Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Петров, Двухпараметрическое семейство бесконечномерных диффузий на симплексе Кингмана, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 4, 45–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 05:02:51

УДК 519.217

Двухпараметрическое семейство бесконечномерных диффузий на симплексе Кингмана

© 2009. Л. А. ПЕТРОВ

В данной работе построено двухпараметрическое семейство диффузионных процессов $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}$ на симплексе Кингмана, состоящем из невозрастающих последовательностей неотрицательных чисел с суммой не больше единицы. Процессы на этом симплексе возникают как пределы марковских цепей на разбиениях натуральных чисел.

В случае $\alpha = 0$ наш процесс совпадает с популяционно-генетической динамической моделью бесконечного количества нейтральных аллелей, построенной Этье и Куртцом (1981). Двухпараметрический случай, по-видимому, не имеет популяционно-генетической интерпретации. В настоящей работе обобщаются основные результаты Этье и Куртца на случай двух параметров. А именно, мы показываем, что единственной инвариантной мерой процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}$ является (двухпараметрическая) мера Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$, причем процесс обратим и эргодичен относительно нее. Мы вычисляем спектр его генератора. Также оказывается, что диффузии Райта–Фишера на конечномерных симплексах возникают как частный случай процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}$ при определенных вырожденных значениях параметров.

Введение

Основной результат данной работы состоит в построении двухпараметрического семейства марковских процессов $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ на бесконечномерном симплексе Кингмана

$$\bar{\nabla}_{\infty} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in [0, 1]^{\infty} : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

В топологии покоординатной сходимости $\bar{\nabla}_{\infty}$ является метризуемым сепарабельным компактом.

Пусть $C(\bar{\nabla}_{\infty})$ — алгебра непрерывных функций на $\bar{\nabla}_{\infty}$ с поточечными операциями и супремум-нормой. Определим в ней плотное подпространство $\mathcal{F} := \mathbb{R}[q_1, q_2, \dots]$, порожденное (как коммутативная алгебра с единицей) непрерывными алгебраически независимыми функциями $q_k(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\nabla}_{\infty}$.

Для любых $0 \leq \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$ определим оператор $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, который может быть записан как формальный дифференциальный оператор второго порядка по образующим алгебры $\mathcal{F}$:

$$A = \sum_{i, j=1}^{\infty} (i+1)(j+1)(q_{i+j} - q_i q_j) \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} + \sum_{i=1}^{\infty} [-(i+1)(i+\theta)q_i + (i+1)(i-\alpha)q_{i-1}] \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (2)$$

а также (с некоторыми оговорками, см. замечания 5.3 и 5.4 ниже) как дифференциальный оператор в естественных координатах:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{\infty} (\theta x_i + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Следует особо отметить, что оператор A определен только на $\mathcal{F}$, и применение правых частей формул (2) или (3) к другим функциям напрямую требует осторожности.

Основная теорема. (1) Оператор A замыкаем в $C(\bar{\nabla}_{\infty})$.

(2) Его замыкание $\bar{A}$ порождает диффузионный процесс $\{X_{\alpha,\theta}(t)\}_{t \geq 0}$ на $\bar{\nabla}_{\infty}$ (под диффузионным процессом понимается строго марковский процесс с непрерывными траекториями).

(3) Двухпараметрическая мера Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$ на $\bar{\nabla}_{\infty}$ является единственной инвариантной вероятностной мерой процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$. Процесс обратим относительно этой меры.

(4) Спектр генератора $\bar{A}$ процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$ вычислен в явном виде в разд. 4.2 ниже. Благодаря наличию спектральной щели $X_{\alpha,\theta}(t)$ эргодичен по отношению к мере $PD(\alpha, \theta)$.

Пусть $0 \leq \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$ фиксированы. Процесс $X_{\alpha,\theta}(t)$ на симплексе $\bar{\nabla}_{\infty}$ строится как предел конечных марковских цепей с растущим числом состояний. Пространство состояний n -й цепи представляет собой множество всех разбиений числа n на натуральные слагаемые и обозначается через $\mathbb{K}_n$. Каждое $\mathbb{K}_n$ снабжено вероятностной мерой M_n (также зависящей от α и θ), которая выписывается в явном виде. Совокупность $\{M_n\}$ является структурой разбиений¹⁾. В [19] установлено взаимно однозначное соответствие между структурами разбиений и вероятностными мерами на $\bar{\nabla}_{\infty}$. Мера Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$ соответствует двухпараметрической структуре разбиений Ювенса–Питмана $\{M_n\}$. При $\alpha = 0$ эта структура разбиений была введена в работе [7], двухпараметрическое обобщение принадлежит Питману [22]. Частный случай системы $\{M_n\}$ при $\alpha = 0$, $\theta = 1$ рассматривался в работах [28], [13] в связи с предельным поведением некоторых функционалов на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ при $n \rightarrow \infty$, там же изучалась мера $PD(0, 1)$. Двухпараметрические структуры разбиений Ювенса–Питмана изучались в работах [23], [25], [11], [26], [3] и многих других. См. также библиографию в [25].

Стоит отметить, что первый пример марковского процесса на $\bar{\nabla}_{\infty}$, для которого двухпараметрическая мера Пуассона–Дирихле является единственной инвариантной симметризирующей вероятностной мерой, построен в работе [1]. Также в недавней работе [10] рассматриваются диффузии на неупорядоченном бесконечномерном симплексе, сохраняющие GEM-распределение (Griffiths–Engen–McCloskey, см. [25]) на нем. При упорядочении координат GEM-распределение становится мерой Пуассона–Дирихле.

Случай $\alpha = 0$ относительно хорошо изучен и имеет приложения в популяционной генетике. Мера $PD(0, \theta)$ появилась в работе [17]. Процесс $X_{0,\theta}(t)$ был

¹⁾Термин «partition structure» был введен в [19]. Общепринятого перевода на русский язык, по-видимому, не существует. В более общей ситуации используется также термин «coherent system» (см., например, [16], [2]).

построен в [4] как предел диффузионных процессов на конечномерных симплексах растущей размерности. В разд. 5.3 будет показано, что эти конечномерные диффузии являются частным случаем процесса $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ при значениях параметров $\alpha = -\beta < 0$, $\theta = N\beta$, $N = 2, 3, \dots$. Также легко видеть, что при $\alpha = 0$ оператор A , записанный в форме (3), совпадает с удвоенным оператором из формулы (2.10) работы [4].

Кроме того, в [4] доказано, что процесс $\mathbf{X}_{0,\theta}(t)$ возникает как предельный в популяционной модели типа Морана (об этой модели см. также, например, [29] и [14, модель II]). Модель типа Морана представляет собой последовательность марковских цепей на разбиениях, которые отличаются от рассматриваемых в данной работе, однако имеют тот же предел.

Процесс $\mathbf{X}_{0,\theta}(t)$ (при $\alpha = 0$) называется *моделью бесконечного количества нейтральных аллелей*¹⁾, он изучался также в [6], [27] и других работах. Результаты данной работы обобщают некоторые результаты из [4] и [6] на случай $\alpha \neq 0$. В этом случае, по-видимому, теряется связь модели $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ с популяционной генетикой — ни для конечных марковских цепей, ни для нашего процесса на $\bar{\nabla}_\infty$ такой интерпретации не известно.

В настоящей работе построение процесса $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$ использует только понятия структуры разбиений и марковских цепей вверх/вниз. Впервые в контексте, рассматриваемом в данной работе, цепи вверх/вниз появились в [8]. Они также изучались в работах [2], [9]. Постановка задачи и общий подход к ее решению инспирированы работой [2]. Однако конкретные вычисления здесь осуществлены другим способом. Роль, которую в [2] играют функции Шура, в нашей ситуации выполняют мономиальные симметрические функции. Они проще функций Шура, и результат достигается более простыми средствами. Дополнительно к результатам, аналогичным результатам из [2], удастся вычислить оператор A в естественных координатах (3) и явно описать процесс $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ при $\alpha = -\beta < 0$ и $\theta = N\beta$. Приведем краткий план работы.

В разд. 1.1 введены основные обозначения, связанные с разбиениями. В разд. 1.2 приводятся определения структур разбиений и связанных с ними марковских цепей вверх/вниз. В разд. 1.3 приводятся определение и некоторые свойства структур разбиений Ювенса–Питмана.

В §2 рассматриваются некоторые свойства симметрических функций от координат $(x_1, x_2, \dots)$ точки $x \in \bar{\nabla}_\infty$. Симметрические функции образуют алгебру $\mathcal{F}$, определенную выше. В этих терминах формулируется теорема Кингмана о взаимно однозначном соответствии между структурами разбиений и вероятностными мерами на $\bar{\nabla}_\infty$.

В §3 получено явное выражение для действия переходных операторов T_n марковских цепей вверх/вниз на симметрические функции от компонент $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ разбиений $\lambda \in \mathbb{K}_n$.

В разд. 4.1 совершается предельный переход от цепей вверх/вниз к процессу $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$. Сначала, используя связь симметрических функций от компонент разбиения с симметрическими функциями на $\bar{\nabla}_\infty$, мы явно находим предел операторов $n^2(T_n - \mathbf{1})$, который равен оператору $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, выписанному выше. Затем, используя абстрактные результаты книги [5], мы устанавливаем сходимость дискретных полугрупп $\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \dots\}$ к непрерывной полугруппе

¹⁾The infinitely many neutral alleles diffusion model (англ.)

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$, порожденной замыканием $\bar{A}$ этого оператора A . В разд. 4.2 приведены остальные результаты основной теоремы, сформулированной выше, кроме непрерывности траекторий процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$.

В разд. 5.1 получена формула (3). Там также объясняется, почему правую часть этой формулы нельзя понимать буквально. В разд. 5.2 получена формула (2) для оператора A . Используя это выражение, удается доказать непрерывность траекторий рассматриваемого процесса на $\bar{\nabla}_{\infty}$. В разд. 5.3 сделано замечание о вырожденных значениях параметров $\alpha = -\beta$, $\theta = N\beta$, при которых вместо диффузии на $\bar{\nabla}_{\infty}$ в пределе марковских цепей вверх/вниз получается диффузия на $(N-1)$ -мерном симплексе, совпадающая с рассмотренной в [4].

