Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. М. Райнс, В. П. Спиридонов, Определители эллиптических гипергеометрических интегралов, *Функц. анализ и его прил.*, 2009, том 43, выпуск 4, 67–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 07:07:45

УДК 517.5+517.3

Определители эллиптических гипергеометрических интегралов*

© 2009. Э. М. Райнс, В. П. Спиридонов

Отталкиваясь от интерпретации вычисления BC_2 -симметричного эллиптического гипергеометрического интеграла «типа I» (эллиптического интеграла Диксона) как формулы для казоратиана эллиптического гипергеометрического уравнения, мы приводим обобщение этой конструкции на интегралы большей размерности и гипергеометрические функции более высокого порядка. Это позволяет нам вывести новым способом соответствующие формулы для эллиптического бета-интеграла и преобразования симметрии, доказав, что обе части равенства удовлетворяют одним и тем же разностным уравнениям и что эти разностные уравнения удовлетворяют необходимому условию теории Галуа, обеспечивающему единственность их общего решения.

§1. Введение

Чисто гипергеометрические функции и их q -аналоги широко используются в математике и математической физике. Они могут быть определены более или менее на равных правах либо как бесконечные ряды, либо как контурные интегралы [2]. Что же касается недавно открытых эллиптических гипергеометрических функций, ситуация с ними качественно иная — в общем виде они определяются только с помощью интегральных представлений. Общая концепция эллиптических гипергеометрических интегралов была введена в [14]. Эллиптические бета-интегралы ([4], [10], [13], [14], [18]) являются простейшими представителями интегралов такого типа. В случае одномерных интегралов известен только один эллиптический бета-интеграл [13], в настоящее время интеграл самого высокого уровня, обобщающий бета-интеграл Эйлера. В многомерном случае такие интегралы разбиты на три класса.

n -мерные эллиптические бета-интегралы типа I содержат $2n + 3$ свободных параметров, и для них имеется два общих метода доказательства соответствующих точных формул интегрирования ([10], [17]). Интегралы типа II содержат меньшее число параметров, и их можно вывести непосредственно из интегралов типа I ([4], [14]). Оба типа этих точно вычисляемых интегралов допускают многопараметрические обобщения, являющиеся функциями более высокого порядка с соответствующими законами преобразования [10]. Для корневой системы BC_n эти интегралы являются эллиптическими аналогами интеграла Диксона

*Первый автор частично поддержан Национальным научным фондом США, грант DMS0833464. Второй автор частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00392, и Математическим институтом Макса Планка (Бонн), во время визита в который была выполнена часть этой работы.

(тип I) и знаменитого интеграла Сельберга [2] (тип II с $5 + 1$ параметрами) соответственно. Многомерные эллиптические бета-интегралы третьего класса [14] могут быть представлены как определители одномерных интегралов, которые, в свою очередь, сводятся к вычисляемым определителям тэта-функций.

В настоящей работе мы следуем наблюдению, неявно фигурирующему в [10], что эллиптические интегралы Диксона могут быть выражены в виде определителей одномерных эллиптических гипергеометрических интегралов — аналогов эллиптического бета-интеграла более высокого порядка. Это позволяет нам доказать новым способом соответствующую точную формулу интегрирования и формулу преобразования, впервые доказанные в [10]. Результат вычисления интеграла обобщает определитель Варченко одномерных чисто гипергеометрических интегралов [20] и определитель Аомото–Ито [3] на эллиптический уровень и обогащает список известных точно вычисляемых определителей, собранный в [7].

Мы пользуемся следующими обозначениями. Ключевое бесконечное произведение — это

$$(z; p)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - zp^k),$$

где $|p| < 1$ и $z \in \mathbb{C}$. Эллиптическая тэта-функция имеет вид

$$\theta_p(z) := (z; p)_\infty (z^{-1}; p)_\infty,$$

где $z \in \mathbb{C}^*$. Она обладает свойствами

$$\theta_p(pz) = \theta_p(z^{-1}) = -z^{-1}\theta_p(z) \quad \text{и} \quad \theta_p(z) = 0 \quad \text{для} \quad z = p^{\mathbb{Z}}.$$

Мы следуем стандартному удобному соглашению, что

$$\theta_p(a_1, \dots, a_m) := \prod_{k=1}^m \theta_p(a_k), \quad \theta_p(tz^{\pm 1}) := \theta_p(tz)\theta_p(tz^{-1}),$$

и говорим, что мероморфная функция $f(z)$ является p -эллиптической, если $f(pz) = f(z)$. Простейшая нетривиальная p -эллиптическая функция (второго порядка) имеет вид $\theta_p(az, bz)/\theta_p(cz, dz)$, где $ab = cd$.

Стандартная эллиптическая гамма-функция, зависящая от двух комплексных базисных переменных p и q , лежащих внутри диска радиуса, равного 1, $|p|, |q| < 1$, имеет вид

$$\Gamma_{p,q}(z) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1 - zp^jq^k},$$

где $z \in \mathbb{C}^*$. Она обладает свойствами

$$\Gamma_{p,q}(z) = \Gamma_{q,p}(z), \quad \Gamma_{p,q}(qz) = \theta_p(z)\Gamma_{p,q}(z), \quad \Gamma_{p,q}(pz) = \theta_q(z)\Gamma_{p,q}(z)$$

и имеет нули при $z = p^{\mathbb{Z}_{>0}} q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ и полюсы при $z = p^{\mathbb{Z}_{\leq 0}} q^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}$. Формула отражения имеет вид $\Gamma_{p,q}(a)\Gamma_{p,q}(b) = 1$, $ab = pq$; мы полагаем также

$$\Gamma_{p,q}(a_1, \dots, a_m) := \prod_{k=1}^m \Gamma_{p,q}(a_k), \quad \Gamma_{p,q}(tz^{\pm 1}) := \Gamma_{p,q}(tz)\Gamma_{p,q}(tz^{-1}),$$

$$\Gamma_{p,q}(tz_1^{\pm 1} z_2^{\pm 1}) = \Gamma_{p,q}(tz_1 z_2)\Gamma_{p,q}(tz_1 z_2^{-1})\Gamma_{p,q}(tz_1^{-1} z_2)\Gamma_{p,q}(tz_1^{-1} z_2^{-1}).$$

§2. Эллиптическое гипергеометрическое уравнение

Следующий эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса был предложен в [14]–[16]:

$$V(\underline{t}; p, q) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^8 \Gamma_{p,q}(t_j z^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z}, \quad (1)$$

где $\kappa = (p; p)_{\infty}(q; q)_{\infty}/2$ и $\mathbb{T}$ является положительно ориентированной единичной окружностью. Параметры t_j ограничены условием балансировки $\prod_{j=1}^8 t_j = (pq)^2$ и неравенствами $|t_j| < 1$, $j = 1, \dots, 8$. V -функция может быть мероморфно продолжена на все значения $t_j \in \mathbb{C}^*$, сохраняющие условие балансировки. При $t_7 t_8 = pq$ (и других подобных ограничениях) она сводится к эллиптическому бета-интегралу [13]

$$\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma_{p,q}(t_j z^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} = \prod_{1 \leq j < k \leq 6} \Gamma_{p,q}(t_j t_k). \quad (2)$$

Формула сложения для эллиптических тэта-функций, записанная в виде

$$t_3 \theta_p(t_2 t_3^{\pm 1}, t_1 z^{\pm 1}) + t_1 \theta_p(t_3 t_1^{\pm 1}, t_2 z^{\pm 1}) + t_2 \theta_p(t_1 t_2^{\pm 1}, t_3 z^{\pm 1}) = 0,$$

приводит к следующей формуле связи для смежных функций через соответствующее соотношение для подынтегральной функции:

$$\frac{t_1 V(q t_1)}{\theta_p(t_1 t_2^{\pm 1}, t_1 t_3^{\pm 1})} + \frac{t_2 V(q t_2)}{\theta_p(t_2 t_1^{\pm 1}, t_2 t_3^{\pm 1})} + \frac{t_3 V(q t_3)}{\theta_p(t_3 t_1^{\pm 1}, t_3 t_2^{\pm 1})} = 0, \quad (3)$$

