезическим потоком

© 2000. С. Ю. ДОБРОХОТОВ, А. И. ШАФАРЕВИЧ

Пусть M — тор или сфера с квадратично интегрируемым по Лиувиллю геодезическим потоком, т. е. в кокасательном расслоении T^*M существует независимый с гамильтонианом $H = |p|^2$ квадратичный по импульсам p интеграл F (см. [1–3]). Метрика на M приводится к лиувиллеву виду $ds^2 = (u_1(x_1) - u_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$, $u_1 - u_2 > 0$, причем координаты (x_1, x_2) определены на торе $\tilde{M}$, конечнолистно накрывающем исходную поверхность M . Пусть $\tilde{F}$, $\tilde{H}$ — поднятия интегралов F , H на $T^*\tilde{M}$. Множество уровня $\{\tilde{H} = E, \tilde{F} = \mathcal{E}\}$, где $\min u_1 < \mathcal{E}/E < \max u_1$, состоит из двух торov $\tilde{\Lambda}^\pm$, накрывающих лиувиллевы торы геодезического потока. Инволюция $p \rightarrow -p$ переводит в себя лиувиллево слоение, причем отдельные лиувиллевы торы, вообще говоря, переставляются между собой.

Пусть Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M ; каждый неособый лиувиллев тор Λ геодезического потока, удовлетворяющий условию квантования [5], определяет в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ квазимоду $\psi \in L^2(M)$, $E \in \mathbb{R}$ оператора $-\hbar^2 \Delta$. При этом асимптотическая собственная функция ψ имеет вид $\psi = K_\Lambda^a(1)$, где K_Λ^a — канонический оператор Маслова [5] на лагранжевом торе Λ с произвольной отмеченной точкой a ; асимптотическое собственное число E вычисляется из условий квантования (явные формулы для случая $M = T^2$ см., например, в [6]). Рассмотрим пару различных торov $\Lambda^\pm$, переходящих друг в друга под действием инволюции $p \rightarrow -p$. Они одновременно удовлетворяют (или не удовлетворяют) условиям квантования, причем числа E , определяемые этими торами, совпадают. Переменные в спектральной задаче для оператора Лапласа разделяются; используя результаты [4], нетрудно доказать существо-

вание двух собственных чисел $\lambda^\pm = E + O(h^2)$ оператора $-h^2\Delta$, расстояние между которыми есть $O(h^\infty)$, а также получить асимптотическую формулу для этого расстояния и для собственных функций, соответствующих $\lambda^\pm$. Наше наблюдение состоит в том, что разность $\lambda^+ - \lambda^-$ выражается через характеристики комплексных лагранжевых многообразий.

Для упрощения формулировки результатов будем считать, что u_i — тригонометрические полиномы. Комплексифицируем тор $\widetilde{M}$, накрывающий исходную поверхность M , полагая ${}^{\mathbb{C}}\widetilde{M} = \mathbb{C}^2/(2\pi\mathbb{Z} \oplus 2\pi\mathbb{Z})$, и рассмотрим комплексное фазовое пространство $\Phi = {}^{\mathbb{C}}T^*\widetilde{M} = {}^{\mathbb{C}}\widetilde{M} \times \mathbb{C}^2$. Уравнения $\tilde{H} = E$, $\tilde{F} = \mathcal{E}$ задают в Φ комплексное лагранжево многообразие L . Расщепление собственных чисел оператора Лапласа выражается через следующие объекты на этом многообразии: 1) голоморфную 1-форму $\theta = (w, dz)$, где z — комплексные координаты на ${}^{\mathbb{C}}\widetilde{M}$, а w_j — комплексные импульсы; 2) два голоморфных векторных поля v_1, v_2, v_j определено в Φ как гамильтоново поле с гамильтонианом $w_j^2 + (-1)^j(\mathcal{E} - Eu_j(z_j))$; 3) келерову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в которой поля v_1, v_2 образуют ортонормированный базис; 4) векторное поле ξ , определенное по форме θ и метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\theta(\zeta) = i\langle \zeta, \xi \rangle$ для любого касательного вектора ζ . Келерова метрика определяет на L риманову и симплектическую структуры; относительно этих структур поле ξ является одновременно локально гамильтоновым и локально градиентным — его локальный гамильтониан есть $\int \operatorname{Re} \theta$, а локальный потенциал равен $\int \operatorname{Im} \theta$.