Автор глубоко признателен Г. И. Олшанскому за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

§1. Структуры разбиений Ювенса–Питмана

1.1. Обозначения. Приведем основные комбинаторные обозначения, которые используются на протяжении всей работы.

Под *разбиением* будем понимать невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell}, 0, 0, \dots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\ell} > 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0},$$

в которой содержится лишь конечное число ненулевых элементов.

Разбиения отождествляются с диаграммами Юнга, см. [20], и обозначаются теми же буквами. Число клеток в λ обозначается через $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_{\ell}$. Число строк в λ называется *длиной диаграммы* и обозначается через $\ell(\lambda)$. Пусть также $\emptyset$ — пустая диаграмма Юнга.

Если диаграмма λ получена из диаграммы μ путем добавления одной клетки, то будем писать $\mu \nearrow \lambda$ или, что эквивалентно, $\lambda \searrow \mu$. Клетку, которой отличаются μ и λ , обозначим через λ/μ .

Для любой клетки $\square$ на плоскости обозначим через $r(\square)$ номер столбца, в котором она лежит, считая слева направо.

Фиксируем произвольную непустую диаграмму λ . Отметим следующие важные свойства. Во-первых, для любого $i = 1, \dots, \ell(\lambda)$ существует единственная клетка с $r(\square) = \lambda_i$, обозначаемая через $\square(\lambda_i)$, которую можно убрать из λ , так что снова получится диаграмма Юнга. Полученную диаграмму обозначим через $\lambda - \square(\lambda_i)$. Так описываются все диаграммы μ , такие, что $\mu \nearrow \lambda$. Во-вторых, для любого $i = 1, \dots, \ell(\lambda)$ существует единственная клетка с $r(\square) = \lambda_i + 1$, обозначаемая через $\hat{\square}(\lambda_i + 1)$, которую можно прибавить к λ , так что снова получится диаграмма Юнга. Полученную диаграмму обозначим через $\lambda + \hat{\square}(\lambda_i + 1)$. Все диаграммы ν , $\nu \searrow \lambda$, имеют либо вид $\lambda + \hat{\square}(\lambda_i + 1)$, либо вид $\lambda + \hat{\square}(1)$, где $\lambda + \hat{\square}(1)$ — диаграмма, полученная из λ добавлением строки, состоящей из одной клетки.

Для натурального k через $[\lambda : k]$ обозначим число строк в λ длины k . Это неотрицательное целое число. Для диаграмм Юнга μ , λ , таких, что $|\lambda| = |\mu| + 1$, положим

$$\kappa(\mu, \lambda) := \begin{cases} [\lambda : r(\lambda/\mu)], & \text{если } \mu \nearrow \lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Все диаграммы Юнга организованы в градуированное множество

$$\mathbb{K} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}_n,$$

где $\mathbb{K}_n = \{\lambda : |\lambda| = n\}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{K}_0 = \{\emptyset\}$. На этом множестве вводится структура градуированного графа с ребрами только между соседними «этажами» $\mathbb{K}_n$ и $\mathbb{K}_{n+1}$. Между $\mu \in \mathbb{K}_n$ и $\lambda \in \mathbb{K}_{n+1}$ проводится $\kappa(\mu, \lambda)$ ребер. Считаем, что они ориентированы в направлении от $\mathbb{K}_n$ к $\mathbb{K}_{n+1}$. Этот граф (называемый в литературе графом Кингмана) отличен от графа Юнга, в котором проведены те же ребра, только однократные.

Обозначим через $g(\mu, \lambda)$ количество ориентированных путей от μ до λ в графе $\mathbb{K}$. Ясно, что это число отлично от нуля, только если $\mu \subset \lambda$ как диаграммы (множества клеток на плоскости). Положим $g(\lambda) := g(\emptyset, \lambda)$. Оказывается, что $g(\lambda) = |\lambda|! / (\lambda_1! \cdots \lambda_{\ell(\lambda)}!)$.

Также нам понадобятся символы Похгаммера

$$(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (a)_0 := 1$$

и факториальные степени

$$a^{\downarrow k} := a(a-1) \cdots (a-k+1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad a^{\downarrow 0} := 1.$$

1.2. Марковские цепи вверх/вниз. Структура графа на $\mathbb{K}$ важна, однако в данной работе она используется только для того, чтобы ниже применить рекуррентные соотношения (7) для величин $g(\mu, \lambda)$.

Одним из важнейших рассматриваемых объектов являются *марковские цепи вверх/вниз*. Они изучались в работах [2], [8], [9]¹⁾. Для их определения далее используется формализм из [2, §1].

Переходной функцией вниз для $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$, таких, что $|\lambda| = |\mu| + 1$, называется

$$p^{\downarrow}(\lambda, \mu) := \frac{g(\mu)}{g(\lambda)} \kappa(\mu, \lambda).$$

Легко проверить следующие ее свойства:

- $p^{\downarrow}(\lambda, \mu) \geq 0$ для всех $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$, таких, что $|\lambda| = |\mu| + 1$;
- $p^{\downarrow}(\lambda, \mu)$ отлична от нуля только для $\mu \nearrow \lambda$;
- если $|\lambda| = n \geq 1$, то $\sum_{\mu: |\mu|=n-1} p^{\downarrow}(\lambda, \mu) = 1$.

Замечание 1.1. Отметим, что одно и то же семейство переходных функций вниз может получиться при разных функциях кратности $\kappa(\cdot, \cdot)$ (и соответственно разных величинах $g(\cdot, \cdot)$, которые определяются по кратностям). В работе [15], помимо кратностей (4), рассматриваются еще две целочисленные функции кратности, которые приводят к тем же переходным функциям вниз (такие функции кратности называются *подобными*). Иногда в литературе под графом Кингмана понимают граф с теми же вершинами, но другой функцией кратности, которая подобна функции (4).

¹⁾В [8], [9] были введены и изучались цепи вниз/вверх; их отличие от цепей вверх/вниз незначительно.

Структурой разбиений на $(\mathbb{K}, p^\perp)$ называется семейство $\{M_n\}_{n \geq 0}$, где M_n — вероятностная мера на $\mathbb{K}_n$, $n \geq 0$, согласованное с переходной функцией вниз в том смысле, что

$$M_n(\mu) = \sum_{\lambda: \lambda \searrow \mu} M_{n+1}(\lambda) p^\perp(\lambda, \mu) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ и } \mu \in \mathbb{K}_n. \quad (5)$$

Здесь $M_n(\mu)$ означает меру одноточечного множества $\{\mu\}$.

Фиксируем структуру разбиений $\{M_n\}$. Переходной функцией вверх для $\lambda, \nu \in \mathbb{K}$, таких, что $|\nu| = |\lambda| + 1$ и $M_n(\lambda) \neq 0$, называется

$$p^\uparrow(\lambda, \nu) := \frac{M_{n+1}(\nu)}{M_n(\lambda)} p^\perp(\nu, \lambda), \quad \lambda \nearrow \nu.$$

Эта функция зависит от конкретной структуры разбиений. Кроме того, семейство $\{M_n\}$ согласовано с $p^\uparrow$ (в смысле, похожем на (5)):

$$M_{n+1}(\nu) = \sum_{\lambda: \lambda \nearrow \nu, \lambda \in \text{supp}(M_n)} M_n(\lambda) p^\uparrow(\lambda, \nu) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ и } \nu \in \mathbb{K}_{n+1}.$$

Пусть $\{M_n\}$ — структура разбиений и $M_n(\lambda) > 0$ для всех $n \geq 0$ и всех $\lambda \in \mathbb{K}_n$. Определим на каждом $\mathbb{K}_n$, $n \geq 1$, марковскую цепь T_n с переходной матрицей

$$T_n(\lambda, \tilde{\lambda}) := \sum_{\nu: |\nu|=n+1} p^\uparrow(\lambda, \nu) p^\perp(\nu, \tilde{\lambda}), \quad \lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{K}_n.$$

Это композиция переходных функций — сначала вверх из $\mathbb{K}_n$ в $\mathbb{K}_{n+1}$ и затем обратно в $\mathbb{K}_n$. Из определений, приведенных выше, следует, что M_n является стационарным распределением для T_n . Можно легко показать, что матрица $M_n(\lambda) T_n(\lambda, \tilde{\lambda})$ симметрична относительно замены $\lambda \leftrightarrow \tilde{\lambda}$, а это означает, что цепь T_n обратима относительно M_n .

1.3. Структуры разбиений Ювенса–Питмана. В данной работе рассматривается специальное двухпараметрическое семейство структур разбиений Ювенса–Питмана.

Пусть α и θ — некоторые параметры. Положим

$$M_n(\lambda) := \frac{n!}{(\theta)_n} \cdot \frac{\theta(\theta + \alpha) \cdots (\theta + (\ell(\lambda) - 1)\alpha)}{\prod_{k=1}^{\infty} [\lambda : k]! \cdot \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i!} \prod_{\substack{\square \in \lambda \\ r(\square) \geq 2}} (r(\square) - 1 - \alpha)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\lambda \in \mathbb{K}_n$.