где $V(q t_j)$ обозначает $V(\underline{t}; p, q)$ -функцию с параметром t_j , замененным на $q t_j$ (так что условие балансировки принимает вид $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q$). Преобразование симметрии типа Бэйли для V -функции ([10], [14]) придает формуле (3) различные виды, включая, в частности,

$$\frac{\prod_{j=4}^8 \theta_p(t_1 t_j / q) V(t_1 / q)}{t_1 \theta_p(t_2 / t_1, t_3 / t_1)} + \frac{\prod_{j=4}^8 \theta_p(t_2 t_j / q) V(t_2 / q)}{t_2 \theta_p(t_1 / t_2, t_3 / t_2)} + \frac{\prod_{j=4}^8 \theta_p(t_3 t_j / q) V(t_3 / q)}{t_3 \theta_p(t_1 / t_3, t_2 / t_3)} = 0, \quad (4)$$

где $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^3$. В комбинации с (3) это равенство приводит к эллиптическому гипергеометрическому уравнению ([15], [16])

$$\mathcal{A}(t_1, t_2, \dots, t_8, q; p)(U(q t_1, q^{-1} t_2; q, p) - U(\underline{t}; q, p))$$

$$+ \mathcal{A}(t_2, t_1, \dots, t_8, q; p)(U(q^{-1} t_1, q t_2; q, p) - U(\underline{t}; q, p)) + U(\underline{t}; q, p) = 0, \quad (5)$$

где мы положили

$$\mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q; p) := \frac{\theta_p(t_1/qt_3, t_3t_1, t_3/t_1)}{\theta_p(t_1/t_2, t_2/qt_1, t_1t_2/q)} \prod_{k=4}^8 \frac{\theta_p(t_2t_k/q)}{\theta_p(t_3t_k)} \quad (6)$$

и

$$U(\underline{t}; q, p) := \frac{V(\underline{t}; q, p)}{\prod_{k=1}^2 \Gamma_{p,q}(t_k t_3^{\pm 1})}.$$

Потенциал $\mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q; p)$ является p -эллиптической функцией параметров $t_1, \dots, t_8$ и q , один из которых должен рассматриваться как зависимая переменная через условие балансировки.

Мы полагаем $t_1 = (pq)^2/t_2 \cdots t_8$ и делаем сдвиг $t_2 \rightarrow pt_2$ (так что $t_1 \rightarrow t_1/p$). Так как функция $\mathcal{A}$ является p -эллиптической по всем параметрам, то $\mathcal{A}(p^{-1}t_1, pt_2, \dots) = \mathcal{A}(t_1, t_2, \dots)$. Поэтому функция $U(p^{-1}t_1, pt_2)$ определяет независимое решение эллиптического гипергеометрического уравнения. Вычислим казоратиан этих двух решений (т. е. дискретный аналог вронскиана). Для этого мы умножаем приведенное выше равенство на $U(p^{-1}t_1, pt_2)$, а равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(t_1, t_2, \dots, t_8, q; p)(U(p^{-1}qt_1, pq^{-1}t_2) - U(p^{-1}t_1, pt_2)) \\ & + \mathcal{A}(t_2, t_1, t_3, \dots, q; p)(U(p^{-1}q^{-1}t_1, pqt_2) - U(p^{-1}t_1, pt_2)) + U(p^{-1}t_1, pt_2) = 0 \end{aligned}$$

на $U(t_1, t_2)$, вычитаем одно из другого и получаем

$$\mathcal{A}(t_1, t_2, \dots, t_8, q; p)D(p^{-1}t_1, q^{-1}t_2) = \mathcal{A}(t_2, t_1, t_3, \dots, q; p)D(p^{-1}q^{-1}t_1, t_2), \quad (7)$$

где

$$D(t_1, t_2) = U(qpt_1, t_2)U(t_1, pqt_2) - U(qt_1, pt_2)U(pt_1, qt_2)$$

есть искомый казоратиан. Он симметричен по p и q , что является важным свойством. Очевидным образом выражение

$$D(t_1, t_2) = \frac{V(pqt_1, t_2)V(t_1, pqt_2) - t_1^{-2}t_2^{-2} V(qt_1, pt_2)V(pt_1, qt_2)}{\prod_{k=1}^2 \Gamma_{p,q}(t_k t_3^{\pm 1}, pqt_k t_3^{\pm 1})}$$

можно интерпретировать как определитель специфической 2×2 -матрицы, матричные элементы которой выражаются через V -функцию.

Поскольку t_1 — зависимая переменная, полученное равенство является на самом деле разностным уравнением первого порядка по t_2 . После растяжения $t_1 \rightarrow pt_1$, $t_2 \rightarrow qt_2$ (так что $t_1 = pq/\prod_{j=2}^8 t_j$) мы получаем следующее уравнение на $f(t_2) := D(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} f(qt_2) &= \frac{\mathcal{A}(pt_1, qt_2, t_3, \dots, q; p)}{\mathcal{A}(qt_2, pt_1, t_3, \dots, q; p)} f(t_2) \\ &= -\frac{t_1}{qt_2} \frac{\theta_p(t_1/q^2t_2, t_1/qt_3, t_1^{-1}t_3^{\pm 1})}{\theta_p(t_2/t_1, t_2/t_3, q^{-1}t_2^{-1}t_3^{\pm 1})} \prod_{k=4}^8 \frac{\theta_p(t_2t_k)}{\theta_p(t_1t_k/q)} f(t_2), \end{aligned}$$

что дает

$$D(t_1, t_2) = C(t_2) \frac{\prod_{k=3}^8 \Gamma_{p,q}(t_1t_k, t_2t_k)}{\Gamma_{p,q}(t_1/t_2, t_2/t_1)} \prod_{k=1}^2 \frac{\Gamma_{p,q}(t_k^{-1}t_3^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(t_k t_3^{\pm 1})},$$

где $C(qt_2) = C(t_2)$. Можно повторить все рассмотрение с переставленными переменными p и q и получить $C(pt_2) = C(t_2)$. Это означает (для несоизмеримых p и q), что функция C не зависит от t_2 , но она может зависеть от других параметров $t_3, \dots, t_8$. Для вычисления C мы используем анализ вычетов. Для этого мы перемещаем параметр t_3 изнутри единичного круга наружу и накладываем ограничения $|t_3| > 1 > |qt_3|, |pt_3|$. Затем мы заменяем контур интегрирования $\mathbb{T}$, входящий в определение $V(\underline{t})$, на контур $\mathbb{T}_{\text{def}}$, деформированный так, что никакие полюсы не пересекаются при указанном выше изменении t_3 . Теорема Коши приводит к равенству

$$V(\underline{t}) := V_{\mathbb{T}_{\text{def}}}(\underline{t}) = V_{\mathbb{T}}(\underline{t}) + \frac{\prod_{j=1, \neq 3}^8 \Gamma_{p,q}(t_j t_3^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(t_3^{-2})}.$$

После этого мы переходим к пределу $t_2 \rightarrow 1/t_3$ и находим значение C путем вычисления предельного значения отношения выражений в левой и правой частях указанного выше равенства:

$$C = \lim_{t_2 t_3 \rightarrow 1} \frac{V(pqt_1, t_2)V(t_1, pqt_2) - t_1^{-2}t_2^{-2}V(qt_1, pt_2)V(pt_1, qt_2)}{\prod_{k=3}^8 \Gamma_{p,q}(t_1 t_k, t_2 t_k)} \Gamma_{p,q}(t_1/t_2, t_2/t_1).$$

При $t_2 \rightarrow 1/t_3$ функция $V(t_1, pqt_2)$ сводится к эллиптическому бета-интегралу, вычеты функции $V(pqt_1, t_2)$ расходятся, в то время как интеграл $V_{\mathbb{T}}(pqt_1, t_2)$ остается конечным, вычеты функций $V(pt_1, qt_2)$ и $V(qt_1, pt_2)$ остаются конечными, так же как и функции $V_{\mathbb{T}}(pt_1, qt_2)$ и $V_{\mathbb{T}}(qt_1, pt_2)$. В результате выживает только первый член казоратиана и он дает

$$C = \frac{\prod_{3 \leq j < k \leq 8} \Gamma_{p,q}(t_j t_k)}{\Gamma_{p,q}(t_1^{-1} t_2^{-1})}.$$

Таким образом, мы получаем формулу

$$V(pqt_1, t_2)V(t_1, pqt_2) - t_1^{-2}t_2^{-2}V(qt_1, pt_2)V(pt_1, qt_2) = \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma_{p,q}(t_j t_k)}{\Gamma_{p,q}(t_1^{\pm 1} t_2^{\pm 1})}. \quad (8)$$