Пусть b — особая точка поля ξ ; рассмотрим отрезок траектории этого поля, соединяющий b с некоторой точкой на вещественном торе $\tilde{\Lambda}^+$. Действуя на этот отрезок инволюцией $w \rightarrow -w$ и комплексным сопряжением, получим одномерный цикл на многообразии L . Проинтегрируем по каждому такому циклу форму $\operatorname{Im} \theta$ и обозначим через Γ цикл, для которого этот интеграл минимален. Назовем его *туннельным циклом* на многообразии L , точки $a^\pm$ его пересечения с торами $\tilde{\Lambda}^\pm$ — *стоксовыми точками* на торах $\tilde{\Lambda}^\pm$ (они определены однозначно для каждого туннельного цикла), а число $\rho = \frac{1}{2} \int \operatorname{Im} \theta$ — *туннельным расстоянием* между Λ^+ и Λ^- .

В формулу для расщепления собственных чисел, помимо туннельного расстояния, входит еще значение некоторого коцикла $\varkappa \in H^1(\tilde{\Lambda}^+, \mathbb{R})$ на некотором цикле η_0 . Они определяются следующим образом. Пусть γ_1, γ_2 — базис циклов на торе $\tilde{\Lambda}^+$; продолжим его гладким образом на соседние торы лиувиллева слоения и рассмотрим соответствующий вектор частот ω гамильтонова поля, задающего геодезический поток. Положим $\varkappa(\eta) = (\omega, m) = \omega_1 m_1 + \omega_2 m_2$ для любого $\eta \in H_1(\tilde{\Lambda}^+, \mathbb{Z})$, где m_j — индексы пересечений η с базисными циклами γ_1, γ_2 (коцикл $\varkappa$ не зависит от выбора базиса γ). Наконец, определим цикл $\eta_0 \in H_1(\tilde{\Lambda}^+, \mathbb{Z})$. На каждой комплексной траектории v_j построим свое градиентно-гамильтоново поле ξ_j , ограничивая форму θ и келерову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на эту двумерную поверхность. Рассмотрим отрезки сепаратрис поля ξ_j , соединяющие множество $\Sigma \subset L$ особых точек естественной проекции $L \rightarrow {}^{\mathbb{C}}\widetilde{M}$ с тором $\tilde{\Lambda}^+$ и такие, что интеграл по каждому такому отрезку от $\operatorname{Im} \theta$ равен $\rho/2$. Их точки пересечения с $\tilde{\Lambda}^+$ образуют цикл, который мы и обозначим через η_0 .

ТЕОРЕМА. Пусть туннельный цикл Γ единствен с точностью до гомотопии. Пусть, кроме того, на торах $\Lambda^\pm$ выполнены условия квантования. Тогда оператор $-h^2\Delta$ на M имеет два собственных числа $\lambda^\pm = E + O(h^2)$, причем расстояние между ними имеет вид

$$\lambda^+ - \lambda^- = \frac{h}{\pi} e^{-\rho/h} (\kappa(\eta_0) + O(h)).$$

Собственные функции $\varphi^\pm$, отвечающие этим собственным числам, имеют вид $\varphi^\pm = (K_{\Lambda^+}^{a^+}(1) \pm K_{\Lambda^-}^{a^-}(1)) + O(h)$, где K — канонический оператор Маслова, а $a^\pm$ — проекции на $\Lambda^\pm$ стоксовых точек, отвечающих одному и тому же туннельному циклу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сепаратрисы градиентно-гамильтонова поля ξ играют ту же роль в туннельных эффектах, что и антистоксовы канонические пути в одномерном случае [4]; отметим, что сепаратрисы векторного поля $i\xi$ (также градиентно-гамильтонова) аналогичны линиям Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмуртского гос. унив., 1995.
2. Колокольцов В. Н. Изв. АН СССР, сер. матем., **46**, № 5, 994–1010 (1982).
3. Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. Матем. заметки, **58**, № 2, 643–652 (1995).
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1983.
5. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Наука, М., 1976.
6. Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г. УМН, **48**, вып. 4, 3–130 (1993).

Институт проблем механики РАН
Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
24 июня 1998 г.

УДК 514.7

Лоренцевы мировые линии и производная Шварца

© 2000. К. Дюваль, В. Ю. Овсиенко

Цель настоящей заметки — установить связь между классической производной Шварца и геометрией лоренцевых поверхностей постоянной кривизны.

1. Отправной точкой для нас послужил следующий факт (установленный совместно с Л. Гийо). Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, на плоскости с лоренцевой метрикой $g = dx dy$. Если $f'(x) > 0$, то ее лоренцева кривизна, имеющая вид $\varrho(x) = f''(x)(f'(x))^{-3/2}$, обладает следующим замечательным свойством:

$$\sqrt{f'(x)} \varrho'(x) = S(f)(x), \quad (1)$$

где

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \quad (2)$$