Можно показать, что для M_n выполнено условие (5) для всех значений параметров α и θ , при которых M_n определены, а также что при этом

$$\sum_{\lambda: |\lambda|=n} M_n(\lambda) = 1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Кроме того, можно проверить, что выражения $M_n(\lambda)$ неотрицательны для всех $n \geq 0$ и $\lambda \in \mathbb{K}_n$, если и только если

- (основная серия параметров) $0 \leq \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$;
- (вырожденная серия параметров) $\alpha = -\beta < 0$ и $\theta = N\beta$ для некоторого $N = 2, 3, \dots$

В основной серии носитель каждой меры M_n есть все множество $\mathbb{K}_n$, а в вырожденной серии $M_n(\lambda) > 0$ только для λ длины $\leq N$. Таким образом, когда

параметры лежат в основной или вырожденной серии, $\{M_n\}_{n \geq 0}$ является структурой разбиений. Она называется *структурой разбиений Ювенса–Питмана*. Легко показать, что переходная функция вверх для этой структуры разбиений имеет вид

$$p^\uparrow(\lambda, \nu) = \begin{cases} \frac{\lambda_i - \alpha}{n + \theta} [\lambda : \lambda_i], & \text{если } \nu = \lambda + \widehat{\square}(\lambda_i + 1) \text{ для } 1 \leq i \leq \ell(\lambda), \\ \frac{\theta + \ell(\lambda)\alpha}{n + \theta}, & \text{если } \nu = \lambda + \widehat{\square}(1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $|\lambda| = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Всюду далее, кроме разд. 5.3, предполагается, что параметры α и θ лежат в основной серии. Тогда, как объясняется в разд. 1.2, можно рассматривать цепи вверх/вниз на всем $\mathbb{K}_n$ (для $n \geq 1$), поскольку мера M_n всюду положительна на $\mathbb{K}_n$.

§2. Симметрические функции и симплекс Кингмана

2.1. Симметрические функции. Пусть Λ — (вещественная) алгебра симметрических функций от формальных переменных $y_1, y_2, \dots$ [20, гл. I, §2]. В дальнейшем нам понадобятся следующие понятия:

Суммы Ньютона $p_k = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k$, $k = 1, 2, \dots$. Эти элементы являются алгебраически независимыми образующими Λ как коммутативной алгебры с единицей: $\Lambda = \mathbb{R}[p_1, p_2, p_3, \dots]$.

Мономиальные функции m_λ , $\lambda \in \mathbb{K}$, которые определяются как $\sum y_{i_1}^{\lambda_1} \dots y_{i_{\ell(\lambda)}}^{\lambda_{\ell(\lambda)}}$, где суммирование ведется по всем *различным мономам*, а индексы $i_1, \dots, i_{\ell(\lambda)}$ пробегает попарно различные значения от 1 до ∞ , а также их кратные¹⁾ вида $\mathbf{m}_\lambda := (\prod_{k \geq 1} [\lambda : k]!) m_\lambda$, которые можно рассматривать как аналогичные суммы $\sum y_{i_1}^{\lambda_1} \dots y_{i_{\ell(\lambda)}}^{\lambda_{\ell(\lambda)}}$ по всем *наборам попарно различных индексов* $i_1, \dots, i_{\ell(\lambda)}$ от 1 до ∞ . Рассмотрение функций $\mathbf{m}_\lambda$ вместо m_λ в некоторых случаях удобней. Каждая из систем $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ и $\{\mathbf{m}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ является базисом для Λ как линейного пространства над $\mathbb{R}$.

Факториальные функции m_λ^* и $\mathbf{m}_\lambda^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, которые получаются из m_λ и $\mathbf{m}_\lambda$ соответственно заменой каждой степени переменного y_i^k на факториальную степень $y_i^{\downarrow k}$. Однородные части функций m_λ^* и $\mathbf{m}_\lambda^*$ максимальной суммарной степени $|\lambda|$ равны соответственно m_λ и $\mathbf{m}_\lambda$. Каждая из систем $\{m_\lambda^*\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ и $\{\mathbf{m}_\lambda^*\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ также является базисом Λ как линейного пространства над $\mathbb{R}$.

Пусть $I := (p_1 - 1)\Lambda$ есть главный идеал в Λ , порожденный элементом $p_1 - 1$. Положим $\Lambda^\circ := \Lambda/I$. Каждому элементу $f \in \Lambda$ соответствует образ в Λ° , обозначим его через f° . В частности, $p_1^\circ = 1$ и Λ° является коммутативной алгеброй с единицей, свободно порожденной элементами p_k° , $k = 2, 3, \dots$. Кроме того,

$$\Lambda = \mathbb{R}[p_1, p_2, p_3, \dots] = I \oplus \mathbb{R}[p_2, p_3, \dots],$$

¹⁾ Называемые также *аугментированными мономиальными функциями*.

а значит, $\Lambda^\circ \cong \mathbb{R}[p_2, p_3, \dots]$. Легко проверить, что базис последней алгебры над $\mathbb{R}$ — это $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{K}, [\lambda:1]=0}$. Поэтому $\mathbb{R}$ -базисом в Λ° является система $\{m_\lambda^\circ\}_{\lambda \in \mathbb{K}, [\lambda:1]=0}$.

2.2. Симплекс Кингмана и моментные координаты. Во введении был определен симплекс Кингмана (1). Это компактное метризуемое и сепарабельное пространство в топологии покоординатной сходимости, которая и будет использоваться. В нем выделим плотное подмножество $\bar{\nabla}_\infty := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \bar{\nabla}_\infty : \sum_{i=1}^\infty x_i = 1\}$. Эти обозначения следуют работе [4]. Через $C(\bar{\nabla}_\infty)$ обозначим алгебру вещественных непрерывных на $\bar{\nabla}_\infty$ функций (относительно поточечных операций) с супремум-нормой.

Каждой точке $x \in \bar{\nabla}_\infty$ соответствует вероятностная мера

$$\nu_x := \sum_{i=1}^\infty x_i \delta_{x_i} + \gamma(x) \delta_0$$

на отрезке $[0, 1]$, где δ_s означает меру Дирака в точке s и $\gamma(x) := 1 - \sum_{i=1}^\infty x_i$. Через $q_k(x)$ обозначим k -й момент меры ν_x :

$$q_k(x) := \int_0^1 u^k \nu_x(du) = \sum_{i=1}^\infty x_i^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это непрерывные функции на $\bar{\nabla}_\infty$, поскольку для каждого $i = 1, 2, \dots$ выполнено $x_i \leq i^{-1}$. Стоит отметить, что функция $\gamma(x)$ не является непрерывной на $\bar{\nabla}_\infty$. Кроме того, $q_k(x)$, $k \geq 1$, разделяют точки симплекса $\bar{\nabla}_\infty$ (поскольку мера на $[0, 1]$ однозначно определяется своими моментами) и являются алгебраически независимыми. По аналогии с работой [2] $q_1(x), q_2(x), \dots$ назовем *моментными координатами* точки $x \in \bar{\nabla}_\infty$.

Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{R}[q_1, q_2, \dots]$ — коммутативная алгебра с единицей, порожденная моментными координатами. По теореме Стоуна–Вейерштрасса она является плотной подалгеброй в $C(\bar{\nabla}_\infty)$.

2.3. Симметрические функции на симплексе. Теорема Кингмана. Соответствие $p_2^\circ \rightarrow q_1(x), p_3^\circ \rightarrow q_2(x), \dots$ устанавливает изоморфизм алгебры Λ° , введенной в разд. 2.1, на алгебру $\mathcal{F}$ из разд. 2.2. Таким образом, каждому элементу $f^\circ \in \Lambda^\circ$ соответствует непрерывная функция на $\bar{\nabla}_\infty$, которую мы обозначим через $f^\circ(x)$. В частности, $p_k^\circ(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i^k$, $k = 2, 3, \dots$, и $p_1^\circ(x) \equiv 1$.

Приведем формулировку предельной теоремы Кингмана для структур разбиений. Рассмотрим для $n = 1, 2, \dots$ вложения

$$\iota_n: \mathbb{K}_n \hookrightarrow \bar{\nabla}_\infty, \quad \iota_n: (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \mapsto \left(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_\ell}{n}, 0, 0, \dots \right) \in \bar{\nabla}_\infty,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{K}_n$. Следующее замечание будет полезно в §4.

Замечание 2.1. Образы $\iota_n(\mathbb{K}_n)$ аппроксимируют пространство $\bar{\nabla}_\infty$ в том смысле, что каждое открытое множество в $\bar{\nabla}_\infty$ имеет непустое пересечение с $\iota_n(\mathbb{K}_n)$ для всех достаточно больших n .

Теорема 2.2 ([19], [16]). Для любой структуры разбиений $\{M_n\}$ на $\mathbb{K}$ существует борелевская вероятностная мера P на $\bar{\nabla}_\infty$ (называемая *граничной*

мерой этой структуры разбиений), такая, что

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n(M_n).$$

И обратно, любая структура разбиений может быть восстановлена по своей граничной мере следующим образом:

$$M_n(\lambda) = g(\lambda) \int_{\bar{\nabla}_\infty} m_\lambda^\circ(x) P(dx) \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{K}_n.$$

Таким образом, структуры разбиений на $\mathbb{K}$ и борелевские вероятностные меры на $\bar{\nabla}_\infty$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Структуре разбиений Ювенса–Питмана (разд. 1.3) с параметрами α и θ , лежащими в основной или вырожденной серии, соответствует хорошо известная мера Пуассона–Дирихле $PD(\alpha, \theta)$. Мера $PD(\alpha, \theta)$ сосредоточена на плотном подмножестве $\nabla_\infty \subset \bar{\nabla}_\infty$ (определение ∇_∞ см. в разд. 2.2), см., например, [21], [24].

§3. Действие переходных операторов цепей вверх/вниз на симметрические функции

В этом параграфе предполагается, что параметры α и θ лежат в основной серии. Сначала введем некоторые дополнительные обозначения.

Для любого множества $\mathcal{X}$ обозначим через $\text{Fun}(\mathcal{X})$ алгебру вещественных функций на $\mathcal{X}$ с поточечными операциями.

Рассмотрим вложение алгебры симметрических функций Λ в алгебру $\text{Fun}(\mathbb{K})$, определенное на образующих p_k , $k = 1, 2, \dots$, следующим образом: $p_k \rightarrow p_k(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^k$. Таким образом, каждому элементу $f \in \Lambda$ соответствует функция из $\text{Fun}(\mathbb{K})$, которую мы обозначим через $f(\lambda)$.

Для $f \in \Lambda$ обозначим через f_n ограничение функции $f(\cdot) \in \text{Fun}(\mathbb{K})$ на $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$. Легко проверить, что подалгебра $\Lambda \subset \text{Fun}(\mathbb{K})$ разделяет точки, а следовательно, функции вида f_n , $f \in \Lambda$, исчерпывают (конечномерное) пространство $\text{Fun}(\mathbb{K}_n)$.