Описанное решение эллиптического гипергеометрического уравнения определено при $|q| < 1$, хотя само уравнение (5) не требует этого ограничения. Можно проверить, что

$$\mathcal{A}\left(\frac{p^{1/2}}{t_1}, \dots, \frac{p^{1/2}}{t_8}, q; p\right) = \mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q^{-1}; p).$$

Поэтому преобразование $t_j \rightarrow p^{1/2}/t_j$, $j = 1, \dots, 8$, отображает эллиптическое гипергеометрическое уравнение в себя с заменой $q \rightarrow q^{-1}$. Эквивалентно, та же самая инверсия $q \rightarrow 1/q$ происходит после преобразования $t_j \rightarrow p^{a_j}/t_j$ с целыми a_i , такими, что $\sum_{j=1}^8 a_j = 4$. В результате мы получаем следующее решение эллиптического гипергеометрического уравнения в режиме $|q| > 1$:

$$U(\underline{t}; q, p) = \frac{V(p^{1/2}/t_1, \dots, p^{1/2}/t_8; q^{-1}, p)}{\prod_{k=1}^2 \Gamma_{p,q^{-1}}(p/t_k t_3, t_3/t_k)}. \quad (9)$$

Что касается случая единичной окружности $|q| = 1$, то соответствующее решение уравнения (5) может быть получено с помощью модифицированной эллиптической гамма-функции или модулярного преобразования ([15], [16]).

§3. Характеризационная теорема для V -функции

Мы хотели бы представить теперь формулы связи для смежных V -функций (и, таким образом, уравнение (5)) в 2×2 -матричном виде. Для этого мы введем функцию

$$W(t_1, \dots, t_8; z) := \frac{V(t_1, \dots, t_8; p, q)}{\prod_{j=1}^8 \Gamma_{p,q}(t_j z^{\pm 1})},$$

где z является некоторой вспомогательной переменной. Заменяя параметры $t_{1,2,3}$ на $t_{4,7,8}$ и V -функцию на W в (3), мы получим после сдвига $t_3 \rightarrow qt_3$

$$W(qt_3, qt_7) = \alpha(\underline{t}; z)W(qt_3, qt_4) + \beta(\underline{t}; z)W(qt_3, qt_8), \quad (10)$$

где $W(qt_j, qt_k)$ обозначает $W(\underline{t}; z)$ -функцию с соответствующими параметрами t_j и t_k , замененными на qt_j и qt_k , и

$$\alpha(\underline{t}; z) = \frac{\theta_p(t_4 z^{\pm 1}, t_7 t_8^{\pm 1})}{\theta_p(t_7 z^{\pm 1}, t_4 t_8^{\pm 1})}, \quad \beta(\underline{t}; z) = \frac{\theta_p(t_8 z^{\pm 1}, t_7 t_4^{\pm 1})}{\theta_p(t_7 z^{\pm 1}, t_8 t_4^{\pm 1})}$$

являются p -эллиптическими функциями всех переменных (включая z).

Заменяя теперь $t_{1,2,3}$ на $qt_{1,2,3}$ в (4), а затем переставляя t_1 и t_2 с t_4 и t_8 , мы получаем

$$W(qt_3, qt_4) = \gamma(\underline{t}; z)W(qt_3, qt_8) + \delta(\underline{t}; z)W(qt_4, qt_8), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\underline{t}; z) &= \frac{\theta_p(t_8 z^{\pm 1}, t_3 t_8^{-1})}{\theta_p(t_4 z^{\pm 1}, t_3 t_4^{-1})} \prod_{j=1,2,5,6,7} \frac{\theta_p(t_4 t_j)}{\theta_p(t_8 t_j)}, \\ \delta(\underline{t}; z) &= \frac{\theta_p(t_8 z^{\pm 1}, t_4 t_8^{-1})}{\theta_p(t_3 z^{\pm 1}, t_4 t_3^{-1})} \prod_{j=1,2,5,6,7} \frac{\theta_p(t_3 t_j)}{\theta_p(t_8 t_j)} \end{aligned} \quad (12)$$

тоже являются p -эллиптическими функциями параметров. Исключая $W(qt_3, qt_4)$ из (10) и (11), мы получаем соотношение

$$W(qt_3, qt_7) = (\alpha(\underline{t}; z)\gamma(\underline{t}; z) + \beta(\underline{t}; z))W(qt_3, qt_8) + \alpha(\underline{t}; z)\delta(\underline{t}; z)W(qt_4, qt_8). \quad (13)$$

Определим теперь матрицы

$$M(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6, t_7, t_8) := \begin{pmatrix} W(pt_1, qt_3) & W(pt_2, qt_3) \\ W(pt_1, qt_4) & W(pt_2, qt_4) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$A(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6, t_7, t_8) := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$A_{11}(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q) = \alpha(pt_1, q^{-1}t_8)\gamma(pt_1, q^{-1}t_8) + \beta(pt_1, q^{-1}t_8),$$

$$A_{12}(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q) = \alpha(pt_1, q^{-1}t_8)\delta(pt_1, q^{-1}t_8),$$

$$A_{21}(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q) = A_{12}(t_1, t_2; t_4, t_3; t_5, \dots, t_8; z; p, q),$$

$$A_{22}(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q) = A_{11}(t_1, t_2; t_4, t_3; t_5, \dots, t_8; z; p, q)$$

являются p -эллиптическими функциями. В частности,

$$A_{ij}(p^{-1}t_1, pt_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q) = A_{ij}(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, \dots, t_8; z; p, q).$$

После замен $t_7 \rightarrow t_7x$, $t_8 \rightarrow t_8x^{-1}$ уравнение (13) и его аналог с переставленными t_3 и t_4 переписываются как линейное матричное q -разностное уравнение первого порядка

$$M(qx) = A(x)M(x), \quad (16)$$

где мы указываем только x -зависимость.

После перестановок $p \leftrightarrow q$, $t_1 \leftrightarrow t_3$, $t_2 \leftrightarrow t_4$ матрица M преобразуется в транспонированную, M^T . Поэтому уравнение (16) преобразуется в

$$M(px) = M(x)B(x), \quad (17)$$

где

$$B(x) := B(t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6, t_7x, t_8x^{-1}) := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$B_{11} = A_{11}(t_3, t_4; t_1, t_2; t_5, t_6, t_7x, t_8x^{-1}; z; q, p),$$

$$B_{12} = A_{21}(t_3, t_4; t_1, t_2; t_5, t_6, t_7x, t_8x^{-1}; z; q, p),$$

$$B_{21} = A_{12}(t_3, t_4; t_1, t_2; t_5, t_6, t_7x, t_8x^{-1}; z; q, p),$$

$$B_{22} = A_{22}(t_3, t_4; t_1, t_2; t_5, t_6, t_7x, t_8x^{-1}; z; q, p).$$

В принципе, из существования первого уравнения (16) следует, что существует некоторое p -разностное уравнение вида (17) с q -эллиптическими коэффициентами [6]. Действительно, мы можем просто определить $B(x) := M(x)^{-1}M(px)$ и увидеть, что

$$B(qx) = M(x)^{-1}A(x)^{-1}A(px)M(px) = M(x)^{-1}M(px) = B(x).$$

Однако эта B -матрица определяется неоднозначно. Пусть $g(x)$ обозначает некоторую матрицу, удовлетворяющую равенству $g(qx) = g(x)$. Уравнение (16) не меняется после замены $M \rightarrow Mg$, но B -матрица преобразуется по правилу $B \rightarrow g(x)^{-1}Bg(px)$, что демонстрирует функциональную свободу в определении этой матрицы.

Предположим теперь, что M' является другим мероморфным решением уравнений (16) и (17). Тогда матрица $N = M'M^{-1}$ удовлетворяет разностным уравнениям

$$N(px) = N(x), \quad N(qx) = A(x)N(x)A(x)^{-1}.$$

Первое уравнение утверждает, что матрица N имеет p -эллиптические коэффициенты, а второе является q -разностным уравнением с p -эллиптическими коэффициентами. Нормировка, выбранная выше, справедлива для q - и p -сдвигов

по всем параметрам, не только для сдвигов t_7 и t_8 , благодаря перестановочной симметрии.

Теорема 1. *Для несоизмеримых p и q матрица N является единичной матрицей с точностью до умножения на постоянную.*

Доказательство этой теоремы приводится в более общем контексте в последнем параграфе. Это утверждение просто означает, что нетривиальные p -эллиптические функции (матричные элементы матрицы N) не могут удовлетворять указанному q -разностному уравнению с p -эллиптическими коэффициентами.