Цель этого параграфа — доказать следующее предложение, которое будет необходимо для доказательства леммы 4.1 ниже.

Предложение 3.1. *Рассмотрим переходный оператор n -й марковской цепи вверх/вниз $T_n: \text{Fun}(\mathbb{K}_n) \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}_n)$, соответствующий двухпараметрической структуре разбиений Ювенса–Питмана. Его действие на функции $\mathbf{m}_\mu^*$, $\mu \in \mathbb{K}$, имеет вид¹⁾*

$$\begin{aligned} (T_n - \mathbf{1})(\mathbf{m}_\mu^*)_n &= -\frac{|\mu|(|\mu| - 1 + \theta)}{(n+1)(n+\theta)}(\mathbf{m}_\mu^*)_n \\ &\quad + \frac{n+1-|\mu|}{(n+1)(n+\theta)} \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i \geq 2}}^{\ell(\mu)} \mu_i(\mu_i - 1 - \alpha)(\mathbf{m}_{\mu - \square(\mu_i)}^*)_n \\ &\quad + \frac{n+1-|\mu|}{(n+1)(n+\theta)} [\mu : 1](\theta + \alpha(\ell(\mu) - 1))(\mathbf{m}_{\mu - \square(1)}^*)_n. \end{aligned}$$

¹⁾Здесь и далее $\mathbf{1}$ означает тождественный оператор.

Замечание 3.2. Предложение утверждает, что $(T_n - 1)(\mathbf{m}_\mu^*)_n$ представляет собой линейную комбинацию функции $(\mathbf{m}_\mu^*)_n$ (первое слагаемое правой части) и функций вида $(\mathbf{m}_\kappa^*)_n$ по всем κ , таким, что $\kappa \nearrow \mu$. Сумма по i в правой части описывает κ той же длины, что и μ . Заметим, что она содержит повторяющиеся слагаемые, если μ имеет одинаковые строки длины ≥ 2 . Последнее слагаемое отлично от нуля, если $[\mu : 1] > 0$, и в этом случае соответствует диаграмме $\kappa = \mu - \square(1)$, полученной из μ выкидыванием строки длины 1.

Приведем две вспомогательные формулы, касающиеся факториальных функций и чисел путей $g(\mu, \lambda)$, определенных в разд. 1.1. Эти формулы используются ниже для доказательства предложения 3.1. Пусть $|\lambda| = n \geq m = |\mu|$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Тогда

$$\frac{g(\mu, \lambda)}{g(\lambda)} = \frac{(m_\mu^*)_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})}{n(n-1) \cdots (n-m+1)} \quad (6)$$

и

$$g(\mu, \lambda) = \sum_{\kappa: \kappa \nearrow \lambda} \kappa(\kappa, \lambda) g(\mu, \kappa). \quad (7)$$

Формула (6) может быть проверена непосредственно, а (7) вытекает из определения чисел $g(\mu, \lambda)$ и $\kappa(\kappa, \lambda)$, см. разд. 1.1.

Для доказательства предложения 3.1 представим оператор T_n в виде композиции операторов «вниз» $D_{n+1,n}: \text{Fun}(\mathbb{K}_n) \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}_{n+1})$ и «вверх» $U_{n,n+1}: \text{Fun}(\mathbb{K}_{n+1}) \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}_n)$, действующих на функции.

Оператор $D_{n+1,n}$ строится по переходным вероятностям вниз и не зависит от параметров α и θ , в то время как оператор $U_{n,n+1}$ строится по переходным вероятностям вверх и от параметров зависит:

$$\begin{aligned} (D_{n+1,n}f_n)(\lambda) &:= \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} p^\downarrow(\lambda, \mu) f_n(\mu), & \lambda \in \mathbb{K}_{n+1}, \\ (U_{n,n+1}f_{n+1})(\mu) &:= \sum_{\lambda: \lambda \searrow \mu} p^\uparrow(\mu, \lambda) f_{n+1}(\lambda), & \mu \in \mathbb{K}_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти операторы являются сопряженными к соответствующим операторам, действующим на меры. Последние операторы действуют в соответствии со своими названиями, например, $D_{n+1,n}^*: \mathcal{M}(\mathbb{K}_{n+1}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{K}_n)$, где $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ — меры на пространстве $\mathcal{X}$.

Из определения n -й марковской цепи вверх/вниз (разд. 1.2) следует, что $T_n = U_{n,n+1} \circ D_{n+1,n}: \text{Fun}(\mathbb{K}_n) \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}_n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Предложение 3.1 является простым следствием такой леммы:

Лемма 3.3. (1) Существует единственный оператор $\tilde{D}: \Lambda \rightarrow \Lambda$, такой, что для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $f \in \Lambda$ выполняется равенство

$$D_{n+1,n}f_n = \frac{1}{n+1}(\tilde{D}f)_{n+1}.$$

В базисе $\{\mathbf{m}_\mu^*\}_{\mu \in \mathbb{K}}$ алгебры Λ этот оператор имеет вид

$$\tilde{D}\mathbf{m}_\mu^* = (p_1 - |\mu|)\mathbf{m}_\mu^*. \quad (9)$$

(2) Существует единственный оператор $\tilde{U}: \Lambda \rightarrow \Lambda$, такой, что для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $h \in \Lambda$

$$U_{n,n+1}h_{n+1} = \frac{1}{n+\theta}(\tilde{U}h)_n.$$

В базисе $\{\mathbf{m}_\mu^*\}_{\mu \in \mathbb{K}}$ алгебры Λ этот оператор имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}\mathbf{m}_\mu^* &= (p_1 + \theta + |\mu|)\mathbf{m}_\mu^* + \sum_{\substack{i=1 \\ \mu_i \geq 2}}^{\ell(\mu)} \mu_i(\mu_i - 1 - \alpha)\mathbf{m}_{\mu - \square(\mu_i)}^* \\ &\quad + [\mu : 1](\theta + \alpha(\ell(\mu) - 1))\mathbf{m}_{\mu - \square(1)}^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что в правой части формулы (10) стоит сумма, аналогичная той, которая поясняется в замечании 3.2.

Доказательство. (1) Будем использовать связь (6) факториальных функций с числами путей $g(\mu, \lambda)$ и рекуррентные соотношения (7) для последних.

Пусть $\mu \in \mathbb{K}$, $\nu \in \mathbb{K}_{n+1}$. Мы предполагаем, что $n \geq |\mu|$, в противном случае $(m_\mu^*)_n = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (D_{n+1,n}(m_\mu^*)_n)(\nu) &= \sum_{\lambda: \lambda \nearrow \nu} p^\downarrow(\nu, \lambda)(m_\mu^*)_n(\lambda) = \sum_{\lambda: \lambda \nearrow \nu} \frac{g(\lambda)}{g(\nu)} \kappa(\lambda, \nu)(m_\mu^*)_n(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda: \lambda \nearrow \nu} \frac{g(\lambda)}{g(\nu)} \kappa(\lambda, \nu) n^{\downarrow|\mu|} \frac{g(\mu, \lambda)}{g(\lambda)} = \frac{n^{\downarrow|\mu|}}{g(\nu)} \sum_{\lambda: \lambda \nearrow \nu} \kappa(\lambda, \nu) g(\mu, \lambda) \\ &= n^{\downarrow|\mu|} \frac{g(\mu, \nu)}{g(\nu)} = \frac{n+1-|\mu|}{n+1} (m_\mu^*)_{n+1}(\nu). \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $\mu \in \mathbb{K}$

$$D_{n+1,n}(m_\mu^*)_n = \frac{1}{n+1}((p_1 - |\mu|)m_\mu^*)_{n+1},$$

поскольку функция p_1 на $\mathbb{K}_{n+1}$ тождественно равна $n+1$. Значит, оператор $\tilde{D}$ существует и в базисе $\{\mathbf{m}_\mu^*\}_{\mu \in \mathbb{K}}$ имеет вид $\tilde{D}m_\mu^* = (p_1 - |\mu|)m_\mu^*$. Умножив обе части на $\prod_{k \geq 1} [\mu : k]!$, получим искомое выражение (9) для оператора $\tilde{D}$ в базисе $\{\mathbf{m}_\mu^*\}_{\mu \in \mathbb{K}}$. Единственность оператора $\tilde{D}$ следует из того, что Λ инъективно отображается в $\text{Fun}(\mathbb{K})$.

(2) Фиксируем $\mu \in \mathbb{K}$ и положим $l := \ell(\mu)$. Пусть $\nu \in \mathbb{K}_n$. Есть явная формула

$$(\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) = \sum \nu_{j_1}^{\downarrow \mu_1} \cdots \nu_{j_l}^{\downarrow \mu_l},$$

где суммирование ведется по всем попарно различным $j_1, \dots, j_l$ от 1 до $\ell(\nu)$, и поэтому существует возможность доказать (10) непосредственно.

Из определения (8) оператора $U_{n,n+1}$ и вида переходных вероятностей вверх для структуры разбиений Ювенса–Питмана (разд. 1.3) имеем

$$\begin{aligned} (U_{n,n+1}(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1})(\nu) &= \frac{1}{n+\theta} \left[\sum_{i=1}^{\ell(\nu)} (\nu_i - \alpha)(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(\nu_i + 1)) \right. \\ &\quad \left. + (\theta + \ell(\nu)\alpha)(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(1)) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем правую часть, чтобы получить (10).

1. Сначала отметим два простых свойства:

$$1a. \quad (a+1)^{\downarrow b} - a^{\downarrow b} = b \cdot a^{\downarrow(b-1)}; \quad 1b. \quad a \cdot a^{\downarrow b} = a^{\downarrow(b+1)} + b \cdot a^{\downarrow b}.$$

2. Для произвольных $c \in \{1, \dots, l\}$ и $i \in \{1, \dots, \ell(\nu) + 1\}$ положим

$$S_c(i) := \sum \nu_{j_1}^{\downarrow \mu_1} \dots \nu_{j_{c-1}}^{\downarrow \mu_{c-1}} \nu_{j_c+1}^{\downarrow \mu_{c+1}} \dots \nu_{j_l}^{\downarrow \mu_l},$$

где суммирование ведется по всем попарно различным $j_1, \dots, j_{c-1}, j_{c+1}, \dots, j_l$, которые пробегает множество $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, \ell(\nu) + 1\}$.