С помощью трех попарно несоизмеримых квазипериодов ω_i , $i = 1, 2, 3$, и параметризации

$$q = e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}, \quad p = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}$$

можно перевести q - и p -разностные уравнения в линейные конечно-разностные уравнения. Для этого достаточно перейти к параметрам g_j , определенным равенствами $t_j = e^{2\pi i g_j / \omega_2}$, $j = 1, \dots, 8$, и $x = e^{2\pi i u / \omega_2}$. Таким образом, V -функция как функция переменной u характеризуется как единственное (с точностью до умножения на постоянную, не зависящую от u) решение пяти линейных конечно-разностных уравнений: двух разностных уравнений в (16), имеющих дело со сдвигами $u \rightarrow u + \omega_1$, их аналогов в (17), имеющих дело со сдвигами $u \rightarrow u + \omega_3$, и условия периодичности при сдвигах $u \rightarrow u + \omega_2$, эквивалентного условию аналитичности по $x \in \mathbb{C}^*$. Для того чтобы охарактеризовать саму функцию $V(t; q, p)$ целиком как функцию от $t_1, \dots, t_8$ с точностью до постоянной, необходимо просто подсоединить группу перестановочной симметрии S_8 .

4. Представление эллиптических интегралов Диксона в виде определителей

Эллиптические интегралы Диксона (известные как интегралы типа I с BC_n -симметрией) имеют вид

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\Gamma_{p,q}(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1})} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^{2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_i z_j^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z_j^{\pm 2})} \frac{dz_j}{2\pi \sqrt{-1} z_j},$$

где $|t_j| < 1$,

$$\prod_{j=1}^{2n+2m+4} t_j = (pq)^{m+1}, \quad \kappa_n = \frac{(p; p)_{\infty}^n (q; q)_{\infty}^n}{2^n n!}.$$

По соглашению $I_0^{(m)} := 1$ при $n = 0$; при $n = 1$ результирующий однократный интеграл является аналогом эллиптического бета-интеграла более высокого порядка.

Следующее тождество преобразования интегралов было доказано в [10].

Теорема 2. *Интегралы $I_n^{(m)}$ удовлетворяют соотношению*

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = \prod_{1 \leq r < s \leq 2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_r t_s) I_m^{(n)} \left(\frac{\sqrt{pq}}{t_1}, \dots, \frac{\sqrt{pq}}{t_{2n+2m+4}} \right). \quad (19)$$

В частности, при $m = 0$ интеграл в правой части является 0-мерным и возникает явная формула вычисления интеграла в левой части.

Одной из целей настоящей работы является получение более простого доказательства этого преобразования путем демонстрации, что обе стороны удовлетворяют одному семейству разностных уравнений и начальных условий. Мы получим также новое доказательство для частного случая $m = 0$.

Ключевой идеей является то, что функция $I_n^{(m)}$ может быть записана как определитель интегралов вида $I_1^{(n+m-1)}$, благодаря чему мы сможем использовать разностные уравнения для однократных интегралов при выводе разностных уравнений для $I_n^{(m)}$.

Благодаря формуле отражения $\Gamma_{p,q}(z)\Gamma_{p,q}(pq/z) = 1$ можно записать часть подынтегрального выражения для $I_n^{(m)}$, смешивающую переменные интегрирования, как

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\Gamma_{p,q}(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1})} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i^{-1} \theta_p(z_i z_j^{\pm 1}) z_i^{-1} \theta_q(z_i z_j^{\pm 1})).$$

Существенным наблюдением является тогда то, что антисимметричный множитель $\prod_{1 \leq i < j \leq n} z_i^{-1} \theta_p(z_i z_j^{\pm 1})$ может быть переписан как определитель; а именно, существует следующий эллиптический аналог определителя Коши:

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{1}{a_i^{-1} \theta_p(a_i z_j^{\pm 1})} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i^{-1} \theta_p(a_i a_j^{\pm 1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} z_i^{-1} \theta_p(z_i z_j^{\pm 1})}{(-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leq i, j \leq n} a_i^{-1} \theta_p(a_i z_j^{\pm 1})}$$

(который, как показано в [9], может быть получен из обычного определителя Коши с помощью подходящей подстановки), используя который можно привести наш интеграл к виду

$$\begin{aligned} I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) &= \frac{\kappa_n}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i^{-1} \theta_p(a_i a_j^{\pm 1}) b_i^{-1} \theta_q(b_i b_j^{\pm 1})} \\ &\times \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\prod_{r=1}^{2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_r z_j^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z_j^{\pm 2})} \prod_{k=1}^n b_k^{-1} \theta_p(b_k z_j^{\pm 1}) b_k^{-1} \theta_q(b_k z_j^{\pm 1}) \frac{dz_j}{2\pi \sqrt{-1} z_j} \right) \\ &\times \det_{1 \leq i, j \leq n} \phi_i(z_j) \det_{1 \leq i, j \leq n} \psi_i(z_j), \end{aligned}$$

где $\phi_i(z_j) = a_i/\theta_p(a_i z_j^{\pm 1})$, $\psi_i(z_j) = b_i/\theta_q(b_i z_j^{\pm 1})$. Но тогда, используя тождество Гейне

$$\frac{1}{n!} \int \det_{1 \leq i, j \leq n} \phi_i(z_j) \det_{1 \leq i, j \leq n} \psi_i(z_j) \prod_{1 \leq i \leq n} d\mu(z_i) = \det_{1 \leq i, j \leq n} \int \phi_i(z) \psi_j(z) d\mu(z),$$

мы можем записать

$$\begin{aligned} I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{a_j \theta_p(a_i a_j^{\pm 1}) b_j \theta_q(b_i b_j^{\pm 1})} \\ &\times \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{r=1}^{2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_r z^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z^{\pm 2})} \prod_{k \neq i} \theta_p(a_k z^{\pm 1}) \prod_{k \neq j} \theta_q(b_k z^{\pm 1}) \frac{dz}{2\pi \sqrt{-1} z} \right), \end{aligned}$$

где $\kappa = (p; p)_\infty (q; q)_\infty / 2$. Если выбрать $a_i = t_i$, $b_i = t_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$, то матричные элементы в указанном выше определителе имеют вид $I_1^{(m+n-1)}$. Точнее, ij -м элементом является

$$T_q(t_i)^{-1} T_p(t_{n+j})^{-1} I_1^{(m+n-1)}(qt_1, \dots, qt_n, pt_{n+1}, \dots, pt_{2n}, t_{2n+1}, \dots, t_{2n+2m+4}),$$

где $T_q(t_k)$ — оператор q -сдвига, $T_q(t_k)f(t_k) = f(qt_k)$. Можно позволить последовательностям a , b перекрываться, что приводит к некоторым небольшим осложнениям. Например, при $n = 2, m = 0$ и $a_i = b_i = t_i$, $i = 1, 2$, мы получаем в правой части казоратиан V -функций (8), что дает $I_2^{(0)}(t_1, \dots, t_8) = \prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma_{p,q}(t_j t_k)$. Этот результат наводит на мысль, что интеграл $I_n^{(0)}$ может быть вычислен в замкнутом виде при произвольных $n > 2$.

Заметим, что при $m = -1$ условие балансировки принимает вид $t_1 \cdots t_{2n+4} = 1$ и, таким образом, по крайней мере один из матричных элементов определителя не может использовать единичную окружность в качестве его контура. Однако это не является серьезной проблемой, поскольку всегда можно выбрать *некоторый* общий подходящий контур, и тождество Гейне остается применимым.

Теперь тот факт, что интеграл равен нулю при $m = -1$ (вытекающий из явной формулы для $m = 0$), подразумевает, что строки указанной выше матрицы должны быть линейно зависимыми. Обратно, если мы найдем линейную зависимость между интегралами

$$T_q(t_i)^{-1} T_p(t_{n+j})^{-1} I_1^{(n-2)}(qt_1, \dots, qt_n, pt_{n+1}, \dots, pt_{2n}, t_{2n+1}, t_{2n+2}),$$

которая не зависит от j (т.е. p -эллиптична по $t_{n+1}, \dots, t_{2n}$), то это будет подразумевать равенство интеграла нулю при $m = -1$, что, как показано в [4], позволяет вычислить интеграл при $m = 0$. Это приводит нас к необходимости изучения рекуррентных соотношений для однократных интегралов.

Вообще говоря, не только матричные элементы указанных выше интегралов имеют форму $I_1^{(n+m-1)}$, но, на самом деле, и сами $k \times k$ -миноры пропорциональны интегралам вида $I_k^{(n+m-k)}$. Рекуррентное соотношение для однократных интегралов, фигурирующее неявным образом в обращении $I_n^{(-1)}$ в нуль, порождает рекуррентные соотношения для интегралов более высокого порядка $I_n^{(m)}$ следующим образом.

Лемма 3. Пусть M есть $n \times k$ -матрица, и предположим, что вектор v удовлетворяет равенству $vM = 0$. Тогда $k \times k$ -миноры M удовлетворяют $(n - k + 1)$ -членному соотношению

$$\sum_{k \leq i \leq n} v_i \det_{l \in \{1, \dots, k-1, i\}, l' \in \{1, \dots, k\}} (M_{ll'}) = 0.$$

Доказательство. Это, безусловно, было бы справедливо по линейности, если бы мы производили суммирование, начиная с $i = 1$, но все необходимые дополнительные члены имеют в минорах повторяющиеся строки и, таким образом, обращаются в нуль. $\square$

Имеется два основных источника рекуррентных соотношений для гипергеометрических интегралов. Первым служат рекуррентные соотношения для самих подынтегральных выражений (применимых при условии, что ограничения на контуры может удовлетворять один общий контур).

Теорема 4. *Интеграл $I_n^{(m)}$ удовлетворяет $(n+2)$ -членному рекуррентному соотношению*

$$\sum_{1 \leq i \leq n+2} \frac{t_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} \theta_p(t_i t_j^{\pm 1})} T_q(t_i) I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = 0, \quad \prod_{j=1}^{2n+2m+4} t_j = (pq)^m p. \quad (20)$$

Доказательство. Если отбросить общий множитель в подынтегральных выражениях, то это равенство сведется к соотношению (см. лемму А.1 в [4] или следствие 2.3 в [9])

$$\sum_{1 \leq i \leq n+2} \frac{t_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} \theta_p(t_i t_j^{\pm 1})} \prod_{1 \leq j \leq n} \theta_p(t_i z_j^{\pm 1}) = 0. \quad \square$$

Одного этого подхода недостаточно для получения полной системы разностных уравнений хотя бы потому, что он полностью не зависит от условия балансировки. Как и в [9], ключевым является умножение подынтегрального выражения на функции, связанные с разностными операторами из работы [10].

Имея в виду этот факт, мы рассмотрим следующую функцию:

$$g^{(m)}(z; t_1, \dots, t_{m+2}; v_1, \dots, v_{m+4}) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq m+4} \theta_p(v_i z)}{z \theta_p(z^2) \prod_{1 \leq i \leq m+2} \theta_p((pq/t_i)z)} + \frac{\prod_{1 \leq i \leq m+4} \theta_p(v_i/z)}{z^{-1} \theta_p(z^{-2}) \prod_{1 \leq i \leq m+2} \theta_p((pq/t_i)/z)}.$$

Легко видеть, что она инвариантна относительно замены $z \mapsto 1/z$. Дополнительно, если $\prod_{1 \leq i \leq m+2} t_i \prod_{1 \leq i \leq m+4} v_i = (pq)^{m+1} q$, то оба члена являются (мероморфными) p -тэта-функциями с одинаковыми коэффициентами квазипериодичности, и поэтому

$$g^{(m)}(pz; t_1, \dots, t_{m+2}; v_1, \dots, v_{m+4}) = pz^2 g^{(m)}(z; t_1, \dots, t_{m+2}; v_1, \dots, v_{m+4}).$$

Более того, очевидные полюсы при $z = \pm 1, \pm \sqrt{p}$ должны иметь по симметрии четные порядки; поэтому на самом деле $g^{(m)}$ должна быть голоморфной функцией в этих точках. Таким образом, $g^{(m)}$ имеет только простые полюсы в точках $(pq/t_i)^{\pm 1} p^{\mathbb{Z}}$; следовательно,

$$g^{(m)}(z; t_1, \dots, t_{m+2}; v_1, \dots, v_{m+4}) = \sum_{1 \leq i \leq m+2} \frac{\alpha_i}{\theta_p(pqz^{\pm 1}/t_i)}$$

для подходящих коэффициентов α_i , которые могут быть вычислены обычным образом: необходимо избавиться от знаменателей и положить $z = t_i/q$, чтобы получить

$$\alpha_i = \frac{q \prod_{1 \leq j \leq m+4} \theta_p(v_j t_i/q)}{t_i \prod_{j=1, j \neq i}^{m+2} \theta_p(t_j/t_i)}.$$

Важность этой функции для наших целей определяется тем, что интеграл от ее произведения с подынтегральной функцией интеграла $I_1^{(m)}$ равен нулю. Точнее,

$$\int_{|z|=1} g^{(m)}(z; t_1, \dots, t_{m+2}; t_{m+3}, \dots, t_{2m+6}) \frac{\prod_{1 \leq r \leq 2m+6} \Gamma_{p,q}(t_r z^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} = 0$$

при условии, что $\prod_{1 \leq i \leq 2m+6} t_i = (pq)^{m+1}q$ и $|t_1|/q, \dots, |t_{m+2}|/q, |t_{m+3}|, \dots, |t_{2m+6}| < 1$. Действительно, по симметрии оба члена в $g^{(m)}$ приводят к одному интегралу; если же мы ограничимся первым членом (приобретая таким образом множитель 2), произведем замену переменной $z \mapsto q^{-1/2}/z$ и стянем результирующий контур к единичной окружности (не пересекая при этом полюсы), то получим

$$2 \int_{|z|=1} \frac{q^{1/2}z}{\theta_p(z^2)} \frac{\prod_{1 \leq i \leq m+2} \Gamma_{p,q}(q^{-1/2}t_i z^{\pm 1}) \prod_{1 \leq i \leq m+4} \Gamma_{p,q}(q^{1/2}t_{m+2+i} z^{\pm 1})}{\Gamma_{p,q}(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z}.$$

Но теперь подынтегральное выражение антисимметрично по отношению к преобразованию $z \mapsto z^{-1}$, и поэтому интеграл обращается в нуль.

Используя разложение функции $g^{(m)}$ в простые дроби, мы таким образом получим новое рекуррентное соотношение.

Лемма 5. Если $t_1 \cdots t_{2m+6} = (pq)^{m+1}q$, то справедливо следующее $(m+2)$ -членное рекуррентное соотношение для $I_1^{(m)}$:

$$\sum_{1 \leq k \leq m+2} \frac{\prod_{m+3 \leq i \leq 2m+6} \theta_p(t_i t_k / q)}{t_k \prod_{1 \leq i \leq m+2; i \neq k} \theta_p(t_i / t_k)} T_q(t_k)^{-1} I_1^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+6}) = 0. \quad (21)$$

Применяя оператор $T_p(t_{m+2+l})^{-1}$ к этому равенству, мы получаем

$$\sum_{1 \leq k \leq m+2} v_k M_{kl} = 0, \quad v_k = \frac{\prod_{m+3 \leq i \leq 2m+6} \theta_p(t_i t_k / q)}{\prod_{1 \leq i \leq m+2; i \neq k} \theta_p(t_i / t_k)}, \quad (22)$$

$$M_{kl} = T_q(t_k)^{-1} T_p(t_{m+2+l})^{-1} I_1^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+6}).$$

Следствие 6. Если $t_1 \cdots t_{2n+2} = 1$, то $I_n^{(-1)} = 0$.

Действительно, как показано выше, интеграл $I_n^{(-1)}$ пропорционален определителю матрицы M в (22) с $m = n - 2$ и масштабированными параметрами. Однако вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ принадлежит ядру матрицы M , $vM = 0$, и соответственно $\det M = 0$. При $n = 2$ этот результат следует также из (8) и явного вида эллиптического бета-интеграла. Это утверждение доказывает гипотезу о нуле из работы [4], которая была необходима там для доказательства точной формулы интегрирования для эллиптического интеграла Диксона.