3. Разберемся с отдельным слагаемым в правой части (11). Покажем, что

$$(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(1)) = (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) + [\mu : 1](\mathbf{m}_{\mu - \square(1)}^*)_n(\nu). \quad (12)$$

Ясно, что $(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(1)) = \sum (\nu + \widehat{\square}(1))^{\downarrow \mu_1}_{j_1} \dots (\nu + \widehat{\square}(1))^{\downarrow \mu_l}_{j_l}$, где суммирование ведется по всем попарно различным наборам $j_1, \dots, j_l$ от 1 до $\ell(\nu) + 1$. Представим $(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(1))$ в виде $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где в Σ_1 входят слагаемые, для которых $j_1, \dots, j_l \leq \ell(\nu)$, а в Σ_2 — (оставшиеся) слагаемые, для которых существует число $c \in \{1, \dots, l\}$, определяемое условием $j_c = \ell(\nu) + 1$. Легко видеть, что $\Sigma_1 = (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu)$. Запишем Σ_2 , группируя слагаемые с одинаковыми c :

$$\Sigma_2 = \sum_{c=1}^l 1^{\downarrow \mu_c} \cdot S_c(\ell(\nu) + 1) = [\mu : 1](\mathbf{m}_{\mu - \square(1)}^*)_n(\nu).$$

Первое равенство следует из того, что $(\nu + \widehat{\square}(1))^{\downarrow \mu_c}_{j_c} = 1^{\downarrow \mu_c}$ и $(\nu + \widehat{\square}(1))_{j_k} = \nu_{j_k}$ для $k \neq c$, а второе — из того, что $1^{\downarrow b} = 0$, если $b \geq 2$, и $1^{\downarrow 1} = 1$. Таким образом, (12) установлено.

4. Теперь разберемся с суммой по i в правой части (11).

Сначала зафиксируем i от 1 до $\ell(\nu)$. Аналогично п. 3 имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) &= \sum_{c=1}^l \nu_i^{\downarrow \mu_c} S_c(i) + \sum_{j_1, \dots, j_l \neq i} \nu_{j_1}^{\downarrow \mu_1} \dots \nu_{j_l}^{\downarrow \mu_l}, \\ (\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(\nu_i + 1)) &= \sum_{c=1}^l (\nu_i + 1)^{\downarrow \mu_c} S_c(i) + \sum_{j_1, \dots, j_l \neq i} \nu_{j_1}^{\downarrow \mu_1} \dots \nu_{j_l}^{\downarrow \mu_l}. \end{aligned}$$

Используя п. 1a, получаем

$$(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(\nu_i + 1)) - (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) = \sum_{c=1}^l \mu_c \nu_i^{\downarrow(\mu_c-1)} S_c(i).$$

Таким образом, сумма по i в правой части формулы (11) равна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l (\nu_i - \alpha)(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1}(\nu + \widehat{\square}(\nu_i + 1)) \\ = (|\nu| - \ell(\nu)\alpha)(\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) + \sum_{i=1}^{\ell(\nu)} \sum_{c=1}^l (\nu_i - \alpha) \mu_c \nu_i^{\downarrow(\mu_c-1)} S_c(i). \end{aligned}$$

Фиксируем c от 1 до l . Используя п. 1b, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\ell(\nu)} (\nu_i - \alpha) \mu_c \nu_i^{\downarrow(\mu_c-1)} S_c(i) \\ &= S_c(i) \left[\mu_c \sum_{i=1}^{\ell(\nu)} \nu_i^{\downarrow \mu_c} + \mu_c (\mu_c - 1) \sum_{i=1}^{\ell(\nu)} \nu_i^{\downarrow(\mu_c-1)} - \alpha \mu_c \sum_{i=1}^{\ell(\nu)} \nu_i^{\downarrow(\mu_c-1)} \right] \\ &= \begin{cases} \mu_c (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) + \mu_c (\mu_c - 1 - \alpha) (\mathbf{m}_{\mu-\square(\mu_c)})_n(\nu), & \text{если } \mu_c \geq 2, \\ (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) - \alpha (\ell(\nu) - (l-1)) (\mathbf{m}_{\mu-\square(1)})_n(\nu), & \text{если } \mu_c = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Комбинируя пп. 3 и 4 и вспоминая, что $|\nu| = n$ и $\ell(\mu) = l$, получаем

$$\begin{aligned} & (U_{n,n+1}(\mathbf{m}_\mu^*)_{n+1})(\nu) \\ &= (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) + \frac{1}{p_1(\nu) + \theta} \left[|\mu| (\mathbf{m}_\mu^*)_n(\nu) + \sum_{\substack{c=1 \\ \mu_c \geq 2}}^{\ell(\mu)} \mu_c (\mu_c - 1 - \alpha) (\mathbf{m}_{\mu-\square(\mu_c)})_n(\nu) \right. \\ & \quad \left. + [\mu : 1] (\theta + \alpha (\ell(\mu) - 1)) (\mathbf{m}_{\mu-\square(1)})_n(\nu) \right]. \end{aligned}$$

Это совпадает с искомым выражением (10). Единственность оператора $\tilde{U}$ вновь следует из того, что $\Lambda \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K})$ есть вложение. $\square$

§4. Сходимость марковских цепей вверх/вниз

В этом параграфе рассматривается предел марковских цепей T_n на $\mathbb{K}_n$ при $n \rightarrow \infty$ в случае, когда параметры α и θ лежат в основной серии. Этот предел является марковским процессом на $\overline{\mathbb{V}}_\infty$ с непрерывным временем и обозначается через $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$.

Доказательства в этом параграфе используют результаты книги [5]. Применение этих результатов базируется на алгебраических вычислениях §3 и аналогично рассуждениям в [2, §1]. В силу указанной аналогии доказательства, которые повторяют работу [2], не приводятся.

4.1. Построение процесса $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$. Сначала приведем некоторые необходимые обозначения.

Каждый оператор T_n действует в конечномерном пространстве функций $\text{Fun}(\mathbb{K}_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Эти пространства можно считать банаховыми с супремум-нормой $\|\cdot\|_n$. В разд. 2.3 были введены вложения $\iota_n: \mathbb{K}_n \hookrightarrow \overline{\mathbb{V}}_\infty$. Пусть π_n — соответствующие им проекции пространств функций:

$$(\pi_n(f))(\lambda) := f(\iota_n(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{K}_n, f \in C(\overline{\mathbb{V}}_\infty).$$

В §2 была введена плотная подалгебра $\mathcal{F} \subset C(\overline{\mathbb{V}}_\infty)$. Алгебра $\mathcal{F}$ допускает возрастающую фильтрацию конечномерными пространствами

$$\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \dots \subset \mathcal{F}, \quad \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}^m = \mathcal{F}.$$

Проще всего определить эту фильтрацию как образ фильтрации алгебры Λ по степеням полиномов (от формальных переменных y_i , см. разд. 2.1) при факторизации, поскольку $\mathcal{F} \cong \Lambda^\circ = \Lambda/(p_1 - 1)\Lambda$.

Из замечания 2.1 и того, что $\dim \mathcal{F}^m < \infty$, следует, что все проекции π_n являются взаимно однозначными на $\mathcal{F}^m$ (при фиксированном m) для всех достаточно больших n .

Докажем, что генераторы марковских цепей вверх/вниз сходятся к некоторому оператору A в пространстве $C(\bar{\nabla}_\infty)$.

Лемма 4.1. *При фиксированном m для всех достаточно больших n каждое подпространство $\pi_n(\mathcal{F}^m)$ является инвариантным относительно оператора T_n . С точностью до отождествления $\mathcal{F}^m = \pi_n(\mathcal{F}^m)$ существует предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(T_n - 1)f = Af \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F} \quad (13)$$

в каждом конечномерном пространстве $\mathcal{F}^m$. Таким образом, возникает оператор $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, для которого $A\mathcal{F}^m \subset \mathcal{F}^m$, $m \geq 0$. Действие этого оператора на функции $\mathbf{m}_\mu^\circ \in \Lambda^\circ \cong \mathcal{F}$, $\mu \in \mathbb{K}$ (определенные в §2), имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} A\mathbf{m}_\mu^\circ = & -|\mu|(|\mu| - 1 + \theta)\mathbf{m}_\mu^\circ + \sum_{\substack{c=1 \\ \mu_c \geq 2}}^{\ell(\mu)} \mu_c(\mu_c - 1 - \alpha)\mathbf{m}_{\mu - \square(\mu_c)}^\circ \\ & + [\mu : 1](\theta + \alpha(\ell(\mu) - 1))\mathbf{m}_{\mu - \square(1)}^\circ. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что A переводит функцию $\mathbf{m}_\emptyset^\circ \equiv 1$ в 0, как и должно быть.

Доказательство. Ясно, что для всех достаточно больших n пространство $\pi_n(\mathcal{F}^m)$ является линейной оболочкой функций $(\mathbf{m}_\mu^*)_n$, где $|\mu| \leq m$. Таким образом, свойство инвариантности $\pi_n(\mathcal{F}^m)$ относительно T_n следует из предложения 3.1, так как видно, что оператор T_n не повышает степень функций $(\mathbf{m}_\mu^*)_n \in \text{Fun}(\mathbb{K}_n)$ (которая равна $|\mu|$).

Таким образом, отождествляя $\pi_n(\mathcal{F}^m)$ с $\mathcal{F}^m$ (что имеет смысл для достаточно больших n при фиксированном m), мы можем говорить, что $\mathcal{F}^m$ инвариантны под действием T_n . Теперь можно одновременно провести доказательство формул (13) и (14).