Применяя лемму 3 к соотношению (22), мы получаем равенство $\sum_{k=n}^{m+2} v_k d_k = 0$, где $d_k = \det(M_{ll'})$ с $l \in \{1, \dots, n-1, k\}$, $l' \in \{1, \dots, n\}$. Миноры d_k пропорциональны интегралам $I_n^{(m-n+1)}(t_1/q, \dots, t_{n-1}/q, t_n, \dots, t_k/q, \dots, t_{m+2}, t_{m+3}/p, \dots, t_{m+3+n}/p, t_{m+4+n}, \dots, t_{2m+6})$. Подставляя соответствующие явные выражения, умножая параметры $t_1, \dots, t_{n-1}$ на q и $t_{m+3}, \dots, t_{m+3+n}$ на p , производя

замену $m \rightarrow m + n - 1$ и переставляя параметры соответствующим образом, мы получим рекуррентное соотношение для общих интегралов $I_n^{(m)}$.

Теорема 7. *Если $t_1 \cdots t_{2m+2n+4} = (pq)^{m+1}q$, то справедливо следующее $(m+2)$ -членное рекуррентное соотношение для $I_n^{(m)}$:*

$$\sum_{1 \leq k \leq m+2} \frac{\prod_{m+3 \leq i \leq 2n+2m+4} \theta_p(t_i t_k / q)}{t_k \prod_{1 \leq i \leq m+2; i \neq k} \theta_p(t_i / t_k)} T_q(t_k)^{-1} I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = 0. \quad (23)$$

Следствие 8 ([10], [17]). *Если $t_1 \cdots t_{2n+4} = pq$, то*

$$I_n^{(0)}(t_1, \dots, t_{2n+4}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+4} \Gamma_{p,q}(t_i t_j).$$

Доказательство. Действительно, обе части удовлетворяют одному и тому же двучленному рекуррентному соотношению, так что их отношение инвариантно относительно q -сдвигов $T_q(t_i)^{-1} T_q(t_j)^{-1}$ и аналогичных p -сдвигов. Следовательно, это отношение не зависит от $t_1, \dots, t_{2n+4}$. Для определения оставшегося множителя можно рассмотреть предел этого отношения при $t_{2n+3} t_{2n+4} \rightarrow 1$ и повторить эту процедуру по индукции. $\square$

Следствие 9. *Если $t_1 \cdots t_{2n+2m+4} = pq$, то мы имеем $\binom{n+m}{m}$ -мерный определитель*

$$\begin{aligned} & \det_{R, S \subset \{1, 2, \dots, n+m\}; |R|=|S|=m} \left(\prod_{r \in R} T_p(t_r) \prod_{s \in S} T_q(t_{s+n+m}) I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) \right) \\ &= \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n+m} t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}) t_{n+m+j} \theta_p(t_{n+m+i} t_{n+m+j}^{\pm 1}) \right]^{\binom{n+m-2}{m-1}} \\ & \quad \times \prod_{1 \leq i < j \leq 2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_i t_j)^{\binom{n+m-1}{m}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя представление в виде определителя для $I_n^{(m)}$, мы можем записать (R, S) -й матричный элемент в указанном выше определителе в виде

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\substack{i, j \in R^c \\ i < j}} t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}) \prod_{\substack{i, j \in S^c \\ i < j}} t_{n+m+j} \theta_p(t_{n+m+i} t_{n+m+j}^{\pm 1}) \right)^{-1} \\ & \times \det_{\substack{i \in R^c \\ j \in S^c}} \left(\prod_{\substack{1 \leq r \leq n+m \\ r \neq i}} T_p(t_r) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n+m \\ s \neq j}} T_q(t_{n+m+s}) I_1^{(m+n-1)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) \right), \end{aligned}$$

где $R^c = \{1, \dots, n+m\} \setminus R$. Первые два множителя могут быть вынесены за знак определителя, поскольку они не зависят от столбцов или строк соответственно;

совместно они дают общий множитель

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{R \subset \{1, \dots, n+m\} \\ |R|=m}} \prod_{\substack{i, j \in R^c \\ i < j}} (t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}))^{-1} &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+m} \prod_{\substack{R \subset \{1, \dots, n+m\} \\ |R|=m; i, j \notin R}} (t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}))^{-1} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+m} (t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}))^{-\binom{n+m-2}{m}}. \end{aligned}$$

Таким образом, нам остается вычислить определитель определителей. Последнее являются минорами фиксированной матрицы, и поэтому наша $\binom{n+m}{m} \times \binom{n+m}{m}$ -матрица является n -й внешней степенью $(n+m) \times (n+m)$ -матрицы с ij -м элементом

$$T_p(t_i)^{-1} T_q(t_{n+m+j})^{-1} \prod_{1 \leq r \leq n+m} T_p(t_r) T_q(t_{n+m+r}) I_1^{(m+n-1)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}),$$

т. е. матрицей, определяющей действие изначальной матрицы на n -ю внешнюю степень ее естественного модуля. В общем случае n -я внешняя степень $(n+m) \times (n+m)$ -матрицы M имеет определитель

$$\det(M)^{\binom{n+m-1}{n-1}},$$

что можно легко проверить, сведя к случаю диагональных матриц (естественность конструкции подразумевает инвариантность относительно сопряжения). В нашем случае $(n+m) \times (n+m)$ -матрица имеет определитель

$$\left[\prod_{1 \leq i < j \leq n+m} t_j \theta_p(t_i t_j^{\pm 1}) t_{n+m+j} \theta_p(t_{n+m+i} t_{n+m+j}^{\pm 1}) \right] I_{m+n}^{(0)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}),$$

что и приводит к требуемому результату. $\square$

Замечание 1. При $m = 1$ этот определитель по существу совпадает с эллиптической версией определителя Варченко для одномерных гипергеометрических интегралов ([20], [12]). Действительно, определитель Варченко эквивалентен вычислению интеграла Диксона, который возникает предельным переходом из формулы вычисления интеграла $I_n^{(0)}$ [11, теорема 7.2]. Сходимость самой матрицы является несколько более тонким моментом, поскольку в этом пределе область интегрирования стремится пройти через алгебраические особенности подынтегральной функции, приводя, таким образом, к нетривиальному вопросу о выборе фазы. Тем не менее можно показать, что

$$\begin{aligned} &\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\Gamma_{p,q}(q^{\alpha_1 + \alpha_2})}{\Gamma_{p,q}(q^{\alpha_1}, q^{\alpha_2}, q^{\alpha_1^+ + \alpha_2^+} a_1 a_2, q^{\alpha_1^+ + \alpha_2^-} a_1 / a_2, q^{\alpha_1^- + \alpha_2^+} a_2 / a_1, q^{\alpha_1^- + \alpha_2^-} / a_1 a_2)} \\ &\quad \times I_1^{(n-1)}(pq^{1-\beta_1^+} / b_1, \dots, pq^{1-\beta_n^+} / b_n, q^{-\beta_1^-} b_1, \dots, q^{-\beta_n^-} b_n, \\ &\quad q^{\alpha_1^+} a_1, q^{\alpha_1^-} / a_1, q^{\alpha_2^+} a_2, q^{\alpha_2^-} / a_2; p, q) \\ &= |\theta_p(a_1 a_2^{\pm 1})|^{1-\alpha_1-\alpha_2} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} (2\pi(p; p)_\infty^2) \\ &\quad \times \int_{z \in [a_1, a_2]} |\theta_p(a_1 z^{\pm 1})|^{\alpha_1-1} |\theta_p(a_2 z^{\pm 1})|^{\alpha_2-1} \prod_{1 \leq r \leq n} \theta_p(b_r z^{\pm 1})^{\beta_r} \frac{|\theta_p(z^2)| dz}{2\pi \sqrt{-1} z}, \quad (24) \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, b_1, \dots, b_n$ лежат на единичной окружности с положительной мнимой частью и $\operatorname{Re} a_1 > \operatorname{Re} a_2$, степенные показатели удовлетворяют условиям сходимости $\operatorname{Re} \alpha_i^\pm > 0 > \operatorname{Re} \beta_i^-$, а также справедливо условие балансировки $\alpha_1 + \alpha_2 = \sum_i \beta_i$ с $\alpha_i := \alpha_i^+ + \alpha_i^-$, $\beta_i := \beta_i^+ + \beta_i^-$. Областью интегрирования является дуга, ориентированная против часовой стрелки, от a_1 к a_2 . Доказательство такое же, как и у теоремы 7.2 в [11]; заметим также, что по лемме 7.1 указанной работы

$$\theta_p(b_r z^{\pm 1})^{\beta_r} = \exp(-\beta_r(\ln(-b_r z) + \ln(-b_r/z))/2) |\theta_p(b_r z^{\pm 1})|^{\beta_r}.$$

Результирующий множитель является локально постоянным по z на верхней полуокружности, и он меняется, только когда z переходит через одну из особенностей b_i . Кроме того, как отмечено в [11], замена переменных $x = -\theta_p(z)^2/\theta_p(-z)^2$ переводит это выражение в обычный бета-интеграл более высокого порядка в точном соответствии с наличием этого интеграла в тождестве для определителя Варченко. Наш результат может также рассматриваться как обобщение основного результата работы Аомото и Ито [3], который соответствует вырождению тригонометрического интеграла из [11, теорема 5.6]; интеграл Джексона возникает как сумма вычетов, получающихся после стягивания контура к 0.