Рассмотрим отображение $\Lambda \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}_n)$, $f \mapsto f_{[n]}$, где

$$f_{[n]}(\lambda) := \pi_n(f^\circ)(\lambda) = f^\circ\left(\frac{\lambda_1}{n}, \frac{\lambda_2}{n}, \dots, \frac{\lambda_{\ell(\lambda)}}{n}, 0, 0, \dots\right), \quad \lambda \in \mathbb{K}_n, f \in \Lambda.$$

Другими словами, функция $f_{[n]}$ на $\mathbb{K}_n$ определяется как ограничение непрерывной функции $f^\circ \in C(\bar{\nabla}_\infty)$ на $\iota_n(\mathbb{K}_n) \subset \bar{\nabla}_\infty$. Пусть $G_s: \Lambda \rightarrow \Lambda$ для любого $s > 0$ — автоморфизм алгебры Λ , определяемый на ее базисе формулой

$$G_s \mathbf{m}_\mu = s^{|\mu|} \mathbf{m}_\mu, \quad \mu \in \mathbb{K}.$$

На однородной компоненте степени¹⁾ k , $k = 0, 1, 2, \dots$, этот автоморфизм сводится к умножению на число s^k .

Тогда мы имеем следующее выражение для f_n , где $f \in \Lambda$:

$$f_n(\lambda) = (G_n f)_{[n]}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{K}_n. \quad (15)$$

¹⁾Однородная компонента степени k в алгебре Λ состоит из всех однородных симметрических функций степени k и является линейной оболочкой элементов $\mathbf{m}_\mu$, $|\mu| = k$.

Действительно, так как $\iota_n(\mathbb{K}_n) \subset \nabla_\infty$, то для всех $\varphi \in \Lambda$ и $\lambda \in \mathbb{K}_n$ значение $\varphi^\circ(\iota_n(\lambda)) = \varphi_{[n]}(\lambda)$ совпадает с результатом прямой подстановки координат точки $\iota_n(\lambda) = (\lambda_1/n, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}/n, 0, 0, \dots) \in \nabla_\infty$ в элемент $\varphi \in \Lambda$ (см. замечание 5.2 ниже). В §2 было отмечено, что однородная компонента наибольшей степени в $\mathbf{m}_\mu^*$ есть $\mathbf{m}_\mu$. Поэтому для всех $\mu \in \mathbb{K}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-|\mu|} G_n \mathbf{m}_\mu^* = \mathbf{m}_\mu.$$

Подставим выражение (15) для $f_n(\lambda)$ в формулу для $(T_n - \mathbf{1})(\mathbf{m}_\mu^*)_n$ из предложения 3.1, домножим результат на $n^{-|\mu|}$ и перейдем к пределу по n . Мы получим сходимость (13) операторов $n^2(T_n - \mathbf{1})$ к оператору $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, заданному формулой (14), в каждом конечномерном подпространстве¹⁾ $\mathcal{F}^m$, что и требовалось. $\square$

Заметим, что набор элементов $\mathbf{m}_\mu^0$, $\mu \in \mathbb{K}$, пространства $\mathcal{F}$ не является линейно независимым. Поэтому неочевидно, что (14) корректно задает A . Корректность следует из доказательства предыдущей леммы: из сходимости (13) вытекает существование оператора $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, действие которого на функции $\mathbf{m}_\mu^0$ задается формулой (14). Так как семейство $\mathbf{m}_\mu^0$, $\mu \in \mathbb{K}$, содержит базис пространства $\mathcal{F}$, (14) в самом деле корректно задает оператор в $\mathcal{F}$.

Теперь перейдем к сходимости дискретных полугрупп $\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \dots\}$ к непрерывной консервативной марковской полугруппе $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в банаховом пространстве $C(\overline{\nabla}_\infty)$, которая строится по оператору A . Напомним, что консервативной марковской полугруппой называется сильно непрерывная группа сжимающих операторов в $C(\overline{\nabla}_\infty)$, каждый из которых сохраняет положительные функции и константу 1.

Чтобы придать строгий смысл сходимости дискретных полугрупп к непрерывной, воспользуемся определением из [5, гл. 1, разд. 6]:

Определение 4.2. Будем говорить, что некая последовательность функций $\{f_n \in \text{Fun}(\mathbb{K}_n)\}$ сходится к функции $f \in C(\overline{\nabla}_\infty)$, если $\|f_n - \pi_n(f)\|_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\|\cdot\|_n$ — супремум-норма пространства $\text{Fun}(\mathbb{K}_n)$. В этом случае будем писать $f_n \rightarrow f$.

Для сходимости полугрупп $\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \dots\}$ к $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ необходимо сделать такое масштабное преобразование времени, чтобы один шаг n -й цепи вверх/вниз соответствовал малому интервалу времени порядка n^{-2} .

Предложение 4.3. (1) Оператор $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, определенный в лемме 4.1, является замыкаемым в пространстве $C(\overline{\nabla}_\infty)$.

(2) Замыкание $\overline{A}$ оператора A порождает консервативную марковскую полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $C(\overline{\nabla}_\infty)$.

(3) Дискретные полугруппы $\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \dots\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к полугруппе $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в том смысле, что

$$T_n^{[n^2 t]} \pi_n(f) \rightarrow T(t)f \quad \text{для всех } f \in \Lambda$$

(предел понимается в смысле определения 4.2) для всех $t \geq 0$ равномерно на ограниченных интервалах.

¹⁾Заметим, что операторы $n^2(T_n - \mathbf{1})$ могут быть определены на $\mathcal{F}^m$ (при фиксированном m , начиная с некоторого n) с использованием отождествления $\pi_n(\mathcal{F}^m) \subset \mathcal{F}^m$.

Предложение доказывается аналогично предложению 1.4 из [2], оно следует из сходимости генераторов (лемма 4.1). В доказательстве используется теорема 6.5 из [5, гл. 1], а также лемма 2.11 из [5, гл. 1].

Далее, из [5, гл. 4, теорема 2.7] сразу следует, что $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является полугруппой строго марковского семейства с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева для всех $t \geq 0$.

Оператор A будем называть *предгенератором* полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ и процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$. Таким образом, для каждой пары параметров α, θ из основной серии построен марковский процесс $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$, который может начинаться из любой точки и с любого начального вероятностного распределения.

4.2. Некоторые свойства процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$. В этом разделе формулируются и поясняются свойства процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$, которые аналогичны приведенным в работе [2].

Сначала сформулируем свойства этого процесса, которые являются прямыми следствиями его конструкции как предела конечных марковских цепей T_n , сохраняющих меры M_n на $\mathbb{K}_n$. Для их доказательства используется сходимость мер M_n (теорема Кингмана, разд. 2.3) и свойства цепей вверх/вниз (разд. 1.2).

Инвариантная мера (ср. [2, предложение 1.6]). *Распределение Пуассона–Дирихле $\text{PD}(\alpha, \theta)$ является инвариантной мерой для процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$.*

Это следует из того, что каждая цепь T_n сохраняет меру M_n .

Обратимость процесса (ср. [2, предложение 1.7 и теорема 7.3 (2)]). *Процесс $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ является обратимым относительно меры $\text{PD}(\alpha, \theta)$.*

Это следует из того, что каждая цепь T_n обратима относительно M_n .

Сходимость конечномерных распределений (ср. [2, предложение 1.8]). *Будем считать, что $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ и все цепи T_n начинаются с инвариантного распределения. Тогда все конечномерные распределения цепей T_n сходятся к конечномерным распределениям процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ при $n \rightarrow \infty$, если сделать масштабное преобразование времени, описанное перед предложением 4.3.*

Теперь приведем свойства, которые вытекают из представления предгенератора A процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}$ в виде (14).

Описание спектра марковского генератора в $L^2(\bar{\nabla}_\infty, \text{PD}(\alpha, \theta))$. *Предгенератор A действует в пространстве $\mathcal{F} \cong \Lambda^\circ$. Оно разлагается в ортогональную (по отношению к скалярному произведению в Λ° , унаследованному из $L^2(\bar{\nabla}_\infty, \text{PD}(\alpha, \theta))$) прямую сумму собственных подпространств оператора A . Спектр оператора A имеет вид*

$$\{0\} \cup \{-\sigma_m : m = 2, 3, \dots\}, \quad \sigma_m = m(m-1+\theta).$$

Собственное значение 0 является простым, а кратность каждого $-\sigma_m$ равна количеству разбиений числа m в сумму натуральных слагаемых, больших единицы.

Существование разложения пространства Λ° следует из того, что предгенератор A симметричен (см. обратимость процесса выше) и сохраняет фильтрацию $\{\mathcal{F}^m\}$ пространства $\mathcal{F} \cong \Lambda^\circ$ (см. (14)). Факты о структуре спектра вытекают из того, что оператор A является треугольным в базисе $\{\mathbf{m}_\mu^\circ\}_{\mu \in \mathbb{K}, [\mu]=1} = 0$, согласованном с фильтрацией $\{\mathcal{F}^m\}$.

Единственность инвариантной меры. *Мера $\text{PD}(\alpha, \theta)$ является единственной инвариантной мерой для процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$.*

Это доказывается аналогично теореме 7.3 (1) из [2].

Эргодичность. Процесс $X_{\alpha,\theta}(t)$ является эргодическим относительно меры $PD(\alpha, \theta)$.

Это утверждение следует из существования спектральной щели у генератора процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$, см. выше структуру спектра. Детальное доказательство дано в [2, теорема 7.3 (3)].

§5. Предгенератор A процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$ как дифференциальный оператор

Данный параграф посвящен более подробному изучению свойств предгенератора $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, который определяется в лемме 4.1. В разд. 5.1 и разд. 5.2 предполагается, что параметры α и θ лежат в основной серии. В разд. 5.3 рассматриваются вырожденные значения параметров.

5.1. Предгенератор A в естественных координатах. Напомним, что процесс $X_{\alpha,\theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$ имеет генератор $\bar{A}$, являющийся замыканием предгенератора $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Алгебра $\mathcal{F} \cong \Lambda^\circ$ определяется в §2, а оператор A задается формулой (14) в ее базисе $\{\mathbf{m}_\mu^\circ\}_{\mu \in \mathbb{K}, [\mu:1]=0}$. Оказывается, что в этом базисе оператор A может быть записан как дифференциальный оператор второго порядка в естественных координатах $x_1, x_2, \dots$ на $\bar{\nabla}_\infty$. Сначала представим $\mathbf{m}_\mu^\circ(x)$ в этих координатах.

Предложение 5.1. Для всех $\mu \in \mathbb{K}$, $[\mu:1] = 0$, функция $\mathbf{m}_\mu^\circ(x)$ на $\bar{\nabla}_\infty$ может быть записана в виде

$$\mathbf{m}_\mu^\circ(x) = \sum_{i_1, \dots, i_{\ell(\mu)}} x_{i_1}^{\mu_1} \cdots x_{i_{\ell(\mu)}}^{\mu_{\ell(\mu)}}, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \bar{\nabla}_\infty,$$

где суммирование ведется по всем попарно различным индексам $i_1, \dots, i_{\ell(\mu)}$ от единицы до бесконечности.

Отметим, что если $[\mu:1] > 0$ и $\sum_{i=1}^\infty x_i < 1$, то это утверждение неверно.

Доказательство. Предложение является частным случаем следующего более общего результата (принадлежащего Керову [15]), который позволяет вычислить любую функцию $\mathbf{m}_\lambda^\circ$, $\lambda \in \mathbb{K}$, в любой точке $x \in \bar{\nabla}_\infty$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots)$ для $f \in \Lambda$ означает результат формальной подстановки координат точки x в функцию f . Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $[\lambda:1] = r \geq 0$. Тогда [15]

$$\mathbf{m}_\lambda^\circ(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (\gamma(x))^k \mathbf{m}_{\lambda-k \cdot \square(1)}(x_1, x_2, \dots), \quad x \in \bar{\nabla}_\infty.$$

Здесь $\mathbf{m}_\lambda^\circ(x)$ — значение функции $\mathbf{m}_\lambda^\circ$ в точке x , построенное в §2 путем факторизации алгебры Λ , $\gamma(x) = 1 - \sum_{i=1}^\infty x_i$ и $\lambda - k \cdot \square(1)$ — диаграмма, полученная из λ выкидыванием k строк длины 1. $\square$

Замечание 5.2. Из доказательства следует, что для любой функции φ из нефакторизованной алгебры Λ функция $\varphi^\circ(x)$ на $\bar{\nabla}_\infty$ может быть построена не только путем факторизации алгебры Λ , как объяснено в §2, но и непосредственно. А именно, для каждой точки $x \in \nabla_\infty$ (где $\sum_{i=1}^\infty x_i = 1$) положим $\varphi^\circ(x)$ равным результату формальной подстановки координат точки $x = (x_1, x_2, \dots)$ в симметрическую функцию $\varphi \in \Lambda$. На весь симплекс $\bar{\nabla}_\infty$ функция $\varphi^\circ(x)$ продолжается по непрерывности. Этот способ подсказан комментарием после формулы (2.10) в [4].

Теперь нетрудно вычислить предгенератор A в естественных координатах. Пусть D обозначает следующее формальное выражение:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{\infty} (\theta x_i + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (16)$$

Легко проверить, используя предложение 5.1 и (14), что $Dm_{\mu}^{\circ} = Am_{\mu}^{\circ}$ для всех $\mu \in \mathbb{K}$ с условием $[\mu : 1] = 0$. Поэтому $Df = Af$ для всех $f \in \mathcal{F} \subset C(\overline{\nabla}_{\infty})$, и, таким образом, формула (3) из введения установлена.

Замечание 5.3. Правую часть формулы (16) можно понимать следующими двумя эквивалентными способами. Пусть $f \in \mathcal{F}$ и требуется вычислить Df . Тогда можно либо

(1) разложить f по базису $\{\mathbf{m}_{\mu}^{\circ}\}_{\mu \in \mathbb{K}, [\mu:1]=0}$ алгебры $\mathcal{F}$ и применить оператор $D = A$ отдельно к каждому $\mathbf{m}_{\mu}^{\circ}$, либо

(2) вычислить $Af(x)$ сначала для $x \in \nabla_{\infty}$ путем прямого применения правой части формулы (16), а затем продолжить $Af(x)$ на $x \in \overline{\nabla}_{\infty}$ по непрерывности (ср. этот способ с замечанием 5.2).

Замечание 5.4. Существует соблазн применять D (правую часть формулы (16)) к функциям f , не лежащим в $\mathcal{F}$. Однако если для некоторой функции $f \in C(\overline{\nabla}_{\infty})$ выражение Df имеет смысл, не очевидно, что f обязана лежать в области определения генератора $\overline{A}$, и совсем не очевидно, что выражение Df должно совпадать с $\overline{A}f$.

Рассмотрим пример $f = x_1 + \alpha/\theta$, $\theta \neq 0$. Ясно, что $Df = -\theta f$. Если бы выполнялось равенство $Df = \overline{A}f$, то f была бы собственной функцией генератора $\overline{A}$ с собственным значением $-\theta$. Поскольку $f \in L^2(\overline{\nabla}_{\infty}, \text{PD}(\alpha, \theta))$ и $-\theta$ не является собственным значением оператора $\overline{A}$ в этом пространстве (см. разд. 4.2), получаем противоречие.

В работе [27] показано, что при $\alpha = 0$ функция $f = x_1$ лежит в области определения формы Дирихле, соответствующей оператору $\overline{A}$, а стало быть, в области определения оператора $\overline{A}^{1/2}$. Оставляя в стороне вопрос о том, лежит ли $f = x_1 + \alpha/\theta$ (а стало быть, и координатная функция x_1) в области определения оператора $\overline{A}$, можно заключить, что равенство $Df = \overline{A}f$ невозможно.

Эти рассуждения объясняют следующий кажущийся парадокс. Если рассматривать правую часть формулы (16) как генератор диффузионного процесса (аналогично конечномерной ситуации), то получится, что вектор сноса в точке $x = (0, 0, \dots)$ равен $(-\alpha, -\alpha, \dots)$, т.е. направлен «во вне» симплекса $\overline{\nabla}_{\infty}$. Но действие генератора $\overline{A}$ на координатные функции $x_1, x_2, \dots$ заведомо не дается правой частью формулы (16). Поэтому в нашей ситуации нельзя интерпретировать коэффициенты при первых производных в (16) как координаты вектора сноса.

5.2. Предгенератор A в моментных координатах. Сначала приведем следующее определение.

Пусть дана коммутативная алгебра. Будем говорить, что каждый оператор умножения на элемент этой алгебры имеет нулевой порядок. Будем говорить, что оператор Q имеет порядок $n \geq 1$, если его коммутатор с любым оператором умножения на элемент алгебры имеет порядок $n - 1$.

Лемма 5.5. *Предгенератор A является оператором второго порядка в алгебре $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Требуется показать, что $[[[A, H_1], H_2], H_3]f(x) = 0$ для всех $h_1, h_2, h_3, f \in \mathcal{F}$ и $x \in \overline{\nabla}_\infty$, где H_j означает оператор умножения на h_j , $j = 1, 2, 3$.

Из п. (2) замечания 5.3 следует, что это равенство выполнено для всех $x \in \nabla_\infty$. Действительно, в этом случае оператор A действует согласно правой части формулы (16), и в силу линейности достаточно сослаться на то, что

$$[[[\partial^2/\partial x_i \partial x_j, H_1], H_2], H_3]f(x) = 0 \quad \text{и} \quad [[[\partial/\partial x_i, H_1], H_2], H_3]f(x) = 0$$

для всех $1 \leq i, j < \infty$.

Для произвольных $x \in \overline{\nabla}_\infty$ утверждение верно по непрерывности. $\square$

В силу того что моментные координаты $q_1, q_2, \dots$ являются алгебраически независимыми образующими алгебры $\mathcal{F}$, а оператор A имеет второй порядок, его действие в $\mathcal{F}$ полностью определяется значениями $A1, Aq_i, A(q_i q_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Ясно, что $q_i q_j = q_{i+j+1} + \mathbf{m}_{(i+1, j+1)}^\circ$, $i \geq j$. Используя (14) (или, что эквивалентно, (16) вместе с замечаниями 5.2 и 5.3), получаем, что

$$A1 = 0,$$

$$Aq_i = -(i+1)(i+\theta)q_i + (i+1)(i-\alpha)q_{i-1},$$

$$A(q_i q_j) = q_i Aq_j + q_j Aq_i + 2(i+1)(j+1)(q_{i+j} - q_i q_j),$$

где принято соглашение $q_0 = 1$.

Заметим, что правая часть формулы (2) действует на функции $1, q_i$ и $q_i q_j$, $i, j = 1, 2, \dots$, точно так же, как выписано выше, и поэтому оператор A можно записать в виде (2). Данный вид предгенератора A позволяет показать, что почти все траектории процесса $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ непрерывны. Это можно доказать так же, как следствие 6.4 и теорему 7.1 в [2].

5.3. Вырожденные значения параметров. Отметим, что происходит, когда параметры α и θ лежат в вырожденной серии. Рассмотрим конечномерный упорядоченный симплекс

$$\nabla_N := \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 \geq \dots \geq x_N \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 1 \right\}, \quad N = 2, 3, \dots$$

Можно мыслить ∇_N как подмножество в $\nabla_\infty \subset \overline{\nabla}_\infty$. Мера $\text{PD}(\alpha, \theta)$ сосредоточена на ∇_∞ при всех значениях α и θ , лежащих в основной или вырожденной серии.

Предложение 5.6 [25, с. 62]. *При $\alpha = -\beta < 0$ и $\theta = N\beta$ мера $\text{PD}(-\beta, N\beta)$ сосредоточена на $\nabla_N \subset \overline{\nabla}_\infty$. Она совпадает с мерой на ∇_N , которая имеет следующую плотность относительно меры Лебега:*

$$\text{PD}(-\beta, N\beta)(dx) = \frac{N! \Gamma(N\beta)}{(\Gamma(\beta))^N} x_1^{\beta-1} \dots x_N^{\beta-1} dx_1 \dots dx_{N-1}.$$

Кроме того, при $\beta \rightarrow +0$, $N \rightarrow +\infty$ и $N\beta \rightarrow \eta > 0$ имеет место слабая сходимость мер на $\overline{\nabla}_\infty$: $\text{PD}(-\beta, N\beta) \rightarrow \text{PD}(0, \eta)$.