Таким образом, интегралы $I_n^{(m)}$ определяют решения системы рекуррентных соотношений (20) и (23) и их аналогов, получающихся после перестановки параметров. Однако эти рекуррентные соотношения не подразумевают ограничения $|q| < 1$, необходимого для определения $I_n^{(m)}$. Конструирование решений эллиптического гипергеометрического уравнения при $|q| > 1$ (9) распространяется на произвольные значения n и m . По модулю некоторого эллиптического множителя q -сдвиговые уравнения, которым удовлетворяет

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) \prod_{1 \leq i \leq 2n+2m+4} \Gamma_{p,q}(t_i z^{\pm 1})^{-1},$$

инвариантны относительно преобразования $t_i \mapsto p^{a_i}/t_i$, $q \mapsto 1/q$, где $a_1, \dots, a_{2n+2m+4}$ является произвольной последовательностью целых или полуцелых чисел (но не перемешанных), таких, что $\sum_{i=1}^{2n+2m+4} a_i = 2m + 2$. То есть для обоих рекуррентных соотношений преобразованные коэффициенты получают-ся умножением на один и тот же множитель. Это наблюдение приводит к решениям указанных рекуррентных соотношений при $|q| > 1$. Решения с $|q| = 1$ получаются (так же, как и в случае $n = m = 1$) с помощью модифицированной эллиптической гамма-функции, которую мы здесь не рассматриваем за недостатком места.

§5. Доказательство формулы преобразования

Два рекуррентных соотношения, полученных для $I_n^{(m)}$, являются также рекуррентными соотношениями для правой части равенства (19): преобразование просто переставляет эти два сорта соотношений. Доказательство теоремы 2 с помощью этих разностных уравнений сводится к тому, чтобы показать, что $I_n^{(m)}$ является единственным мероморфным решением полной системы p - и q -разностных уравнений, с точностью до общего множителя (который затем легко фиксировать с помощью предельного перехода). В качестве подслучая это дает

также доказательство теоремы 1. Доказательство не слишком элементарно; оно включает в себя некоторые элементы дифференциальной/разностной теории Галуа [8]. Мы начнем с ключевого вспомогательного утверждения, необходимого нам.

Одна техническая тонкость, возникающая в нашем приложении разностной теории Галуа, состоит в том, что множество основных утверждений, имеющихся в литературе, требует алгебраической замкнутости поля постоянных. Поскольку в нашем случае мы имеем дело с *семейством* разностных уравнений, это ограничение является слишком жестким. Однако мы можем избежать этого осложнения, изменив базовое поле следующим образом. Пусть (k, τ) — разностное поле (т. е. τ является автоморфизмом поля k) характеристики 0, такое, что поле постоянных k^τ является алгебраически замкнутым в k . (Другими словами, орбиты конечной длины для τ над k имеют только длину 1.) Тогда существует каноническое расширение автоморфизма τ на поле $l := k \otimes_{k^\tau} \overline{k^\tau}$, такое, что *алгебраическое замыкание* $\overline{k^\tau}$ является новым полем постоянных. Таким образом, мы получаем корректно определенное понятие группы Галуа над l .

Лемма 10. Пусть $A \in GL_n(k)$, и пусть W — пространство векторов $w \in k^n$, таких, что $\tau(w) = Aw$. Пусть G — группа Галуа этого разностного уравнения (рассматриваемого как уравнение с коэффициентами в l) и V — соответствующее представление. Тогда

$$\dim_{k^\tau}(W) = \dim_l(V^G).$$

Доказательство. Абсолютная (обычная) группа Галуа $\text{Gal}(k^\tau)$ действует на l и коммутирует с действием τ ; в частности, мы имеем естественный изоморфизм $\text{Gal}(k^\tau) = \text{Gal}(l/k)$, и он корректно определен. Если мы продолжим коэффициенты разностного уравнения на l , то результирующее векторное пространство будет стабильным относительно $\text{Gal}(l/k)$ и, таким образом, допускает базис k -рациональных векторов. Другими словами, размерность $\dim_{k^\tau}(W)$ не меняется при таком продолжении коэффициентов, и поэтому можно считать, что $k = l$, или, другими словами, что поле постоянных в k является алгебраически замкнутым.

Теперь пусть k -алгебра R будет кольцом Пикара–Вессии данного разностного уравнения. Тогда по определению множество решений $w \in R^n$ разностного уравнения является n -мерным векторным пространством над k^τ с действием G , эквивалентным представлению V . Решение имеет коэффициенты в k тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно действия группы G , что дает необходимый результат. $\square$

Замечание 2. Аналогичная лемма справедлива для дифференциального случая (после замены группы GL_n на ее алгебру Ли); заметим, что в этом случае поле постоянных автоматически является алгебраически замкнутым над полем коэффициентов.

Замечание 3. В более общем случае, если ρ является произвольным рациональным представлением группы $GL_n(k)$, то можно применить лемму к разностному уравнению $\tau(w) = \rho(A)w$, используя тот факт, что новая группа Галуа просто совпадает с $\rho(G)$.

Применение замечания 3 к присоединенному представлению дает такое

Следствие 11. Пусть A и G такие же, как выше, и пусть W — пространство матриц $M \in \text{End}(k^n)$, таких, что $\tau(M) = AMA^{-1}$. Тогда

$$\dim_{k^\tau}(W) = \dim_l(\text{End}_G(V)).$$

В частности, если группа G неприводима, то пространство W одномерно и (поскольку $I \in W$) состоит из скалярных матриц.

Утверждение, что $\text{End}_G(V) = l$ для неприводимых V , является стандартным фактом (леммой Шура) теории представлений. Любой эндоморфизм, не кратный тождественному, имеет по крайней мере одно подпространство собственных векторов (поскольку l алгебраически замкнуто), и каждое такое подпространство является инвариантным, что делает представление приводимым.

Мы можем перейти теперь к доказательству самой нашей формулы преобразования. В этом случае поле k совпадает с полем p -эллиптических функций по одному из параметров x (на самом деле, по всем параметрам) и τ является оператором q -сдвигов, $\tau(f(x)) = f(qx)$. Поэтому k^τ является полем постоянных, не зависящих от x (единственное множество одновременно p - и q -эллиптических функций от x). Для того чтобы применить указанную выше теорию, нам необходимо установить три факта: во-первых, что наши рекуррентные соотношения могут быть скомбинированы в матричное уравнение указанного выше вида, во-вторых, что коэффициенты этих разностных уравнений можно сделать эллиптическими после подходящей перенормировки и, в-третьих, что результирующее эллиптическое разностное уравнение имеет неприводимую группу Галуа.

Доказательство формулы преобразования. Для того чтобы скомбинировать рекуррентные соотношения в матричное разностное уравнение порядка $\binom{n+m}{m}$, нам необходимо показать, что эти соотношения позволяют выразить

$$I_n^{(m)}(qt_1, \dots, qt_m, t_{m+1}, \dots, qt_{2m+2n+3}, t_{2m+2n+4}/q; p, q)$$

в виде линейной комбинации

$$\prod_{i \in S} T_q(t_i) I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+2n+4}; p, q),$$

где S есть m -элементное подмножество в $\{1, \dots, n+m\}$. Используя $(n+2)$ -членное рекуррентное соотношение, мы получаем линейную зависимость между изначальным интегралом, интегралом

$$I_n^{(m)}(qt_1, \dots, qt_m, t_{m+1}, \dots, t_{2m+2n+3}, t_{2m+2n+4}/q; p, q),$$

и n интегралами

$$T_q(t_i) I_n^{(m)}(qt_1, \dots, qt_m, t_{m+1}, \dots, t_{2m+2n+3}, t_{2m+2n+4}/q; p, q)$$

для $m+1 \leq i \leq m+n$. По симметрии достаточно рассмотреть член с $i = m+1$. Но тогда $(m+2)$ -членное рекуррентное соотношение порождает линейную зависимость между $m+2$ интегралами

$$T_q(t_i)^{-1} I_n^{(m)}(qt_1, \dots, qt_{m+1}, \dots, t_{2m+2n+3}, t_{2m+2n+4}/q; p, q)$$

для $i \in \{1, \dots, m+1, 2m+2n+4\}$. Таким образом, мы получим матричное разностное уравнение необходимой формы. (Можно также отметить, что соответствующая матрица A является весьма разреженной; ее элемент, соответствующий паре S, T m -подмножеств из $\{1, \dots, n+m\}$, равен 0 при нарушении условия $S \cap T \geq m-1$.)

Далее, для проверки эллиптичности мы рассмотрим перенормировку

$$\left(\frac{\Gamma_{p,q}(v^{\pm 2})}{\prod_{1 \leq r \leq 2m+2n+4} \Gamma_{p,q}(t_r v^{\pm 1})} \right)^n I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+2n+4}; p, q).$$

Это выражение отличается от соответствующего минора матрицы для $I_1^{(m+n-1)}$ умножением на пару функций, одна из которых является p -эллиптической по всем переменным, кроме v , а другая аналогичным образом q -эллиптична. Таким образом, мы приходим к выводу, что матрица A по существу является просто n -й внешней степенью соответствующей матрицы для $I_1^{(m+n-1)}$, с точностью до пары диагональных матриц, комбинация которых не влияет на эллиптичность. Поэтому будет достаточно показать, что разностное уравнение эллиплично при $n = 1$.

Рассмотрим $(m+1) \times (m+1)$ -матрицу

$$M(x)_{ij} := T_p(t_i)^{-1} T_q(t_j)^{-1} \frac{\Gamma_{p,q}(v^{\pm 2}) \prod_{1 \leq r \leq m+1} \Gamma_{p,q}(v^{\pm 1}/t_r)}{\Gamma_{p,q}(xv^{\pm 1}, v^{\pm 1}/Tx) \prod_{m+2 \leq r \leq 2m+4} \Gamma_{p,q}(t_r v^{\pm 1})} \\ \times I_1^{(m)}(pqt_1, \dots, pqt_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_{2m+4}, x, 1/Tx; p, q),$$

где $T = \prod_{1 \leq r \leq 2m+4} t_r$. Благодаря симметрии по p и q (матрица заменяется на ее транспонированную при перестановке p и q) достаточно рассмотреть поведение этой матрицы при q -сдвиге. Действительно, можно показать (используя оба рекуррентных соотношения, как описано выше), что

$$M(qx) = A(x)M(x),$$

где

$$A(x)_{ij} = \delta_{ij} \frac{\theta_p(xt_i^{\pm 1}, Txv^{\pm 1})}{\theta_p(xv^{\pm 1}, Txt_i^{\pm 1})} + \frac{\theta_p(t_i v^{\pm 1}, Txv^{\pm 1})}{\theta_p(t_i (Tx)^{\pm 1}, xv^{\pm 1})} \\ \times \frac{\theta_p(Tx^2) \prod_{1 \leq l \leq m+1} \theta_p(t_l Tx)}{\prod_{m+2 \leq l \leq 2m+4} \theta_p(Tx/t_l)} \frac{\theta_p(t_j x) \prod_{m+2 \leq l \leq 2m+4} \theta_p(1/t_l t_j)}{\theta_p(t_j Tx, v^{\pm 1}/t_j) \prod_{1 \leq l \leq m+1; l \neq j} \theta_p(t_l/t_j)}.$$

Легко проверить, что эти коэффициенты эллиптичны, как и требовалось.

Осталось только доказать, что группа Галуа является (в общем случае) неприводимой для всех m, n . Теперь, поскольку группа Галуа при $n > 1$ является n -й внешней степенью группы при $n = 1$, то будет достаточно показать, что в общем случае эта группа при $n = 1$ содержит в себе SL_{m+1} (все ненулевые внешние степени которой являются неприводимыми). Можно поступить так же, как и в доказательстве теоремы 3.3.3.1 в [1]. Важно то, что по теории Андре группа Галуа при специализации может только уменьшаться, включая вырождение разностного уравнения к дифференциальному уравнению. Мы уже обсудили тот факт, что интеграл $I_1^{(m)}$ может быть вырожден до классического

бета-интеграла более высокого порядка, и, действительно, таким образом можно получить базис соответствующего дифференциального уравнения. Поэтому мы заключаем, что эллиптическое гипергеометрическое разностное уравнение вырождается в этом пределе к уравнению Жордана–Похгаммера. Но известно [19], что оно обладает в общем случае группой Галуа, содержащей в себе SL_{m+1} . $\square$

Замечание 4. Заметим, в частности, что приведенная формула для A действительно сводится к единичной матрице в пределе Жордана–Похгаммера, поскольку при этом $T \rightarrow 1$, что заставляет диагональные вклады сходиться к 1; внедиагональные вклады обращаются в нуль, поскольку $t_j t_{j+m+1} \rightarrow 1$. Более того, можно непосредственно вычислить предельное дифференциальное уравнение и использовать жесткость уравнения Жордана–Похгаммера, чтобы убедиться, что эти два уравнения эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Y. André, *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **34**:5 (2001), 685–739.
- [2] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Math. Appl., vol. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [3] K. Aomoto, M. Ito, *BC_n -type Jackson integral generalized from Gustafson's C_n -type sum*, J. Difference Equations Appl., **14**:10–11 (2008), 1059–1097.
- [4] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, *Elliptic Selberg integrals*, Internat. Math. Res. Notices, **2001**:20 (2001), 1083–1110.
- [5] A. L. Dixon, *On a generalization of Legendre's formula $KE' - (K - E)K' = \pi/2$* , Proc. London Math. Soc. (2), **3**:1 (1905), 206–224.
- [6] P. I. Etingof, *Difference equations with elliptic coefficients and quantum affine algebras*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9312057>.
- [7] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus: a complement*, Linear Algebra Appl., **411** (2005), 68–166.
- [8] M. van der Put, M. F. Singer, *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Math., vol. 1666, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [9] E. M. Rains, *Recurrences for elliptic hypergeometric integrals* <http://arxiv.org/abs/math.CA/0504285>.
- [10] E. M. Rains, *Transformations of elliptic hypergeometric integrals*, Ann. of Math. (to appear).
- [11] E. M. Rains, *Limits of elliptic hypergeometric integrals*, Ramanujan J., **18**:3 (2009), 257–306.
- [12] D. Richards, Q. Zheng, *Determinants of period matrices and an application to Selberg's multidimensional beta integral*, Adv. Appl. Math., **28**:3–4 (2002), 602–633.
- [13] В. П. Спиридонов, *Об эллиптической бета-функции*, УМН, **56** (1) (2001), 181–182.
- [14] V. P. Spiridonov, *Theta hypergeometric integrals*, Алгебра и анализ, **15**:6 (2003), 161–215.
- [15] В. П. Спиридонов, *Эллиптические гипергеометрические функции*, Докт. дисс., ОИЯИ, Сентябрь 2004.
- [16] В. П. Спиридонов, *Эллиптические гипергеометрические функции и модели типа Калоджеро–Сазерленда*, ТМФ, **150**:2 (2007), 311–324.
- [17] V. P. Spiridonov, *Short proofs of the elliptic beta integrals*, Ramanujan J., **13** (2007), 265–283.

- [18] V. P. Spiridonov, S. O. Warnaar, *Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems*, Adv. Math., **207**:1 (2006), 91–132.
- [19] K. Takano, E. Bannai, *A global study of Jordan–Pochhammer differential equations*, Funkcial. Ekvac., **19**:1 (1976), 85–99.
- [20] А. Н. Варченко, *Бета-функция Эйлера, детерминант Вандермонда, уравнение Лежандра, и критические значения линейных функций на конфигурации гиперплоскостей*, I, II, Изв. АН СССР, сер. матем., **53**:6 (1989), 1206–1235; **54**:1 (1990), 146–158.

Математический факультет, Калтех, Пасадена, США
Лаборатория теоретической физики
им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия

Поступило в редакцию
25 декабря 2007 г.