Оказывается, данный результат распространяется и на процесс $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$. Для начала напомним, какие диффузионные процессы рассматриваются на конечномерном симплексе ∇_N .

Нас будут интересовать процессы, называемые в [4] *диффузионными аппроксимациями популяционной модели Райта–Фишера с симметричной мутацией*, которые рассматривались также, например, в [30] и [12]. Детальное построение более общих конечномерных диффузий, связанных с популяционной генетикой, см. также в [5, гл. 10].

Пусть $\mathcal{F}_N = \mathbb{R}[q_1, \dots, q_{N-1}]$ — коммутативная алгебра с единицей, свободно порожденная моментными координатами $q_k(x) = \sum_{i=1}^N x_i^{k+1}$ на ∇_N , $k = 1, \dots, N-1$. Ясно, что $\mathcal{F}_N \subset C(\nabla_N)$ — плотная подалгебра. Для каждого значения параметра $\eta > 0$ определим в ней оператор

$$A_{N,\eta} := \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^N x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\eta}{N-1} \sum_{i=1}^N (1 - Nx_i) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (17)$$

Заметим, что этот оператор (в отличие от своего бесконечномерного аналога из разд. 5.1) можно сразу определить по той же формуле на более широком подпространстве в $C(\nabla_N)$. Оно состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций с некоторыми граничными условиями, см. [4, (2.8)]. Обозначим это расширение через $\tilde{A}_{N,\eta}$.

Предложение 5.7 [4]. (1) Оператор $\tilde{A}_{N,\eta}$ (а стало быть, и $A_{N,\eta}$) замыкаем в $C(\nabla_N)$. Обозначим через $\bar{A}_{N,\eta}$ его замыкание (а стало быть, и замыкание оператора $A_{N,\eta}$).

(2) Замыкание $\bar{A}_{N,\eta}$ порождает диффузионный процесс (т.е. строго марковское семейство с непрерывными траекториями) на ∇_N .

(3) Этот процесс сохраняет меру $\text{PD}(-\frac{\eta}{N-1}, \frac{N\eta}{N-1})$, определенную выше, и обратим относительно нее.

Обозначим этот процесс через $\mathbf{Y}_{N,\eta}(t)$.

Предложение 5.8 [4, теорема 2.5]. При $N \rightarrow \infty$ процессы $\mathbf{Y}_{N,\eta}(t)$ сходятся¹⁾ к процессу $\mathbf{X}_{0,\eta}(t)$, построенному в §4.

Оказывается, что можно рассматривать процесс $\mathbf{X}_{\alpha,\theta}(t)$, построению и изучению которого посвящена данная работа, и при вырожденных значениях параметров. Для начала опишем, как надо модифицировать марковские цепи вверх/вниз.

Пусть $\mathbb{K}(N)$ состоит из всех диаграмм $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\ell(\lambda) \leq N$. Это снова градуированный граф. Пусть $\alpha = -\beta$, $\theta = N\beta$. В этом случае каждая из мер M_n , определенных в разд. 1.3, положительна всюду на $\mathbb{K}_n(N) := \mathbb{K}(N) \cap \mathbb{K}_n$. Таким образом, можно рассматривать цепи вверх/вниз на $\mathbb{K}_n(N)$ аналогично разд. 1.2. Роль алгебры Λ будет играть Λ_N — алгебра симметрических функций от N переменных. Ясно, что $\Lambda_N/I \cong \mathcal{F}_N$, где $I = (p_1 - 1)\Lambda_N$ — идеал алгебры Λ_N (см. §2). Вложения ι_n , определенные в разд. 2.3, теперь отображают $\mathbb{K}_n(N)$ в ∇_N .

¹⁾В определенном смысле, который объясняется в [4, теорема 2.5].

Предложение 5.9. (1) Пусть $T_n(N)$ — производящий оператор n -й марковской цепи вверх/вниз. В том же смысле, что и в лемме 4.1, имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(T_n(N) - 1)f = A_{N, \beta(N-1)}f \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}_N.$$

(2) Дискретные полугруппы $\{1, T_n(N), T_n^2(N), \dots\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся (в том же смысле, что в предложении 4.3) к непрерывной полугруппе в пространстве $C(\nabla_N)$, порожденной оператором $\bar{A}_{N, \beta(N-1)}$.

Таким образом, естественно считать, что процесс $\mathbf{X}_{-\beta, N\beta}(t)$ совпадает с $\mathbf{Y}_{N, \beta(N-1)}(t)$, т.е. является конечномерным диффузионным процессом в ∇_N с предгенератором $A_{N, \beta(N-1)}: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_N$. Значит, диффузии на конечномерных симплексах, рассматриваемые в [4] и во многих других работах, являются частным случаем двухпараметрического семейства диффузий $\mathbf{X}_{\alpha, \theta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$.

Предложение 5.8 можно интерпретировать как сходимость (в смысле [4, теорема 2.5]) процессов $\mathbf{X}_{-\beta, N\beta}(t)$ на ∇_N к процессу $\mathbf{X}_{0, \eta}(t)$ на $\bar{\nabla}_\infty$ при $\beta \rightarrow +0$, $N \rightarrow +\infty$ и $N\beta \rightarrow \eta > 0$. Эта сходимость усиливает второе утверждение предложения 5.6 о сходимости инвариантных мер.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Bertoin, *A second order SDE for the Langevin process reflected at a completely inelastic boundary*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **10**:3 (2008), 625–639.
- [2] A. Borodin, G. Olshanski, *Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions*, Probab. Theory Related Fields, **144**:1–2 (2009), 281–318; <http://arxiv.org/abs/0706.1034v1>.
- [3] R. Dong, A. Gnedin, J. Pitman, *Exchangeable partitions derived from Markovian coalescents*, Ann. Appl. Probab., **17**:4 (2007), 1172–1201; <http://arxiv.org/abs/math/0603745>.
- [4] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *The infinitely-many-neutral-alleles diffusion model*, Adv. Appl. Probab., **13**:3 (1981), 429–452.
- [5] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and Convergence*, Wiley-Interscience, New York, 1986.
- [6] S. N. Ethier, *Eigenstructure of the infinitely-many-neutral-alleles diffusion model*, J. Appl. Probab., **29**:3 (1992), 487–498.
- [7] W. J. Ewens, *Mathematical Population Genetics*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [8] J. Fulman, *Stein’s method and Plancherel measure of the symmetric group*, Trans. Amer. Math. Soc., **357**:2 (2005), 555–570.
- [9] J. Fulman, *Commutation relations and Markov chains*, Probab. Theory Related Fields, **144**:1–2 (2009), 99–136; <http://arxiv.org/abs/0712.1375>.
- [10] S. Feng, F.-Y. Wang, *A class of infinite dimensional diffusion processes with connection to population genetics*, Journal Appl. Probab., **44**:4 (2007), 938–949; <http://arxiv.org/abs/0711.1887v1>..
- [11] A. Gnedin, J. Pitman, *Regenerative partition structures*, Electronic J. Combin., **11**:2 (2005), research paper 12.
- [12] R. C. Griffiths, *A transition density expansion for a multi-allele diffusion model*, Adv. Appl. Probab., **11**:2 (1979), 310–325.

- [13] Ц. Игнатов, *Об одной константе, возникающей в асимптотической теории симметрических групп, и о мерах Пуассона–Дирихле*, Теория вероятн. и ее прим., **27**:1 (1982), 129–140..
- [14] S. Karlin, J. McGregor, *The number of mutant forms maintained in a population*, in: Proc. 5th Berkeley Symposium on Math Statist. Prob., vol. 4, 1967, 415–438.
- [15] S. V. Kerov, *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003; <http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2001/01-04.ps.gz>.
- [16] S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski, *The boundary of Young graph with Jack edge multiplicities*, Intern. Math. Res. Notices, **1998**:4 (1998), 173–199.
- [17] J. F. C. Kingman, *Random discrete distributions*, J. R. Statist. Soc. B, **37** (1975), 1–22.
- [18] J. F. C. Kingman, *The population structure associated with the Ewens sampling formula*, Theoret. Population Biology, **11**:2 (1977), 274–283.
- [19] J. F. C. Kingman, *Random partitions in population genetics*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **361**:1704 (1978), 1–20.
- [20] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [21] M. Perman, J. Pitman, M. Yor, *Size-biased sampling of Poisson point processes and excursions*, Probab. Theory Related Fields, **92**:1 (1992), 21–39.
- [22] J. Pitman, *The two-parameter generalization of Ewens’ random partition structure*, Technical report 345, Dept. Statistics, U. C. Berkeley, 1992, <http://www.stat.berkeley.edu/tech-reports/>
- [23] J. Pitman, *Exchangeable and partially exchangeable random partitions*, Probab. Theory Related Fields, **102**:2 (1995), 145–158.
- [24] J. Pitman, *Random discrete distributions invariant under size-biased permutation*, Adv. Appl. Probab., **28**:2 (1996), 525–539.
- [25] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes* (Ecole d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXXII-2002), Lecture Notes in Math., vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006; http://works.bepress.com/jim_pitman/1.
- [26] J. Pitman, M. Yor, *The two-parameter Poisson–Dirichlet distribution derived from a stable subordinator*, Ann. Probab., **25** (1997), 855–900.
- [27] B. Schmuland, *A result on the infinitely many neutral alleles diffusion model*, J. Appl. Probab., **28**:2 (1991), 253–267.
- [28] А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп, I и II*, Теория вероятн. и ее прим., **22**:1 (1977), 72–88; **23**:1 (1978), 42–54.
- [29] G. A. Watterson, *Reversibility and the age of an allele. I. Moran’s infinitely many neutral alleles model*, Theoret. Population Biology, **10**:3 (1976), 239–253.
- [30] G. A. Watterson, *The stationary distribution of the infinitely-many-neutral-alleles diffusion model*, J. Appl. Probab., **13**:4 (1976), 639–651.